

# 一般各向异性单侧接触界面上波的反射和折射<sup>1)</sup>

于桂兰 汪越胜 李楠

(北方交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

**摘要** 研究简谐弹性波在一般各向异性介质单侧接触界面上的反射和折射问题. 利用 Fourier 分析方法将非线性 Coulomb 摩擦接触边界波动问题化为一组代数方程. 给出了确定局部分离、滑移和粘着区的思路和方法及各区域的解; 讨论了出现界面局部分离和滑移的条件. 对特定材料组合情况进行了详细数值计算, 给出了界面力、相对滑移速度、张开位移、高频谐波的反射折射系数等特征参量; 考察了平面和反平面波动的耦合及整体滑移等. 其中关于高频谐波的结果可对已有实验结果给出很好的定性解释. 在大多数情况下, 即使对摩擦系数无穷大的粘滞接触界面, 分离区端部也总是存在一个很小的滑移区.

**关键词** 弹性波, 各向异性, 摩擦接触, 界面

## 引言

弹性波在界面上的折射和反射是许多领域 (如地震学、无损检测等) 中的基本问题之一. 有关的研究多针对界面完好粘接的情况给出, 非完好粘接情况也多限于界面力与界面位移间断成正比变化的线性模型, 很少涉及摩擦接触界面的情况<sup>[1]</sup>. 后者当入射波足够强时, 可能导致界面的局部分离和滑移, 因而是一个边界非线性问题, 数学上的求解很困难. 目前已有一些学者讨论过该问题, 如 Miller<sup>[2,3]</sup>, Comniou 和 Dundurs<sup>[4,5]</sup> 以及 Wang 等<sup>[6~9]</sup>. 但这些研究均针对各向同性介质. 本文将讨论各向异性介质的情况. 众所周知, 介质的各向异性给波传播问题带来许多新的现象<sup>[14]</sup>. 一般情况下, 各向异性介质中的体波, 其极化矢量与波传播方向既不平行也不垂直, 称为准体波. 这意味着每种体波会同时引起平面内和反平面的波动. 这将导致一些与各向同性介质不同的特性.

## 1 问题描述

如图 1, 两个各向异性半无限弹性体在  $p^\infty$  作用下相接触, 同时受剪力  $\tau_1^\infty$  和  $\tau_3^\infty$  作用.  $C_{ijkl}$  和  $\rho$  分别为弹性模量和质量密度, 上划线表示上半空间的量. 界面存在 Coulomb 摩擦, 动、静摩擦系数分别为  $f_s$  和  $f_k$ . 设任一平面准体波 (QP, QSV 或 QSH) 以  $\theta_0$  入射, 在界面上折射和反射. 图中以

$n = 0, 1, \dots, 6$  区别各种波. 设入射波位移矢量为

$$\mathbf{u}^{(0)} = \text{Re}[B_0 \mathbf{d}^{(0)} e^{ik_0(x_1 \sin \theta_0 + x_2 \cos \theta_0 - c_0 t)}] \quad (1)$$

其中  $k_0 = \omega/c_0$  为波数,  $\omega$  为圆频率;  $c_0$  为相速度;  $\mathbf{d}^{(0)}$  为极化矢量.  $c_0$  和  $\mathbf{d}^{(0)}$  由 Christoffel 方程求得<sup>[10]</sup>.

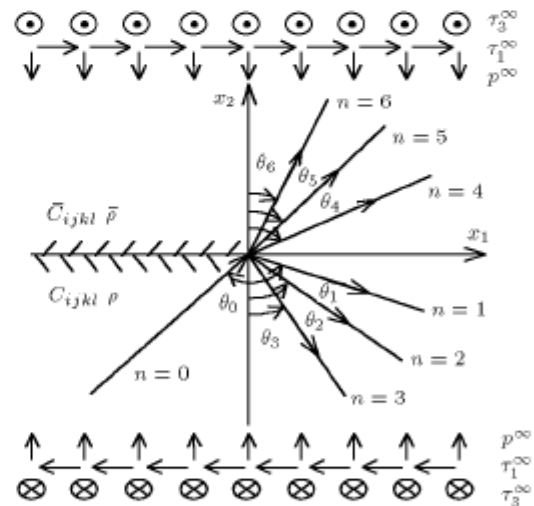


图 1 两各向异性半空间单侧接触界面上波的反射和折射  
Fig.1 Reflection and refraction of an elastic wave at a unilateral contact interface between two anisotropic half spaces

设入射波足够强, 界面会发生局部分离和滑移. 令界面力矢量为  $S(\eta)$ , 相对滑移速度为  $V_1(\eta)$  和  $V_3(\eta)$ , 张开位移为  $g(\eta)$ . 则界面上的边界条件为:

2002-10-08 收到第一稿, 2003-06-23 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (49974007) 和国家杰出青年科学基金 (10025211) 资助项目.

