

动态断裂力学的无限相似边界元法

程玉民

嵇 醒 贺鹏飞

(上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072) (同济大学工程力学与技术系, 上海 200092)

摘要 对弹性动力学的相似边界元法进行了进一步研究, 推导了相应的计算公式, 并在此基础上提出了动态断裂力学的无限相似边界元法. 与传统的边界元法相比, 相似边界元法由于只需在少数单元上进行数值积分, 大大减少了计算量. 对动态断裂力学问题, 无限相似边界元法由于在裂纹尖端的边界上设置了逼近于裂纹尖端的无限个相似边界单元, 可直接得到裂纹尖端具有奇异性的应力, 而不需要设置奇异单元, 从而突破了奇异单元对应力奇异性阶次的局限. 另外, 还讨论了无限相似边界元法得到的无限阶的线性代数方程组的求解方法.

关键词 无限相似边界元法, 弹性动力学, 动态应力强度因子

引 言

在边界元法中, 要建立最终可求解的代数方程组, 需要在单元上进行大量的数值积分. 当单元数目较多时, 单元上数值积分的计算量将耗费大量计算时间.

在有限元法的研究中, 文献 [1~4] 讨论了单元相似时, 相似单元之间单元刚度矩阵的相等关系, 分别被称为分形有限元法和无限元法.

在边界元法中, 若能建立相似单元之间相应矩阵的关系, 可以减少大量的积分运算. 本文作者在文献 [5] 中提出了相似边界元法, 但得出的相似边界单元上矩阵的比例关系较为简单, 当边界单元组跨度较大时容易产生误差. 本文在文献 [5] 的基础上, 较为详细地讨论了弹性动力学的相似边界元法. 对相似边界元进行了分类, 讨论了各类相似边界元的性质; 提出了相似边界单元组中单元上矩阵的插值方法, 有效地解决了文献 [5] 方法误差较大的问题, 提高了相似边界元法的精度. 这样, 在一组相似单元中, 只要求得少数几个单元的相应矩阵, 通过插值方法即可求得其它单元的相应矩阵, 然后通过叠加建立线性代数方程组的系数矩阵. 与通常的每个单元都各自进行积分计算相比, 本文方法可大幅度减少计算量.

为了求解动态断裂力学问题, 本文提出了无限相似边界元法. 无限相似边界元法是将问题所在域的边界划分为若干子域, 在裂纹尖端的边界上设置了逼近于裂纹尖端的无限个相似边界单元, 其它子

域设置有限个相似边界单元. 无限相似边界元法可直接得到裂纹尖端具有奇异性的应力, 而不需要设置奇异单元, 从而突破了奇异单元对应力奇异性阶次的局限. 另外, 由于无限相似边界元法中边界单元和节点的数目为无限大, 最终形成的线性代数方程组为无限阶的, 本文还讨论了此无限阶的线性代数方程组的求解方法.

1 弹性动力学的边界元法^[6]

对弹性动力学的基本方程进行 Laplace 变换, 得到 Laplace 变换域中的基本方程. 在 Laplace 变换域中应用边界元法进行求解, 然后应用数值 Laplace 反变换即得时间域中的解.

为方便起见, 我们假设初始条件和体力均为零. 这样, 由加权残数法可得弹性动力学问题在 Laplace 变换域中的边界积分方程

$$C_{ji}(q)U_i(q) = \int_{\Gamma} U_{ji}^*(p, q)T_i(p)d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ji}^*(p, q)U_i(p)d\Gamma \quad (1)$$

其中, Γ 为弹性动力学问题所在域 Ω 的边界, q 为边界点 (源点), p 为场点, U_i 和 T_i 分别为 i 方向的位移和面力分量, $C_{ji}(q)$ 为自由项, U_{ji}^* 和 T_{ji}^* 为基本解.

