

双材料应力分析中的镜像点方法

许金泉

(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

摘要 提出一种分析各类双材料中任一点受集中力作用问题的方法. 通过将结合界面或其自由表面看作镜面, 将应力函数或位移函数设定成固定于受载点及其镜像点上的局部坐标系下的形式, 利用界面连续条件和 Dirichlet 的单值性原理, 所有应力函数或位移函数就可由无限体中集中力的解或半无限体表面集中力的解的应力函数求得. 这种方法不仅可适用于单一界面的情况, 也可适用于多个界面并存的情况, 并且也可适用于具有自由表面的结合材料. 这一方法可应用于各类结合材料、涂层薄膜材料、板材等.

关键词 双材料, 界面, Dirichlet 单值性原理, 理论解, 格林函数

引 言

精确地分析结合材料界面上的应力, 是结合材料强度评价的基础. 目前主要是依靠数值计算方法, 来求取界面上的应力. 一些文献^[1~4]针对界面的特殊性, 提出了提高数值计算精度的方法. 然而, 在建立界面破坏的强度准则时, 由于界面端奇异性及应力不连续性等^[5~7], 往往还需对界面上的应力分布即应力场有一个把握. 而这项工作, 却是难以仅靠数值计算来完成的, 而必须借助于理论分析. 另一方面, 对于薄膜涂层材料, 由于薄膜涂层一般只有几微米到几百微米, 提高数值计算精度的难度很大, 也需要有一种可以作为格林函数使用的理论解, 来检验或保证数值计算的精度. 因此, 理论分析在结合材料等的分析中仍具有十分重要的意义. 但是, 由于界面的存在, 理论分析的难度较大, 目前尚只有两个半无限体结合材料和一些简单情况的理论解^[8,9]. 本文通过引入镜像点和利用 Dirichlet 的单值性原理, 提出了一种结合材料的理论分析方法, 可以方便地适用于各类结合材料、涂层薄膜材料、板材等受集中力作用的问题, 但难以适用于界面端奇异应力场的求解.

1 理论基础

对于双材料界面, 以平面问题为例, 界面连续条件可以表达为 (参见图 1)

$$\left. \begin{aligned} u_1 + iv_1 &= u_2 + iv_2 \\ \sigma_{y1} + i\tau_{xy1} &= \sigma_{y2} + i\tau_{xy2} \end{aligned} \right\}, \text{当 } y = 0 \text{ 时} \quad (1)$$

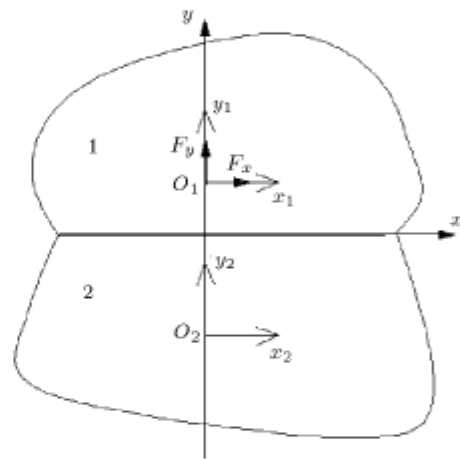


图 1 结合材料的力学模型

Fig.1 Bimaterial model

这里, 下标 1,2 表示对应于材料 1,2 的分量. 根据 Dirichlet 的单值性原理, 如果

$$L(x, y) = R(x, -y) \quad (2)$$

且 L, R 均为调和函数 (L, R 分别代表等式的左边和右边), 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial R}{\partial y} \\ \int Ldx = \int Rdx, \quad \int Ldy = -\int Rdy \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

即每一次关于 y 的偏导或积分使等式两边变号, 而关于 x 的操作则不变号. 而且如果 R 已知, 则只需将其中的变量 y 替换成 $-y$, 就可得到 L . 如果我们

能将式 (1) 的诸式都改写成式 (2) 的形式, 就可以利用 Dirichlet 的单值性原理来求解双材料问题.