(1) 分离区

$$S(\eta) = 0, \quad g(\eta) > 0 \quad (2)$$

(2) 滑移区

$$S_2(\eta) < 0, \quad \sqrt{S_1^2(\eta) + S_3^2(\eta)} = f_k |S_2(\eta)| \quad (3a)$$

$$\left. \begin{aligned} g(\eta) = 0, \quad V_1(\eta)/S_1(\eta) = V_3(\eta)/S_3(\eta) \\ \text{sign}(V_j) = \text{sign}(S_j) \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

(3) 粘着区

$$S_2(\eta) < 0, \quad \sqrt{S_1^2(\eta) + S_3^2(\eta)} < f_s |S_2(\eta)| \quad (4a)$$

$$g(\eta) = 0, \quad V_1(\eta) = V_3(\eta) = 0 \quad (4b)$$

将 (3b) 和 (4b) 中的  $g(\eta) = 0$  以下式代替

$$V_2(\eta) = \dot{g}(\eta) = 0 \quad (5)$$

并保证张开位移在滑移区和粘着区消失。

同文献 [4~10] 一样, 将问题的解分解为双侧解  $\{u, \sigma\}$  (完好粘接界面的解) 加上一组修正解  $\{\tilde{u}, \tilde{\sigma}\}$ . 于是界面上的面力矢量和质点相对运动速度矢量可写为

$$S(\eta) = t^\infty + t^{(0)} + \sum_{n=1}^3 (t^{(n)} + \tilde{t}^{(n)}) = t^\infty + \sum_{n=4}^6 (t^{(n)} + \tilde{t}^{(n)}) \quad (6)$$

$$V(\eta) = \sum_{n=1}^3 [\dot{u}^{(n+3)} - \dot{u}^{(n)}]_{x_2=0} \quad (7)$$

其中  $t^{(n)} = \{\sigma_{12}^{(n)}, \sigma_{22}^{(n)}, \sigma_{23}^{(n)}\}_{x_2=0}^T$ ,  $t^\infty = \{\tau_1^\infty, -p^\infty, \tau_3^\infty\}^T$ . 完好粘接界面上的面力可写为  $A^0 \sin \eta$  的形式, 其中已设  $B_0$  (即  $A^0$ ) 为实数.  $A^0$  的求解见文献 [10], 以下求修正解.

## 2 修正解

由于非线性, 修正解可写为如下包含所有高频波成分的 Fourier 级数 [11]

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}^{(n)} = \text{Re} \left\{ A^{(n)} \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(n)} e^{imk(x_1 + p_n x_2 - vt)} \right\} \\ n = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中  $F_m^{(n)}$  为待定复系数,  $k = k_0 \sin \theta_0$ ,  $v = \omega/k$  (当  $\theta = 0^\circ$  时, 取  $k = k_0$  和  $v = c_0$  并在式 (9) 中舍去

$x_1$ ),  $A^{(n)}$  和  $p_n$  的取值以后说明. 同式 (8) 相对应的界面力矢量为

$$\tilde{t}^{(n)} = \text{Re} \left\{ -ikL^{(n)} \sum_{m=1}^{\infty} mF_m^{(n)} e^{im\eta} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, 6 \quad (9)$$

其中  $\eta = k(x_1 - vt)$ ,  $L^{(n)} = -(R^T + p_n T)A^{(n)}$ , 矩阵  $R$  和  $T$  的元素分别为  $R_{ik} = C_{i1k2}$ ,  $T_{ik} = C_{i2k2}$  (当  $n = 4, 5, 6$  时取上半空间的值).

根据 Stroh 方法 [12],  $p_n$  和  $\xi_n = \{A^{(n)}, L^{(n)}\}^T$  为如下  $6 \times 6$  的矩阵特征值和特征向量

$$N\xi_n = p_n \xi_n \quad (10)$$

其中  $N$  的具体形式参见文献 [12]. 存在某一临界值  $\hat{v}$ , 当  $v > \hat{v}$  时上式给出 6 个实特征值和特征向量, 分别对应反射和折射的平面准体波 [12], 方向角由  $\text{ctg} \theta_n = p_n$  确定, 取  $n = 1, 2, 3$  为下半空间的反射波,  $n = 4, 5, 6$  为上半空间的折射波. 对应  $\hat{v}$  的入射角  $\theta_0$  称为临界角, 本文只考虑小于临界角入射 (即  $v > \hat{v}$ )  $k = k_0, v = c_0$  的情况.

引入  $A = (A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ ,  $L = (L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(3)})$ ,  $F_m = (F_m^{(1)}, F_m^{(2)}, F_m^{(3)})^T$ , 另记  $\bar{A}, \bar{L}, \bar{F}_m$  同上, 但将 1, 2, 3 分别换为 4, 5, 6. 令  $F_m = D_m + iE_m$ , 其中  $D_m$  和  $E_m$  为实阵. 利用界面力连续条件, 由式 (6), 式 (7), 式 (10) 和式 (11) 并考虑整体滑移得

$$S(\eta) = t^\infty + A^0 \sin \eta + kL \sum_{m=1}^{\infty} m(D_m \sin m\eta + E_m \cos m\eta) \quad (11)$$

$$V(\eta) = U + kvB \sum_{m=1}^{\infty} m(D_m \sin m\eta + E_m \cos m\eta) \quad (12)$$

其中  $B = \bar{A}\bar{L}^{-1}L - AI$  ( $I$  为  $3 \times 3$  单位阵),  $U$  为整体相对运动速度矢量, 其中  $U_2 = 0$ . 由式 (12) 得

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(\xi) d\xi \quad (13)$$

$$\{D_m, E_m\} = \frac{B^{-1}}{\pi k v m} \int_{-\pi}^{\pi} V(\xi) \{\sin m\xi, \cos m\xi\} d\xi \quad (14)$$

联合式 (11) 和式 (12) 得

$$S(\eta) = t^\infty + A^0 \sin \eta - \lambda \{\hat{V}(\eta) - \hat{U}\} \quad (15)$$

其中  $\lambda = (c_0/v)C_e^{-1}LB^{-1}$ ,  $\{\hat{V}, \hat{U}\} = (C_e/c_0)\{V, U\}$  ( $C_e$  为  $C_{ijkl}$  中任一非零值). 对一般各向异性介质,  $\lambda$  是对称满阵. 为方便, 以下将使用分量形式讨论不同区间方程的求解.