在边界 Γ 上划分单元, 则边界积分方程 (1) 可离散为:

对二维问题

$$C_{ji}(q^k)U_i(q^k) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M T_i^{mn}(p) \int_{-1}^{+1} U_{ji}^*(p, q^k) N_m(\xi) J(\xi) d\xi - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M U_i^{mn}(p) \int_{-1}^{+1} T_{ji}^*(p, q^k) N_m(\xi) J(\xi) d\xi \quad (i, j = 1, 2) \quad (2a)$$

对三维问题

$$C_{ji}(q^k)U_i(q^k) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M T_i^{mn}(p) \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} U_{ji}^*(p, q^k) \cdot N_m(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M U_i^{mn}(p) \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} T_{ji}^*(p, q^k) \cdot N_m(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2b)$$

其中 N 为边界单元数, 每个单元均为含 M 个节点的等参单元, 边界节点总数为 $K, k = 1, 2, \dots, K; U_i^{mn}$ 和 T_i^{mn} 分别表示第 n 个单元第 m 个节点的 i 方向的位移和面力; $N_m(\xi)$ 和 $N_m(\xi, \eta), m = 1, 2, \dots, M$ 分别为二维和三维边界单元的形函数; $J(\xi)$ 和 $J(\xi, \eta)$ 为 Jacobi 行列式.

对离散形式的边界积分方程 (2) 进行数值求解, 即得变换域中边界节点的位移和面力分量.

将方程 (2) 写成矩阵形式

$$C(q^k)U(q^k) = \sum_{n=1}^N G_n^{(k)} T_n - \sum_{n=1}^N H_n^{(k)} U_n \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (3)$$

其中 $U(q^k) = U_i(q^k), i = 1, 2$ 或 $i = 1, 2, 3$ 为源点 q^k 的位移向量; $U_n = \{U_m^n\}, m = 1, 2, \dots, M$ 为单元 n 的节点位移向量; $T_n = \{T_m^n\}, m = 1, 2, \dots, M$ 为单元 n 的节点面力向量; $C(q^k)$ 为自由项矩阵; $G_n^{(k)}$ 和 $H_n^{(k)}$ 分别为与 T_n 和 U_n 对应的系数矩阵.

进一步, 方程 (3) 可写为

$$(C + H)U = GT \quad (4)$$

其中 $U = U_k, k = 1, 2, \dots, K$ 为节点位移向量; $T = T_k, k = 1, 2, \dots, K$ 为节点面力向量; H, G 是

分别由 $H_n^{(k)}, G_n^{(k)}$ 组装而成的对应于 U 和 T 的系数矩阵; C 为自由项矩阵.

2 相似边界元法

在方程 (4) 中 H 和 G 是分别由 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$ 组装而成的. 要求得 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$, 需要做大量的如下形式的积分

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} T_{ji}^*(p, q^k) N_m(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ \text{或} & \int_{-1}^{+1} T_{ji}^*(p, q^k) N_m(\xi) J(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} U_{ji}^*(p, q^k) N_m(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ \text{或} & \int_{-1}^{+1} U_{ji}^*(p, q^k) N_m(\xi) J(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

为减少形如 (5) 和 (6) 的积分的计算量, 本文对文献 [5] 的方法进行了改进, 系统地论述了相似边界元法. 相似边界元法 (similar boundary element method, 即 SBEM) 的基本思想是, 将弹性体所在的区域 Ω 的边界 Γ 按照边界条件或几何形状划分为若干边界子域, 然后将每个边界子域剖分为若干相似 (或均匀) 单元, 对离散形式的边界积分方程 (10) 建立相似单元上矩阵 $H_n^{(k)}$ 及 $G_n^{(k)}$ 的关系. 在一组相似单元中, 只要求得某几个单元上的 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$, 其它单元上的 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$ 即可由插值关系得到而不需再做积分运算.

2.1 相似边界单元及其性质

将所划分的每一个边界子域剖分为一组相似单元, 每一组相似单元中各单元具有相同的边界条件和几何形状. 下面根据相似单元的不同情况对其性质分别进行讨论.

1) 比例单元

将一边界子域剖分为一组节点坐标成比例关系的相似单元, 即 $x_{ij}^n = \alpha x_{ij}^{n-1}$. 其中对二维问题, $j = 1, 2$, 对三维问题, $j = 1, 2, 3; x_{ij}^n$ 为此边界子域中第 n 个单元的第 i 个节点的 x_j 方向的坐标, α 为比例常数. 这样, 对二维问题, $J_n = \alpha J_{n-1}$; 对三维问题, $J_n = \alpha^2 J_{n-1}$.

2) 平移单元

均匀网格可看作是由其中某个单元经过平移而得到的, 即 $x_{ij}^n = x_{ij}^m + a_j$. 其中 a_j 为常数. 这样可得 $J_n = J_m$.