对于平面问题, 将位移及应力分量用 Goursat 的应力函数来表示, 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + i\tau_{xy} &= \varphi' + \bar{\varphi}' + z\varphi'' + \psi' \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa\varphi - z\bar{\varphi} - \bar{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由于在界面处 $y = 0$, 即 $z = \bar{z}$, 故 $\bar{z}\varphi''$ 可改写为 $z\varphi''$, $z\bar{\varphi}'$ 可改写为 $\bar{z}\varphi'$, 考虑到解析函数的实部和虚部均为调和函数, 经过这样的改写后, 就可以将式 (1) 改写成等式两边均用调和函数表达的形式. 必须指出, 这样的改写并非一定须将界面置于 $y = 0$ 处. 例如, 界面在 $z_0 = ih$ 处时, 在界面上, $\bar{z}\varphi''$ 可改写为 $(z - i2h)\varphi''$, $z\bar{\varphi}'$ 可改写为 $(z - i2h)\varphi'$, 即仍可将在应力函数表示的界面连续条件改写成等式两边均用调和函数表达的形式. 然而, 要利用 Dirichlet 的单值性原理, 还必须使等式两边关于 y 方向的坐标有符号相反的特性. 这一问题可通过引入镜像点来解决. 例如, 设 O_1 点为载荷点 (参见图 1), 则由界面引起的镜像点为 O_2 . 引入固定于 O_1, O_2 的两个局部坐标系 z_1, z_2 , 如将 Goursat 的应力函数以此局部坐标系来定义, 则由于在界面上任意点处, 都有 $z_1 = \bar{z}_2$. 即关于 z_1, z_2 , 在 y 方向上以符号相反的形式趋近于界面, 因此, 对于用 z_1, z_2 的函数来表示的界面连续条件, 可以适用 Dirichlet 的单值性原理.

特别指出, 在三维问题中, 由于可用 4 个调和函数, 作为位移函数来求解, 这一方法仍然是可以适用的. 下面我们先通过一个简单的例子来说明这一方法. 然后将此方法适用于薄膜涂层材料, 求取其表面受集中力作用时的理论解.

2 无限平面结合材料受集中力作用的问题

这一问题已由 Rongved^[9] 求得了理论解. 在这里, 我们作为上述方法的算例, 重新求解. 如图 1, 考虑在点 O_1 作用集中力 F_x, F_y , 镜像点为 O_2 . 引入固定于 O_1, O_2 的两个局部坐标系, 其复坐标分别为 z_1, z_2 . 设材料 1, 2 的应力函数分别为 φ_1, ψ_1 和 φ_2, ψ_2

$$\varphi_1 = A_1(z_1) + B_1(z_2), \quad \psi_1 = a_1(z_1) + b_1(z_2) \quad (5)$$

$$\varphi_2 = A_2(z_1), \quad \psi_2 = a_2(z_1) \quad (6)$$

这里, 由于在无穷远处应力必须消失, 故式 (5), (6) 中出现的所有函数必须在对应的坐标原点上有奇异

性; 由于材料 2 内部无应力奇异点, 故材料 2 的应力函数不应含 z_2 的函数.

根据 Goursat 公式和式 (1) 的界面连续条件, 得:

当 $y = 0$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} A_1'(z_1) + B_1'(z_2) + \overline{A_1'(z_1)} + \overline{B_1'(z_2)} + \\ x(A_1''(z_1) + B_1''(z_2)) + a_1'(z_1) + b_1'(z_2) = \\ A_2'(z_1) + \overline{A_2'(z_1)} + xA_2''(z_1) + a_2'(z_1) \\ \Gamma[\kappa_1(A_1(z_1) + B_1(z_2)) - \\ x(\overline{A_1'(z_1)} + \overline{B_1'(z_2)}) - \overline{a_1(z_1)} - \overline{b_1(z_2)}] = \\ \kappa_2 A_2(z_1) - x\overline{A_2'(z_1)} - \overline{a_2(z_1)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这里, $\Gamma = \mu_2/\mu_1$, 由于

$$\left. \begin{aligned} z_1 = x + iy_1 = z - z_0 \\ z_2 = x + iy_2 = z - \bar{z}_0 \\ z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

z_0 为 O_1 点在整体坐标系下的坐标. 在界面上有 $y = 0$, $z_1 = \bar{z}_2$, $z = \bar{z}$, 式 (7) 可改写为:

当 $z_1 = \bar{z}_2$ 时

$$\left. \begin{aligned} A_1'(z_1) + \overline{A_1'(z_1)} + zA_1''(z_1) + a_1'(z_1) - \\ [A_2'(z_1) + \overline{A_2'(z_1)} + zA_2''(z_1) + a_2'(z_1)] = \\ -[B_1'(z_2) + \overline{B_1'(z_2)} + zB_1''(z_2) + b_1'(z_2)] \\ \Gamma[\kappa_1 A_1(z_1) - \overline{zA_1'(z_1)} - \overline{a_1(z_1)}] - \\ [\kappa_2 A_2(z_1) - \overline{zA_2'(z_1)} - \overline{a_2(z_1)}] = \\ -\Gamma[\kappa_1 B_1(z_2) - \overline{zB_1'(z_2)} - \overline{b_1(z_2)}] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由于解析函数的实部与虚部必为调和函数, 且在界面上有 $y_1 = -y_2$, 上式符合适用 Dirichlet 的单值性原理的条件. 考虑到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dirichlet 单值性原理式 (3) 可改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial R}{\partial z} \\ \int Ldz = \int R d\bar{z}, \quad \int Ld\bar{z} = \int Rdz \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将上式适用于式 (9), 可以解得

$$\left. \begin{aligned} A_2(z_1) &= \frac{\Gamma(\kappa_1 + 1)}{\Gamma + \kappa_2} A_1(z_1) \\ a_2(z_1) &= \left(\frac{\Gamma(\kappa_1 + 1)}{\Gamma\kappa_1 + 1} - \frac{\Gamma(\kappa_1 + 1)}{\Gamma + \kappa_2} \right) z A_1'(z_1) + \\ &\quad \frac{\Gamma(\kappa_1 + 1)}{\Gamma\kappa_1 + 1} a_1(z_1) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

当 $\bar{z}_1 = z_2$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} B_1(z_2) &= \frac{\Gamma - 1}{\Gamma\kappa_1 + 1} (z \overline{A_1'(z_1)} + \overline{a_1(z_1)}) \\ b_1(z_2) &= \frac{\Gamma\kappa_1 - \kappa_2}{\Gamma + \kappa_2} \overline{A_1(z_1)} + \\ &\quad \frac{1 - \Gamma}{\Gamma\kappa_1 + 1} (z^2 \overline{A_1''(z_1)} + z \overline{A_1'(z_1)} + z \overline{a_1'(z_1)}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

这里, $\bar{z}_1 = z_2$ 表示将方程右边的 z_1 替换成 z_2 , 以得到方程左边的应力函数. 由式 (12), 式 (13) 可知, 只要知道了函数 A_1, a_1 , 其他应力函数就可由界面连续条件求得. 而 A_1, a_1 所要满足的条件, 只是在 O_1 点的集中力条件. 因此, A_1, a_1 可以取为无限体中一点受集中力作用时的解, 即 Kelvin 的解. 考虑到坐标系的平移, 有

$$\left. \begin{aligned} A_1(z_1) &= L \log z_1 \\ a_1(z_1) &= N \log z_1 - \frac{\bar{z}_0}{z_1} L \\ L &= -\bar{N}/\kappa_1 = -\frac{F_x + iF_y}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

引入 Dunders 异材参数^[10]

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\mu_1(\kappa_2 + 1) - \mu_2(\kappa_1 + 1)}{\mu_1(\kappa_2 + 1) + \mu_2(\kappa_1 + 1)} \\ \beta &= \frac{\mu_1(\kappa_2 - 1) - \mu_2(\kappa_1 - 1)}{\mu_1(\kappa_2 + 1) + \mu_2(\kappa_1 + 1)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式 (12),(13) 可简化为

$$\left. \begin{aligned} A_2(z_1) &= \frac{1 - \alpha}{1 + \beta} A_1(z_1) \\ a_2(z_1) &= \frac{2(1 - \alpha)\beta}{1 - \beta^2} z A_1'(z_1) + \frac{1 - \alpha}{1 - \beta} a_1(z_1) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