2.1 分离区的解

由分离区表面应力为零的条件得

$$\hat{V}_i(\eta) - \hat{U}_i = \lambda_{ij}^{-1} [\tau_j^\infty + A_j^0 \sin \eta] \quad (16)$$

其中双重下标表示 1~3 求和 (下同),  $\lambda_{ij}^{-1}$  为  $\lambda^{-1}$  的元素 (下同). 张开位移为

$$g(\eta) = -(k_0 c_0)^{-1} \int V_2(\eta) d\eta = (k_0 C_e)^{-1} [\lambda_{2j}^{-1} (-\tau_j^\infty \eta + A_j^0 \cos \eta) - L] \quad (17)$$

其中  $L$  由分离区端部张开位移为零确定. 若记分离区为  $(\delta_1, \delta_2)$ , 则

$$L = \lambda_{2j}^{-1} (-\tau_j^\infty \delta_i + A_j^0 \cos \delta_i), \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

由于问题的周期性, 故可在  $-\pi \leq \eta \leq \pi$  内讨论问题的解. 分离区  $(\delta_1, \delta_2)$  应由两个条件确定: 在分离区内  $g(\eta) > 0$ , 在分离区外  $S_2(\eta) < 0$ . 先考虑前者, 仿照文献 [9] 中的分析, 当  $-\lambda_{2j}^{-1} \tau_j^\infty > 0$  时, 分离区在前端  $\delta_2$  光滑分离, 有

$$\sin \delta_2 = -\lambda_{2j}^{-1} \tau_j^\infty / \lambda_{2j}^{-1} A_j^0, \quad \delta_2 > \pi/2 \quad (19)$$

尾端  $\delta_1$  则由式 (18) 确定; 当  $-\lambda_{2j}^{-1} \tau_j^\infty < 0$  时, 分离区在尾端  $\delta_1$  光滑闭合, 有

$$\sin \delta_1 = -\lambda_{2j}^{-1} \tau_j^\infty / \lambda_{2j}^{-1} A_j^0, \quad \delta_1 < \pi/2 \quad (20)$$

前端  $\delta_2$  则由式 (18) 确定. 由此确定的分离区还需验证是否满足后一个条件, 为此需求得滑移区和粘着区的解.

2.2 滑移区的解

由非线性摩擦定律 (3) 得

$$\sum_{i=1,3} \{\tau_i^\infty + A_i^0 \sin \eta - \lambda_{i1} [\hat{V}_1 - \hat{U}_1] - \lambda_{i3} [\hat{V}_3 - \hat{U}_3]\}^2 = f_k^2 \{-p^\infty + A_2^0 \sin \eta - \lambda_{21} [\hat{V}_1 - \hat{U}_1] - \lambda_{23} [\hat{V}_3 - \hat{U}_3]\}^2 \quad (21)$$

$$\{\tau_1^\infty + A_1^0 \sin \eta - \lambda_{11} [\hat{V}_1 - \hat{U}_1] - \lambda_{13} [\hat{V}_3 - \hat{U}_3]\} / \hat{V}_1 = \{\tau_3^\infty + A_3^0 \sin \eta - \lambda_{31} [\hat{V}_1 - \hat{U}_1] - \lambda_{33} [\hat{V}_3 - \hat{U}_3]\} / \hat{V}_3 \quad (22)$$

若将  $\hat{U}_1$  和  $\hat{U}_3$  作为已知量, 则可将上述两方程化为关于  $\hat{V}_1$  或  $\hat{V}_3$  的 4 次方程, 借助 Ferrari 方法 [8,9] 可求解. 但实际  $\hat{U}_1$  和  $\hat{U}_3$  是未知的, 由式 (12) 确定, 因而求得  $\hat{V}_1$  和  $\hat{V}_3$  的封闭解是不可能的, 作者将利

用文献 [9] 中给出一种迭代方法求数值解, 为此必须先确定滑移区. 设  $(\alpha_j, \beta_j)$  为一滑移区, 则尾端  $\alpha_j$  由下式确定

$$\sum_{i=1,3} (\tau_i^\infty + A_i^0 \sin \alpha_j + \lambda_{i1} \hat{U}_1 + \lambda_{i3} \hat{U}_3)^2 = f_k^2 \{-p^\infty + A_2^0 \sin \alpha_j + \lambda_{21} \hat{U}_1 + \lambda_{23} \hat{U}_3\}^2 \quad (23)$$

前端  $\beta_j$  也满足类似的公式, 但需将  $f_k$  以  $f_s$  代替. 一般有  $f_s \geq f_k$ , 这将导致力和相对滑移速度在前端  $\beta_j$  处间断. 为简便, 本文假设  $f_s = f_k$ , 于是  $\alpha_j$  和  $\beta_j$  均可由式 (23) 确定, 并可解得

$$\sin \alpha_j = \sin \beta_j = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} \triangleq \theta^\pm, \quad a \neq 0 \quad (24)$$

$$\sin \alpha_j = \sin \beta_j = -\frac{c}{2b} \triangleq \theta, \quad a = 0 \quad (25)$$