2.2 相似边界单元上 $H_n^{(k)}$ 及 $G_n^{(k)}$ 的关系

2.2.1 比例单元

本文提出如下的插值方法来计算单元上的 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$. 在一边界子域 (或一组相似单元) 中, 可通过数值积分来求其中少数几个单元上的 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$, 并将这些单元上的 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$ 看作各自单元中点坐标的函数, 其它单元上的 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$ 以各单元中点为自变量通过线性或非线形插值方法得到.

在采用插值方法时, 通常采用的插值函数是多项式或样条函数. 采用多项式作为插值函数时, 一般采用一次多项式或二次多项式. 对二维问题, 若采用一次多项式

$$P(x) = a + a_1x \quad (7)$$

则在此边界子域中需要通过数值积分计算两个单元的 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$, 比如第 i 个单元和第 j 个单元, 即 $H_i^{(k)}, G_i^{(k)}, H_j^{(k)}$ 和 $G_j^{(k)}$, 这样有

$$H_m^{(k)} = H_i^{(k)} + \frac{H_j^{(k)} - H_i^{(k)}}{x^j - x^i}(x^m - x^i) \quad (8)$$

$$G_m^{(k)} = G_i^{(k)} + \frac{G_j^{(k)} - G_i^{(k)}}{x^j - x^i}(x^m - x^i) \quad (9)$$

其中 x^i, x^j 和 x^m 分别为第 i, j 和 m 个单元的中点在 x_1 (或 x_2, x_3) 方向上的坐标. 如果此边界子域与坐标轴方向不一致, 则此处的 x^i, x^j 和 x^m 可用单元中点和第 1 个单元中点的距离来代替.

对二维问题, 若采用二次多项式

$$P(x) = a + a_1x + a_2x^2 \quad (10)$$

则在此边界子域中需要通过数值积分计算三个单元的 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$, 比如第 i, j, l 个单元, 即 $H_i^{(k)}, G_i^{(k)}, H_j^{(k)}, G_j^{(k)}, H_l^{(k)}$ 和 $G_l^{(k)}$, 相应的插值公式为

$$\begin{aligned} H_m^{(k)} = & H_i^{(k)} \frac{(x^m - x^j)(x^m - x^l)}{(x^i - x^j)(x^i - x^l)} + \\ & H_j^{(k)} \frac{(x^m - x^i)(x^m - x^l)}{(x^j - x^i)(x^j - x^l)} + \\ & H_l^{(k)} \frac{(x^m - x^i)(x^m - x^j)}{(x^l - x^i)(x^l - x^j)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} G_m^{(k)} = & G_i^{(k)} \frac{(x^m - x^j)(x^m - x^l)}{(x^i - x^j)(x^i - x^l)} + \\ & G_j^{(k)} \frac{(x^m - x^i)(x^m - x^l)}{(x^j - x^i)(x^j - x^l)} + \\ & G_l^{(k)} \frac{(x^m - x^i)(x^m - x^j)}{(x^l - x^i)(x^l - x^j)} \end{aligned} \quad (12)$$

对三维问题, 相应的插值公式可类似得到.

2.2.2 平移单元

当一边界子域被划分为均匀网格时, 各单元之间为平移关系. 对二维问题来说, 对同一直线段或圆弧上的等分线性单元有

$$H_n^{(n \pm m)} = H_{n+k}^{(n+k \pm m)} \quad (13)$$

$$G_n^{(n \pm m)} = G_{n+k}^{(n+k \pm m)} \quad (14)$$

对同一直线段或圆弧上的等分二次单元有

$$H_n^{(2n \pm m)} = H_{n+k}^{(2(n+k) \pm m)} \quad (15)$$

$$G_n^{(2n \pm m)} = G_{n+k}^{(2(n+k) \pm m)} \quad (16)$$

当采用插值方法时, $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$ 可看作各自单元中点的函数, 也可看作此相似单元组中单元号 n 的函数, 相应的插值公式为:

采用一次多项式时

$$H_m^{(k)} = H_i^{(k)} + \frac{H_j^{(k)} - H_i^{(k)}}{j - i}(m - i) \quad (17)$$

$$G_m^{(k)} = G_i^{(k)} + \frac{G_j^{(k)} - G_i^{(k)}}{j - i}(m - i) \quad (18)$$