当 $\bar{z}_1 = z_2$ 时

$$\left. \begin{aligned} B_1(z_2) &= \frac{\beta - \alpha}{1 - \beta} (z \overline{A_1'(z_1)} + \overline{a_1(z_1)}) \\ b_1(z_2) &= -\frac{\alpha + \beta}{1 + \beta} \overline{A_1(z_1)} + \\ &\quad \frac{\alpha - \beta}{1 - \beta} (z^2 \overline{A_1''(z_1)} + z \overline{A_1'(z_1)} + z \overline{a_1'(z_1)}) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

将式 (14) 代入式 (16), 式 (17) 得

$$\left. \begin{aligned} A_2(z_1) &= \frac{1 - \alpha}{1 + \beta} L \log z_1 \\ a_2(z_1) &= \frac{2(1 - \alpha)\beta L}{1 - \beta^2} \frac{(z_1 + z_0)}{z_1} + \\ &\quad \frac{1 - \alpha}{1 - \beta} \left[N \log z_1 - \frac{L \bar{z}_0}{z_1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1(z_2) &= \frac{\beta - \alpha}{1 - \beta} \left(\bar{L} + \bar{N} \log z_2 + \frac{\bar{L}(\bar{z}_0 - z_0)}{z_2} \right) \\ b_1(z_2) &= -\frac{\alpha + \beta \bar{L}}{1 + \beta} \frac{1}{z_2} + \frac{\alpha - \beta(z_2 + \bar{z}_0)}{1 - \beta} \frac{1}{z_2} \\ &\quad \left(\frac{\bar{L}(z_0 - \bar{z}_0 - z_2)}{z_2} + \bar{L} + \bar{N} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

将式 (14), 式 (18) 和式 (19) 代入式 (5) 和式 (6), 并代入 Goursat 公式, 即可方便地求得无限平面结合材料受集中力作用的理论解. 容易验证, 这样求得的理论解, 与 Rongved 的解^[9] 是一致的. 特别地, 当材料 2 为空, 即界面为自由表面时, 只要在式 (6) 中取 $A_2 = 0, a_2 = 0$, 即可求得半无限体中一点受集中力作用时的理论解 (即 Mindlin^[11] 解). 这时, 表面自由条件可表达为

$$\begin{aligned} A_1'(z_1) + \overline{A_1'(z_1)} + z A_1''(z_1) + a_1'(z_1) &= \\ -[B_1'(z_2) + \overline{B_1'(z_2)} + z B_1''(z_2) + b_1'(z_2)] & \\ \text{当 } y = 0 \text{ 时} & \end{aligned} \quad (20)$$

利用 Dirichlet 的单值性原理, 可以解得

$$\left. \begin{aligned} B_1(z_2) &= -[z \overline{A_1'(z_1)} + \overline{a_1(z_1)}] \\ b_1(z_2) &= -z \overline{B_1'(z_2)} - \overline{A_1(z_1)} \\ \bar{z}_1 &= z_2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

而 A_1, a_1 所要满足的条件, 仍只是在 O_1 点的集中力条件, 即可由式 (14) 得到.

3 涂层薄膜材料表面受集中力作用的问题

如图 2 所示, 考虑表面 O_1 点处受集中力 P_x, P_y 的作用. 由于存在两个镜面, 将引起无限个镜像点. 记上半平面的镜像点为 $O_k (k = 1 \rightarrow \infty)$, 固定在该镜像点上的局部坐标系的坐标为 $z_k = x + iy_{k1}$. 记下半平面的镜像点为 $C_k (k = 1 \rightarrow \infty)$, 局部坐标为 $z_k = x + iy_{k2}$. 为了方便起见, 以下称 O_k, C_k 为第 k 阶镜像点.