其中

$$\Delta = b^2 - ac, \quad a = (A_1^0)^2 + (A_3^0)^2 - f_k^2 (A_2^0)^2$$

$$b = A_1^0 (\tau_1^\infty + \lambda_{11} \hat{U}_1 + \lambda_{13} \hat{U}_3) + A_3^0 (\tau_3^\infty + \lambda_{31} \hat{U}_1 + \lambda_{33} \hat{U}_3) - f_k^2 A_2^0 \{-p^\infty + \lambda_{21} \hat{U}_1 + \lambda_{23} \hat{U}_3\}$$

$$c = (\tau_1^\infty + \lambda_{11} \hat{U}_1 + \lambda_{13} \hat{U}_3)^2 + (\tau_3^\infty + \lambda_{31} \hat{U}_1 + \lambda_{33} \hat{U}_3)^2 - f_k^2 \{-p^\infty + \lambda_{21} \hat{U}_1 + \lambda_{23} \hat{U}_3\}^2$$

为了具体确定滑移区的位置和大小 (即  $\alpha_j$  和  $\beta_j$  的确切值), 需要对分离、滑移和粘着区可能的排列进行预测, 这里是参考文献 [9] 的思路. 不失一般性, 设  $A_2^0 > 0$  且  $-\lambda_{2j}^{-1} \tau_j^\infty > 0$ , 图 2 给出了一个典型周期内 3 种区域 (如果都存在的话) 的可能排列, 据此由式 (24) 得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 = \pi - \beta_2 = \arcsin \theta^+ \\ \beta_1 = \pi - \alpha_1 = \arcsin \theta^- \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

当  $a = 0$  时, 由式 (25) 得:  $\alpha_2 = \pi - \beta_2 = \arcsin \theta$ , 此时滑移区  $(\alpha_1, \beta_1)$  不存在. 值得注意的是式 (26) 在以下情况下无合理解:

- 1) 当  $\theta^+ > 1$  (或  $\theta > 1$ ) 时, 界面不发生分离和滑移.
- 2) 当  $\theta^+ \leq -1$  (或  $\theta \leq -1$ ) 时, 粘着区消失, 整个界面处于滑移, 并可能伴有局部分离.

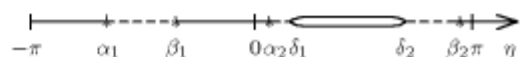


图 2 分离、滑移和粘着区可能的排列

Fig.2 Possible arrangement of separation, slip and stick zones

3) 当  $\theta^- < -1$  时, 滑移区  $(\alpha_1, \beta_1)$  消失.

4) 当  $\Delta = 0$  时, 有  $\theta^+ = \theta^-$ , 即  $\alpha_2 = \beta_1$ . 这说明两个滑移区刚好连接在一起, 整个界面上无粘着. 当  $\Delta < 0$  时, 整个界面全处于滑移, 并可能伴有局部分离.

以上预测结果需满足界面条件 (4a) 和 (4b), 这只能在具体计算时才能检验.

2.3 粘着区的解

在粘着区内, 张开位移和相对滑移速度为零, 界面力为

$$S_i(\eta) = \tau_i^\infty + A_i^0 \sin \eta + \lambda_{ij} \hat{U}_j \quad (27)$$

3 数值算例与分析

为了给出具体计算结果和讨论分析, 考虑一个特例——两相同材料的接触半无限体. 由于一般各向异性体的材料常数太多, 不便讨论, 只能选取某种具体的材料, 如锌. 此为六方晶系, 材料常数见文献 [14]. 设材料主轴在  $x_2x_3$  平面内并与  $x_3$  轴成夹角  $\varphi$ , 计算中取  $\varphi = 45^\circ$ . 入射波设为 QP 波, 入射角  $\theta_0 = 30^\circ$ . 考虑  $\tau_1^\infty = \tau_3^\infty = 0$  的情况.

图 3 给出了  $f_k = 0.1$  时, 一个周期内的界面力、张开位移和相对滑移速度的分布, 其中虚线、实线和点线分别对应  $p^\infty/A_2^0$  为 0.7, 2.0 和 4.0. 界面力和