采用二次多项式时

$$\begin{aligned} H_m^{(k)} = & H_i^{(k)} \frac{(m - j)(m - l)}{(i - j)(i - l)} + \\ & H_j^{(k)} \frac{(m - i)(m - l)}{(j - i)(j - l)} + \\ & H_l^{(k)} \frac{(m - i)(m - j)}{(l - i)(l - j)} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} G_m^{(k)} = & G_i^{(k)} \frac{(m - j)(m - l)}{(i - j)(i - l)} + \\ & G_j^{(k)} \frac{(m - i)(m - l)}{(j - i)(j - l)} + \\ & G_l^{(k)} \frac{(m - i)(m - j)}{(l - i)(l - j)} \end{aligned} \quad (20)$$

对三维问题, 相应的插值公式可类似得到.

可以看出, 平移单元 (或均匀网格) 比比例单元更容易处理.

这样, 在求得各单元上的 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$ 后, 就可将离散形式的边界积分方程 (2) 按节点叠加而得到方程 (4), 然后求解方程 (4) 就可得到 Laplace 变换域中节点的位移和面力.

这样就建立了相似边界元法.

相似边界元法的优点是不需逐个单元进行数值积分, 可以大幅度地减少计算量.

2.3 相似边界元法中奇异单元上积分的计算

当源点 q^k 是当前单元 n 上的某一节点时, 方程 (2) 右端的积分在该单元上为奇异积分, 该单元为奇异单元.

1) 若奇异单元 n 不属于某相似边界元组, 此时在此相似边界元组中各单元上的积分均为非奇异积分, 则在用数值积分求得少数边界元上的矩阵 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$ 后, 可按上述相似边界元法得到此组相似边界元中其它单元上的矩阵 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$.

2) 若奇异单元 n 属于某相似边界元组, 此时在奇异单元 n 上的积分式 (5) 和 (6) 为奇异积分, 不能按上述相似边界元法由插值关系得到, 而需要单独进行计算. 但在此相似边界元组中的其它单元上的积分仍可按上述相似边界元法进行计算. 若奇异单元 n 的跨度很小, 使其附近单元上的积分的精度受到影响, 那么这些单元上积分也需单独计算以保证精度.

3 动态断裂力学的无限相似边界元法

无限相似边界元法 (infinite similar boundary element method, 即 ISBEM) 的基本思想是, 将问题所在域的边界划分为若干子域, 在裂纹尖端的边界上设置了逼近于裂纹尖端的无限个相似边界单元 (见图 1), 其它子域设置有限个相似边界单元. 由于边界上的单元数和节点数均为无限大, 所以称为无限相似边界元法.

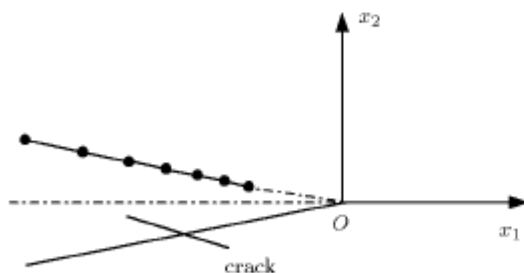


图 1 裂纹尖端的无限相似边界单元

Fig.1 Infinite similar boundary elements at the tip of a crack

由于在各个边界子域上均设置了相似单元, 由前面讨论的相似边界元法可知, 在每个子域上只要利用数值积分求得少数单元上的矩阵 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$, 则其它单元上的矩阵 $H_n^{(k)}$ 和 $G_n^{(k)}$ 可由插值方法得

到. 这样, 最终得到无限阶的线性代数方程组

$$(C + H)U = GT \quad (21)$$

其中

$$U = [\dots, U_i, U_{i+1}, \dots, U_n, \dots]^T \quad (22)$$

$$T = [\dots, T_j, T_{j+1}, \dots, T_m, \dots]^T \quad (23)$$

方程 (21) 可写为

$$Ax = B \quad (24)$$

其中

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]^T \quad (25)$$

这里 $x_i = U_i$ 或 $x_i = T_i$, 矩阵 A 和 B 也是无限阶的.

要求解无限阶线性代数方程组 (24) 是困难的. 由于所研究问题的解的存在性, 以及在裂纹尖端边界子域当相似边界单元无限逼近于裂纹尖端时, 方程组 (24) 的解应收敛于真实解, 以下根据文献 [7] 中的定理提出方程组 (24) 的逼近解法.