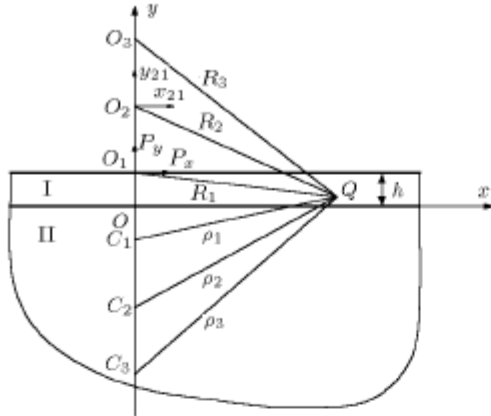


图 2 涂层薄膜材料的力学模型

Fig.2 Analysis model of a coated material

根据镜像点间的位置关系, 有

$$\left. \begin{aligned} R_k &= |z_k|, \quad z_k = z - i(2k-1)h \\ \rho_k &= |\zeta_k|, \quad \zeta_k = z + i(2k-1)h \end{aligned} \right\}, \text{当 } k=1 \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (22)$$

界面连续条件和自由表面条件分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yI} + i\tau_{xyI} &= \sigma_{yII} + i\tau_{xyII} \\ u_I + iv_I &= u_{II} + iv_{II} \end{aligned} \right\}, \text{当 } y=0 \text{ 时} \quad (23)$$

$$\sigma_{yI} + i\tau_{xyI} = 0, \text{ 当 } y=h \text{ 时} \quad (24)$$

这里, 下标 I, II 表示对应于材料 I, II 的分量. 设应力函数为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(z_k) + \Phi_k(\zeta_k)) \\ \varphi_{II} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z_k) \\ \psi_I &= \sum_{k=1}^{\infty} (B_k(z_k) + \Psi_k(\zeta_k)) \\ \psi_{II} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z_k) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

由于在远处应力必须消失, 故式 (25) 中出现的所有函数必须在对应的坐标原点上具有奇异性; 考虑到材料 II 内部无应力奇异点, 材料 II 的应力函数不应含 ζ_k 的函数.

在界面上, $y=0$, 故有

$$\left. \begin{aligned} z_k &= x - i(2k-1)h \\ \zeta_k &= x + i(2k-1)h \\ z_k &= \overline{\zeta_k} \\ R_k &= \rho_k \end{aligned} \right\}, \text{当 } k=1 \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (26)$$

由 Goursat 公式和界面连续条件得

$$\left. \begin{aligned} A'_k + \overline{A'_k} + xA''_k + B'_k - \\ [\alpha'_k + \overline{\alpha'_k} + x\alpha''_k + b'_k] = \\ -[\Phi'_k + \overline{\Phi'_k} + x\Phi''_k + \Psi'_k] \\ \Gamma\{\kappa_1 A_k - x\overline{A'_k} - \overline{B_k}\} - \\ [\kappa_2 a_k - x\overline{\alpha'_k} - \overline{b_k}] = \\ -\Gamma[\kappa_1 \Phi_k - x\overline{\Phi'_k} - \overline{\Psi_k}] \end{aligned} \right\}, \text{当 } y=0 \text{ 时} \quad (27)$$

利用在界面上 $y=0$ 的条件, 将等式两边配成调和函数, 并利用 Dirichlet 的单值性原理, 得

$$a_k = \frac{1-\alpha}{1+\beta} A_k, \quad b_k = \frac{2(1-\alpha)\beta}{1-\beta^2} zA'_k + \frac{1-\alpha}{1-\beta} B_k \quad (28)$$

当 $\overline{z_k} = \zeta_k$ 时

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k &= \frac{\beta-\alpha}{1-\beta} (z\overline{A'_k} + B_k) \\ \Psi_k &= -\frac{\alpha+\beta}{1+\beta} \overline{A_k} + \frac{\alpha-\beta}{1-\beta} (z^2 \overline{A''_k} + z\overline{A'_k} + z\overline{B'_k}) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

在自由表面上, 有

$$\left. \begin{aligned} z_{k+1} &= x - i2kh, \quad \zeta_k = x + i2kh \\ z_{k+1} &= \overline{\zeta_k}, \quad R_{k+1} = \rho_k \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