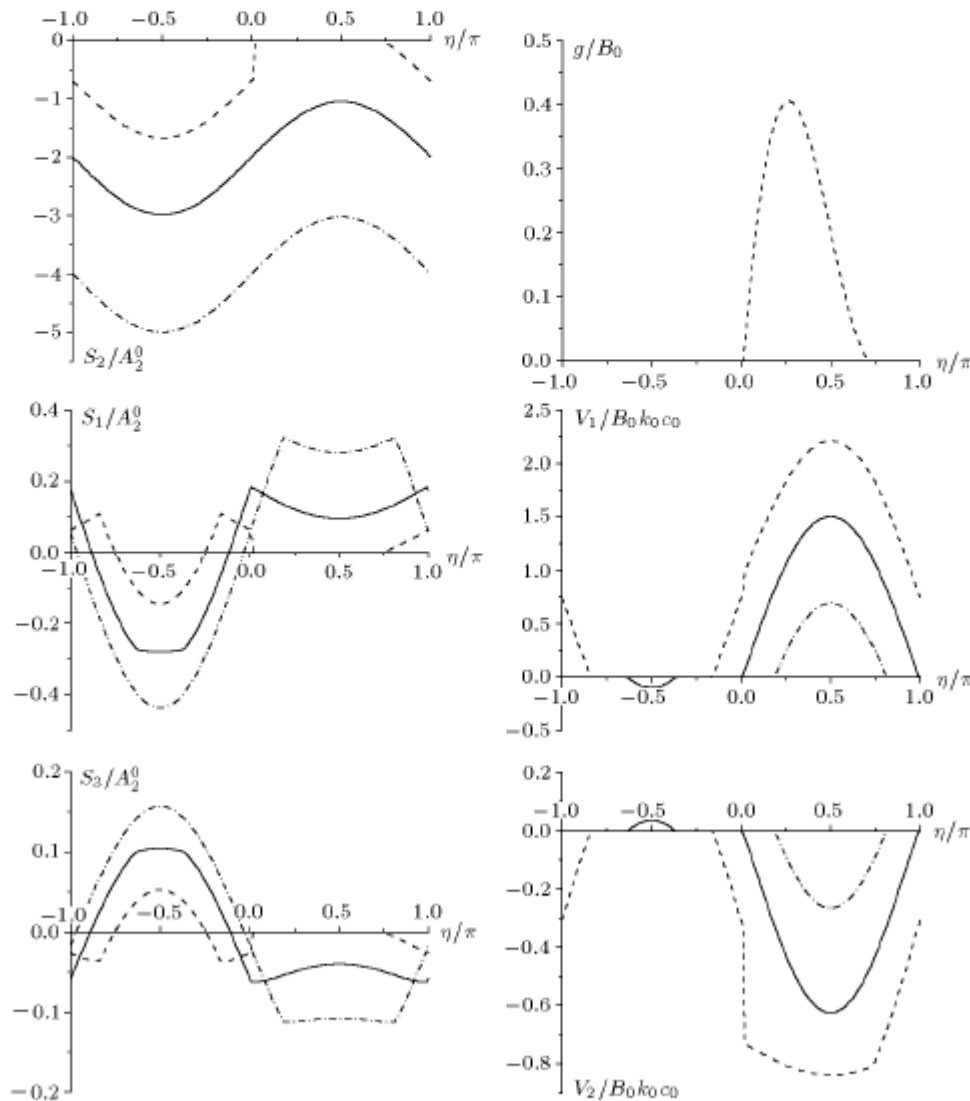


图 3 界面剪力、张开位移和相对滑移速度

Fig.3 Distribution of the interface traction, gaps and relative slip velocities

相对滑移速度在分离区尾端有间断, 在前端连续但不光滑. 图中显示界面正向面力在分离区前端为零, 而在分离区以外为负. 这说明分离区完全可以由条件  $g(\eta) > 0$  确定.

图 4 绘出  $f_k = 0.1$  和  $f_k = 0.2$  时对应不同  $p^\infty/A_2^0$  值滑移区 (SL1 和 SL2) 和分离区 (SE) 的大小和分布, 可以看出如下特点: 1) 对  $f_k = 0.1$ , 当  $p^\infty/A_2^0$  在 0.87 和 3.28 之间时, 在  $\eta = -\pi/2$  附近存在一滑移区 (SL1); 但对较大的  $f_k$ , 该滑移区不存在. 2) 对较小的  $p^\infty/A_2^0$  值, 分离区尾端没有滑移区相连. 3) 摩擦系数  $f_k$  对分离区影响不大.

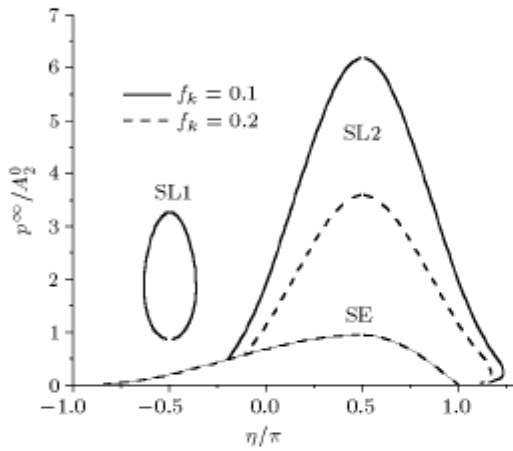


图 4 分离区和滑移区随  $p^\infty/A_2^0$  的变化  
Fig.4 Extent and location of the separation and slip zones for given  $p^\infty/A_2^0$

图 5 给出了整体滑移速度随  $p^\infty/A_2^0$  的变化. 随着  $p^\infty/A_2^0$  的减小, 整体滑移速度增大并在  $p^\infty/A_2^0 = 0.4$  附近达到峰值, 然后减小至零.

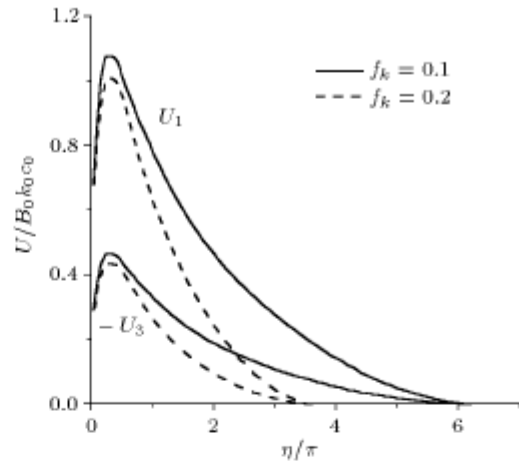


图 5 整体滑移速度随  $p^\infty/A_2^0$  的变化  
Fig.5 Dependence of the global sliding velocities on  $p^\infty/A_2^0$