选择适当的 n_0 , 依次求解 $n_0, n_0 + 1, \dots$ 阶的线性代数方程组 (24), 直到满足条件

$$\max_i |x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}| < \varepsilon \quad (26)$$

求解过程结束. 这里 $x_i^{(n)}$ 为求解 n 阶方程组 (24) 所得到的第 i 个节点的值, ε 为一很小的常数.

这就是无限相似边界元法.

无限相似边界元法的优点是, 裂纹尖端具有奇异性的应力是由无限个相似边界单元逼近得到, 而不管此应力奇异性的阶数多少, 不像传统的边界元法在裂纹尖端设置奇异元限制了应力奇异性的阶数. 对某些材料的断裂问题, 若事先不知道裂纹尖端应力奇异性的阶数, 则原有的方法无法处理, 而应用无限相似边界元法则可很好地解决此类问题.

4 算例与分析

受突加荷载作用的矩形裂纹板如图 2 所示. 裂纹长度为 $2a$, $a = 0.24$ cm. 材料的弹性模量 $E = 2.0 \times 10^5$ MPa, 泊松比 $\nu = 0.3$, 质量密度 $\rho = 500$ kg/m³.

我们分别用相似边界元法和无限相似边界元法对本例进行了计算. 计算所得的正则动态应力强度因子 ($K_I(t)/K_I$, K_I 为静态应力强度因子) 与边界元法的计算结果的比较如图 3 所示.

由图 3 可以看出, 用相似边界元法和无限相似边界元法的计算结果与传统的边界元法的计算结

果^[6]吻合得很好. 相对来说, 无限相似边界元法的计算结果比相似边界元法更接近于传统边界元法的结果.

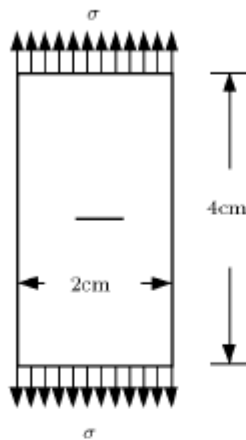


图 2 中心裂纹板

Fig.2 A plate with a central crack

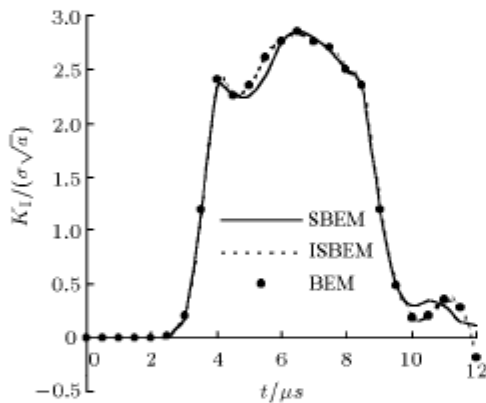


图 3 正则动态应力强度因子

Fig.3 Regular dynamic stress intensity factor

本例是在 Pentium450 计算机上进行计算的. 在 Laplace 变换域中选取了 40 个采样点 s_i . 利用传统的边界元法计算时大约要用 10 min, 而利用相似边界元法计算时约需 3 min. 由于含有无限个边界元和节点, 又需要重复求解线性代数方程组以获得较高精度, 无限相似边界元法大约也要用 10 min. 可见, 相似边界元法可以大幅度节省计算时间, 而无限相似边界元法则无需设置奇异单元就可得到裂纹尖端具有奇异性的应力.

5 结论和讨论

文中提出的相似边界元法, 只需在每个单元组中通过数值积分计算少数 (通常不超过 3 个) 单元的

矩阵, 其它单元的矩阵可通过插值方法得到, 大大减少了计算量, 而得到的解与传统的边界元法的解非常接近.

提出了无限相似边界元法. 由无限相似边界元法可直接得到裂纹尖端具有奇异性的应力, 而不必知道此应力奇异性的阶数. 由于有些材料的裂纹尖端应力奇异性的阶数难以确定, 所以无限相似边界元法比原有方法更有优势.

针对无穷阶线性代数方程组, 根据其解的存在性和收敛性, 提出了求解方法.

对不规则区域的问题, 可在其边界上采用曲线坐标系, 这样本文提出的相似边界元法和无限相似边界元法仍然适用.

本文提出的弹性动力学的相似边界元法, 此方法亦可应用于其它问题. 同样, 本文提出的无限相似边界元法亦适用于其它裂纹问题.