由 Goursat 公式和自由表面条件得

$$\begin{aligned} A'_{k+1} + \overline{A'_{k+1}} + (x-ih)A''_{k+1} + B'_{k+1} + \Phi'_k + \overline{\Phi'_k} + \\ (x-ih)\Phi''_k + \Psi'_k = 0, \text{ 当 } k=1 \rightarrow \infty \text{ 时} \end{aligned} \quad (31)$$

$$A'_1 + \overline{A'_1} + (x-ih)A''_1 + B'_1 = 0 \quad (32)$$

利用在自由表面上 $y=h$ 的条件, 将式 (31) 两边配成调和函数, 考虑到 $z_{k+1} = \overline{\zeta_k}$, 根据 Dirichlet 的单值性原理, 有

$$\left. \begin{aligned} A_{k+1} &= -z\overline{\Phi'_k} - \overline{\Psi_k} \\ B_{k+1} &= (z-i2h)\overline{\Phi'_k} - \overline{\Phi_k} + \\ & z(z-i2h)\overline{\Phi''_k} + (z-i2h)\overline{\Psi'_k} \end{aligned} \right\}, \text{当 } \overline{\zeta_k} = z_{k+1} \text{ 时} \quad (33)$$

由式 (28), 式 (29) 和式 (33) 可知, 如果 A_1 和 B_1 已知, 则其他函数都可求得. 而 A_1 和 B_1 除了必须满足式 (32) 以外, 还必须满足 O_1 点的集中力条件. 显然, 半无限体自由表面集中力的解满足这些条件, 即可取

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= C \log z_1 \\ B_1 &= -\bar{C} \log z_1 + ihC/z_1 \\ C &= -(P_x + iP_y)/(2\pi) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

这样, 可利用式 (28), 式 (29), 式 (33) 和式 (34), 决定出所有应力函数, 从而求得问题的级数解. 利用代数分析软件, 由上述递推公式可以方便地求得对应于各阶镜像点的应力函数. 必须指出, 一般情况下只要考虑少数几个离界面较近的镜像点的应力函数, 就可以求得具有足够精度的解.

为了验证上述推导的正确性, 我们对于图 3 所示的问题进行了边界元分析. 材料常数如表 1 所示. 图 4 为界面应力的数值解与理论解的比较. 由图可知, 考虑到 4 阶镜像点时, 理论解即与数值解良好

地相一致, 这一方面说明了上述推导是正确的, 从而进一步说明了本文提出的分析方法的有效性, 另一方面也说明了只需考虑有限个镜像点, 即可获得足够高精度的解.

4 讨论与结论

通过引入镜像点, 提出了一种有效的结合材料理论分析的方法. 并通过具体例题, 说明了其有用性. 本文所提出的方法, 可以适用于作用点在材料内部时的情况, 也可适用于三维问题. 对于多相结合材料, 只要将各个界面以及自由表面作为反射镜, 决定出镜像点, 也同样可以适用. 作为结合材料的特例, 也可求解表面自由的半无限体或条状板受集中力作用问题. 限于篇幅, 我们这里不再一一介绍.

参 考 文 献

- 1 Yuuki R. Elastic Analysis by Boundary Element Method. In Japanese, Tokyo Baifukan, 1987
- 2 Yuuki R, Cho SB. Efficient boundary element analysis of stress intensity factors for interface cracks in dissimilar materials. *Engng Fract Mech*, 1989, 34: 179~188
- 3 Lin KY, Mar JW. Finite element analysis of stress intensity factors for cracks at a biomaterial interface. *Int J Fract*, 1976, 12: 521~531
- 4 Yuuki R, Xu JQ. Development of the boundary element method program (BEM2D/EWS) and analysis of dissimilar materials. *Sesankensyu* (IIS, Tokyo Univ.), 1991, 43: 306~309
- 5 Bogy DB. On the problem of edge bonded elastic quarter planes loaded at boundary. *Int J Solids and Struct*, 1970, 6: 1287~1313
- 6 Hein VL, Erdogan F. Stress singularity in a two materials wedge. *Int J Fract*, 1971, 7: 317~329
- 7 Dunders J. Boundary condition at interface. In: *Micromechanics and Inhomogeneous*. Wang GJ ed, New York: Springer-Verlag, 1990. 109~114
- 8 Hetenyi J, Dunders J. The elastic plane with a circular insert loaded by a tangential force. *J Appl Mech*, 1962, 29: 362~368
- 9 Rongved L. Force interior to one of two jointed semi-infinite solids. In: *Proc. of the first Midwestern Conference on Solid Mechanics*, Mindlin KD ed, Urbana: University of Illinois, 1953. 1~13
- 10 Dunders J. Effects of elastic constants on stress in a composite under plane deformation. *J Composite Mater*, 1967, 1: 310~322
- 11 Mindlin RD. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *J Physics*, 1936, 7: 195~202