下面讨论折反射系数. 对于本特例, 当界面无分离和滑移时, 两个接触体如同一均匀介质, 不存在反射折射波. 当界面发生局部分离和滑移时, 就会产生各种反射折射波, 且由于非线性, 所有波都包含高频谐波. 图 6 给出了  $f_k = 0.1$  时第 1 和第 2 频率波的折反射系数随  $p^\infty/A_2^0$  的变化. 当  $p^\infty/A_2^0 > 6.2$ , 只有第 1 频率的透射 QP 波 ( $n = 4$ ), 即入射 QP 波 ( $n = 0$ ). 随着  $p^\infty/A_2^0$  的减小, 所有折反射系数都增加, 直到局部分离发生. 此后, 第 1 和第 2 频率的波将表现出非常不同的特性. 其中对第 2 频率的波, 所有折反射系数均随  $p^\infty/A_2^0$  的减小先降低再增大, 达到一峰值后再减小直至零. 这一特征已被 Solodov 的实验发现<sup>[15]</sup>. 高频谐波的这些特征已在无损检测技术中得到应用<sup>[15,16]</sup>.

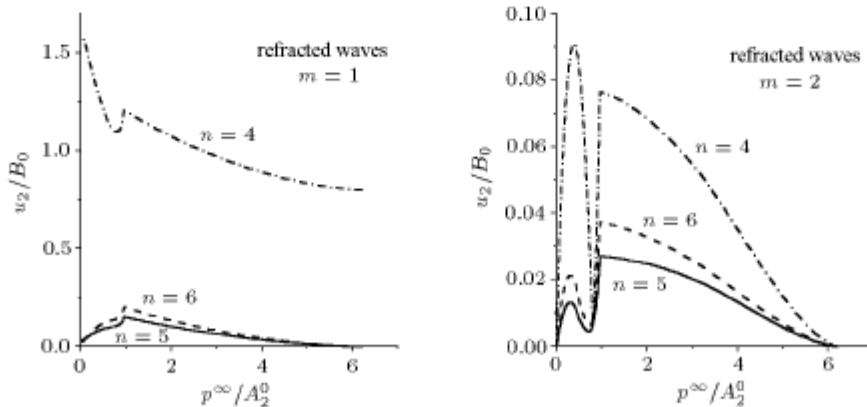


图 6 第 1, 第 2 频率折反射波的系数随  $p^\infty/A_2^0$  的变化  
Fig.6 Refraction/reflection coefficients of the normal displacements versus  $p^\infty/A_2^0$  for the first and second wave modes

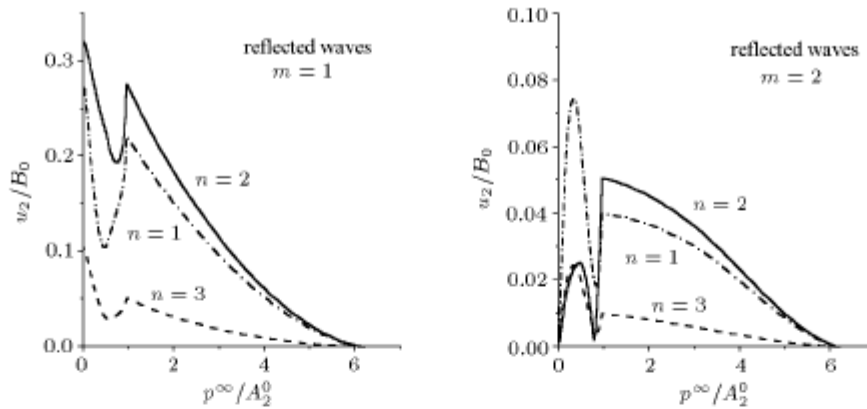


图 6 第 1, 2 频率折反射波的系数随  $p^\infty/A_2^0$  的变化 (续)  
 Fig.6 Refraction/reflection coefficients of the normal displacements versus  $p^\infty/A_2^0$  for the first and second wave modes (continued)

最后考虑摩擦系数为无限大的粘滞接触情况. 这种极限情况的解可用两种方法求得, 方法 I 是由上述一般情况下的解求  $f_k \rightarrow \infty$  时的极限解, 由式 (24)~(26) 得

$$\alpha_2 = \pi - \beta_2 = \arcsin[(p^\infty - \lambda_{21}\hat{U}_1 - \lambda_{23}\hat{U}_3)/A_2^0] \quad (28)$$

另一滑移区  $(\alpha_1, \beta_1)$  不存在. 分离区  $(\delta_1, \delta_2)$  及其解仍如 2.1 节所给. 注意, 如果  $\beta_2 > \delta_2$ , 则分离区前端将有一滑移区  $(\delta_2, \beta_2)$ ; 如果  $\alpha_2 > \delta_1$ , 分离区后端将有一滑移区  $(\alpha_2, \delta_1)$ . 但在这些可能的滑移区内, 正向面力应为零, 因为  $f_k|S_2|$  有限. 而其中的剪力则可通过前述的迭代方法获得. 方法 II 则假设界面不会发生局部滑移, 此时分离区的解仍由 2.1 节给出, 而整体蠕滑速度可由式 (16) 和式 (13) 求得

$$\hat{U}_i = \frac{\lambda_{ij}^{-1}[(\delta_2 - \delta_1)\tau_j^\infty + (\cos \delta_1 - \cos \delta_2)A_j^0]}{2\pi - (\delta_2 - \delta_1)} \quad (29)$$