参 考 文 献

- 1 Leung AYT, Su RKL. Mode I crack problems by fractal two level finite element methods. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, 48(6): 847~856
- 2 Leung AYT, Su RKL. Mixed-mode two-dimensional crack problem by fractal two level finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 51(6): 889~895
- 3 Su RKL, Leung AYT. Two-level finite element study of axisymmetric cracks. *International Journal of Fracture*, 1998, 89: 193~203
- 4 应隆安. 无限元方法. 北京: 北京大学出版社, 1992 (Ying Longan. Infinite Element Method. Beijing: Peking University Press, 1992(in Chinese))
- 5 程玉民, 彭妙娟. 弹性动力学的相似边界元法, 重庆建筑大学学报, 2000, 22(6): 1~4 (Cheng Yumin, Peng Miaojuan. Similar boundary element method in elastodynamics. *Journal of Chongqing Jianzhu University*, 2000, 22(6): 1~4(in Chinese))
- 6 嵇醒, 臧跃龙, 程玉民. 边界元法进展及通用程序. 上海: 同济大学出版社, 1997 (Ji Xing, Zang Yuelong, Cheng Yumin. *Advances in Boundary Element Methods and the General Package*. Shanghai: Tongji University Press, 1997 (in Chinese))
- 7 康脱托维奇 LB, 克雷洛夫 BE. 高等分析近似方法. 北京: 科学出版社, 1966 (Kantorowicz LB, Kryloff BE. *Approximate Method for Advance Analysis*. Beijing: Science Press, 1966 (in Chinese))
- 8 Peng Miaojuan, Cheng Yumin. Application of Boundary Element Method for Analysis of the Cracks in Asphalt Pavement. In: Yao Zhenhan, Tanaka M eds. *Theory and Applications of Boundary Element Methods*, Beijing: International Academic Publishers, 1998

INFINITE SIMILAR BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR DYNAMIC FRACTURE MECHANICS

Cheng Yumin* Ji Xing** He Pengfei**

*(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China*)

**(*Department of Engineering Mechanics and Technology, Tongji University, Shanghai 200092, China*)

Abstract In the conventional boundary element method, in order to obtain the last algebraic equation system a large number of integrals must be calculated numerically on all boundary elements and internal cells so that a large amount of computing time is needed. If we can form similar boundary elements on the boundary and obtain the relation of the matrices on the similar boundary elements, it is not needed to obtain the matrices on all elements by numerical integrals, then a great amount of numerical integrals will be decreased. In this paper, similar boundary element method (SBEM) for elastodynamic problems is discussed in detail. Similar boundary elements are classified and their properties are discussed. The interpolation method to obtain the matrices on the similar boundary elements is presented and the formulae of the method are obtained. In similar boundary element method, the boundary is represented with some sub-domains on which the boundary elements are similar. Then on a sub-domain of the boundary we only need to compute the matrices on a few boundary elements by numerical integrals, and the ones on all other boundary elements can be obtained by the interpolation method. Then superimposing the matrices on all boundary elements the coefficient matrix of the last algebraic equation system can be obtained. Comparing with the conventional boundary element method that the matrices on all boundary elements are obtained independently by numerical integrals, similar boundary element method can decrease the computing time to a great extent, and the solution is in total agreement with the one from the conventional boundary element method. To obtain the singular stress at the tip of a dynamic crack, infinite similar boundary element method (ISBEM) is presented. In the method the similar boundary element sub-domain at the tip of the crack contains infinite similar boundary elements. From infinite similar boundary element method, the singular stress at the tip of a crack can be obtained directly, but the singular boundary element is not needed and the degree of singular stress is not assumed. For some materials that we do not know the degree of singular stress at the tip of a crack, infinite similar boundary element method can be applied better than the conventional boundary element method does. In this method the numbers of boundary elements and nodes are infinite, so an infinite order linear algebraic equation system is formed, and then the numerical method for this infinite order system is discussed. For a problem with an irregular domain, we can use the curvilinear coordinate system on the boundary of the domain, and then similar boundary element method and infinite similar boundary element method presented in this paper can be applied too. Similar boundary element method can be applied to other problems which can be solved with the conventional boundary element method, and infinite similar boundary element method can be applied to other crack problems.

Key words infinite similar boundary element method, elastodynamics, dynamic stress intensity factor