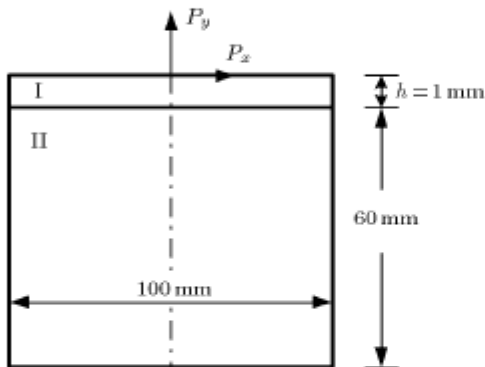


图 3 BEM 分析模型

Fig.3 Analysis model for BEM

表 1 BEM 分析中的材料常数

Table 1 Material constants used in BEM

Material	I	II
Young's modulus E/GPa	546	206
Poisson's ratio ν	0.3	0.3

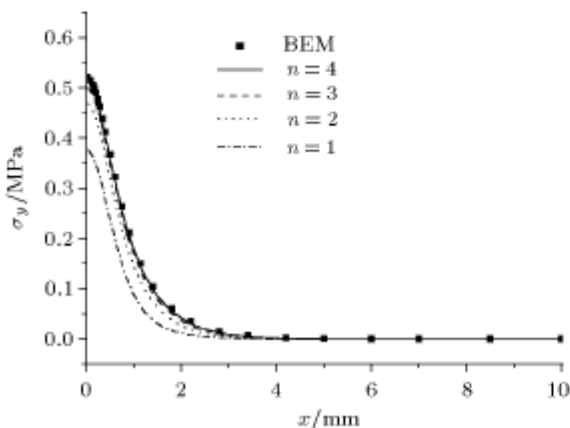


图 4 界面应力 σ_y 的分布 ($P_x = 0, P_y = 1 \text{ N/mm}$)

Fig.4 Stress distribution along the interface ($P_x = 0, P_y = 1 \text{ N/mm}$)

MIRROR POINT METHOD FOR STRESS ANALYSIS OF BONDED DISSIMILAR MATERIALS

Xu Jinquan

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract To analyze the fundamental solution of bonded dissimilar material structures, this paper has proposed an effective theoretical analysis method, based on the Dirichlet's uniqueness theorem and the mirror point technology. This method can be used to solve the problems of concentrated forces acting at the inside or at the free surface of infinite bonded dissimilar materials, by regarding the interface and the free surface as the reflection planes to the loading point. By introducing the mirror points, it is found that the whole stress function can be given as the summation of that defined under the local coordinate system fixed to each mirror point. From the interfacial condition of continuity and the free boundary condition, by adopting the Dirichlet's uniqueness theorem, then all the stress functions can be determined from that for concentrated forces acting at the inside of a infinite homogeneous media or at the free surface of a semi-infinite space. Therefore, the corresponding theoretical solution can be deduced in the closed series form of stress functions corresponding to each mirror point. If there are infinite mirror points, it is found that only the stress functions corresponding to the first several mirror points have effects on the accuracy of the solution, by the comparison of numerical and theoretical results. Such a theoretical solution can be used as the Green function to deal with the problem of distributed force, and also as the fundamental solution for boundary element method, so that it has extensive applications in engineering. Though the proposed method has been illustrated by only two examples of plane problem in this paper, it can also be used to deal with three dimensional problems. Moreover, this method can be applied not only for the case of single reflection plane, but also for the case of multiple reflection planes, which generally leads to infinite mirror points, due to the reflection after reflection.

Key words bonded dissimilar materials, interface, Dirichlet's uniqueness theorem, theoretical solution