式中  $i = 1, 3$ . 在分离区以外的正向界面力为

$$S_2(\eta) = -p^\infty + A_2^0 \sin \eta + \lambda_{21}\hat{U}_1 + \lambda_{23}\hat{U}_3 \quad (30)$$

显然上式在由式 (28) 确定的  $\alpha_2$  和  $\beta_2$  处为零, 但  $\beta_2$  并不一定等于  $\delta_2$ . 在此我们仍然面临与 2.1 节同样的问题, 即  $(\delta_1, \delta_2)$  以外是否能保证  $S_2(\eta) < 0$ ? 如果不能, 将得到一个不合理的解. 为了检验上述两种解答的合理性, 考查  $\delta_2$  附近的行为. 图 7 给出了  $p^\infty/A_2^0 = 0.7$  时  $\delta_2$  附近的界面力和相对滑移速度, 其中  $\beta_2$  由式 (30) 求得. 实线为方法 II 的结果, 虚线为方法 I 令  $f_k = 1000$  获得的近似结果. 可以看到实

线在  $\delta_2$  处间断, 而虚线则连续. 方法 II 给出的正向界面力在  $(\delta_2, \beta_2)$  内为正, 解不合理. 方法 I 则显示  $(\delta_2, \beta_2)$  是一滑移区, 其中正向界面力为零. 可见方法 I 给出的解是合理的. 这个特殊的滑移区很小, 在此区以外两个方法给出的解很接近. 对于两个相同的各向同性接触体, 没有这样的滑移区 [13].

### 4 结 论

- (1) 由于界面的局部分离和滑移及平面和反平面波动的非线性耦合作用, 反射折射波波均发生了畸变, 与入射波波大不相同, 这说明有高频谐波产生. 该现象反映了本问题的非线性特性.
- (2) 整体滑移可以在很低的外加剪力的作用下以蠕动的方式发生.

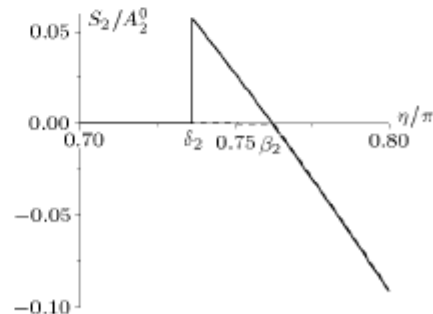


图 7 粘滞接触极限情况下分离区前端附近界面力和相对滑移速度的分布  
 Fig.7 Distribution of the interface traction and relative slip velocities near the leading edge of the separation zone for the limiting case of adhesive contact

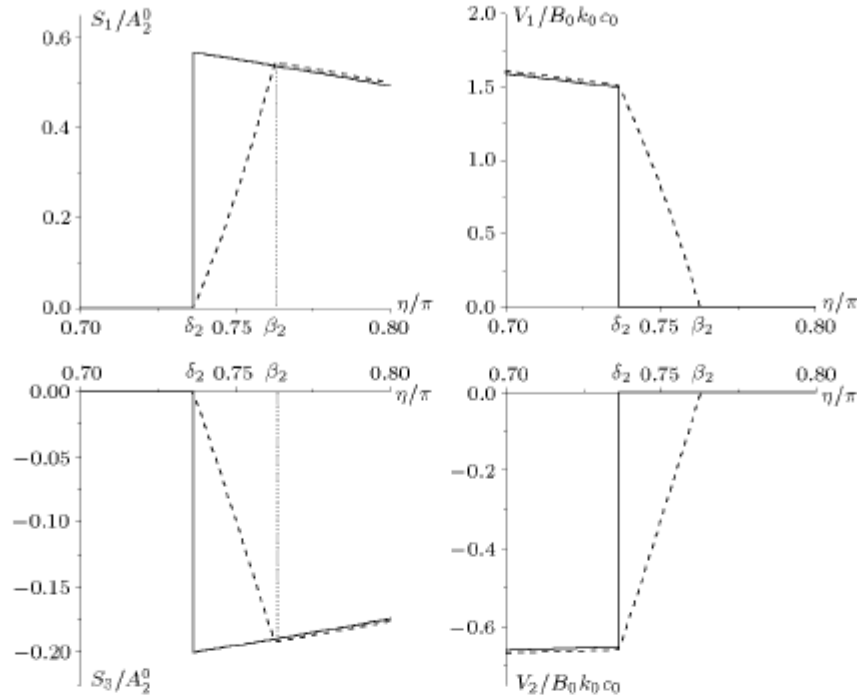


图 7 粘滞接触极限情况下分离区前端附近界面力和相对滑移速度的分布 (续)

Fig.7 Distribution of the interface traction and relative slip velocities near the leading edge of the separation zone for the limiting case of adhesive contact (continued)

(3) 界面分离与摩擦系数  $f_k$  无关, 分离区大小和分布受外加剪力的影响也小, 且可完全由与张开位移  $g(\eta)$  相关的条件确定.

(4) 所有的参量在分离区的一个端部连续, 而在另一端间断.

(5) 界面发生局部分离、局部滑移和刚性滑移的条件分别为 (设  $A_2^0 > 0$ )

$$p^\infty/A_2^0 \leq 1 + \sum_{i=1,3} (\lambda_{2i}^{-1}/\lambda_{22}^{-1})(A_i^0/A_2^0 + 1) \quad (31)$$

$$p^\infty/A_2^0 \leq 1 + f_k^{-1} \sqrt{\sum_{i=1,3} (\tau_i^\infty/A_i^0 + 1)^2 (A_i^0/A_2^0)^2} \quad (32)$$

$$p^\infty/A_2^0 \leq f_k^{-1} \sqrt{\sum_{i=1,3} (\tau_i^\infty/A_i^0)^2 (A_i^0/A_2^0)^2} \quad (33)$$

(6) 分离区前端总是连接着一个滑移区. 即使在粘滞接触的情况下, 也存在一个很小的滑移区, 其存在性取决于参数矩阵  $\lambda^{-1}$ , 当其元素  $\lambda_{21}^{-1} = \lambda_{23}^{-1} = 0$  时不存在.

参 考 文 献

1 汪越胜, 于桂兰, 章梓茂等. 复杂界面 (界面层) 条件下的弹性波传播问题研究综述. 力学进展, 2000, 30(3): 378~390(Wang Yuesheng, Yu Guilan, Zhang Zimao, et al. Review on

elastic wave propagation under complex interface (interface layer) conditions. *Advances in Mechanics*, 2000, 30(3): 378~390 (in Chinese))  
 2 Tran HT, Miller RK. Reflection, refraction and absorption of elastic waves at a frictional interface: SH motion. *J Appl Mech*, 1979, 46: 625~630  
 3 Miller RK, Tran HK. Reflection, refraction and absorption of elastic waves at a frictional interface: P and SV motion. *J Appl Mech*, 1981, 48: 155~160  
 4 Comninou M, Dundurs J. Reflexion and refraction of elastic waves in presence of separation. *Proc Roy Soc London*, 1977, A356: 509~528  
 5 Comninou M, Dundurs J. Interaction of elastic waves with a unilateral interface. *Proc Roy Soc London*, 1979, A368: 141~154  
 6 Wang YS, Yu GL, Gai BZ. Propagation of SH waves in a layered half-space with a frictional contact interface. *Bull Seism Soc Am*, 1998, 88: 1300~1310  
 7 Wang YS, Yu GL. Transmission of SH waves through an elastic layer between two solids with frictional contact interface. *J Appl Mech*, 1999, 66: 729~737  
 8 Wang YS, Yu GL, Gai BZ. Re-polarization of elastic waves at a frictional contact interface Part I: Incidence of an SH wave. *Int J Solids Structures*, 1998, 35: 2002~2021  
 9 Wang YS, Yu GL. Re-polarization of elastic waves at a frictional contact interface Part II: Incidence of a P or SV wave. *Int J Solids Structures*, 1999, 36: 4563~4586  
 10 Nayfeh AH. *Wave Propagation in Layered Anisotropic Media*. Elsevier Publishing, Netherlands, 1995

- 11 Wang YS, Yu GL, Qu JM. Subsonic slip waves along the interface between two anisotropic elastic half-spaces in sliding contact with separation. *Int J Eng Science*, 2003, 41: 1785~1798
- 12 Lothe J. Body waves in anisotropic elastic media. In: Wu JJ, Ting TCT, Barnett DM. *Modern Theory of Anisotropic Elasticity and Applications*, SIAM, Philadelphia, 1991. 199~214
- 13 Kern GA, Kern GM. *Handbook of Mathematics*, New York: McGraw-Hill, 1974
- 14 Brandes EA. *Smithells Metals Reference Book*, the 6th Edition, Bodmin, Cornwall, Robert Hartnoll Ltd, 1983
- 15 Solodov IY. Ultrasonics of non-linear contacts: Propagation, reflection and NDE-applications. *Ultrasonics*, 1998, 36: 383~390
- 16 Donskoy D, Sutin A, Ekimov A. Nonlinear acoustic interaction on contact interfaces and its use for nondestructive testing. *NDT & E Int*, 2001, 34: 231~238

## REFLECTION AND REFRACTION OF ELASTIC WAVES AT A UNILATERAL CONTACT INTERFACE BETWEEN TWO GENERALLY ANISOTROPIC MEDIA <sup>1)</sup>

Yu Guilan Wang Yuesheng Li Nan

(School of Civil Engineering, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract** Reflection and refraction of harmonic elastic waves at a unilateral frictional contact interface is studied theoretically in this paper. The analysis is presented for generally anisotropic media but limited in the case of sub-critical angle incidence. The incident quasi-body wave is assumed strong enough such that the local separation and frictional slip may take place at the interface. Since the regions of the separation and slip are unknown as a part of the solution, the boundary value problem is indeed a nonlinear one. The displacements are expressed as Fourier series with all higher harmonics. Then Stroh formalism is used to derive the local relationship between interface tractions and relative velocities. Finally the considered nonlinear wave problem with unilateral Coulomb frictional boundaries is cast to a set of algebraic equations with simple form. Solutions in different zones are discussed. The conditions for the appearance of the local separation and slip on the interface are discussed. An iterative method is developed to determine the separation, slip and stick zones. Detailed computation is conducted for a particular material combination. The numerical results of the interface tractions, relative slip velocities, gap and reflection/refraction coefficients for lower- and higher-frequency wave modes are presented. The globe sliding and the coupling interaction between anti- and in-plane wave motions are examined. The results for harmonic generations can give qualitative explanation to some experiments. Moreover, it is found that there always exists a small slip zone connecting to the separation zone for most material combinations, even for the limiting case of unilateral adhesive contact interface with an infinite friction coefficient.

**Key words** elastic wave, anisotropy, friction contact, interface

---

Received 8 October 2002, revised 23 June 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (49974007) and the National Science Fund for Distinguished Young Scholars (10025211).