

# 遗传算法求解可行域分离的结构优化问题<sup>1)</sup>

唐文艳 顾元宪 李云鹏

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室、工程力学系, 大连 116024)

蔡 雷

(深圳市思乐数据技术有限公司, 深圳 518054)

**摘要** 应用遗传算法求解了两类可行域分离的结构优化问题: 局部屈曲约束的桁架拓扑优化问题和动力响应约束优化问题. 对第一类问题, 提出了新的数学表达式, 适合于遗传算法求解. 采用了改进的适应度函数及约束处理方法、约束凝聚选择、交叉操作改进和竞争最优保留, 提高了遗传算法的效率和可靠性. 算例说明, 该方法能够克服可行域分离给传统优化算法带来的困难, 有效地在多连通可行域中搜索全局最优解.

**关键词** 优化设计, 可行域分离, 遗传算法, 约束凝聚选择

## 引 言

具有凸的单连通可行域的优化问题, 只有一个全局最优解, 是比较容易求解的. 如果可行域是非凸的、多连通的、甚至是分离的, 则存在若干个局部最优解, 传统优化算法求解这类问题一般无法保证得到全局最优解. Svanberg<sup>[1]</sup> 指出许多实际优化问题会出现可行域非凸的现象, 文献 [2~4] 也指出局部屈曲约束下的桁架结构拓扑优化具有不连通的可行域. 可行域非凸或不连通问题的全局优化算法, 经过长时期研究至今未有突破, 成为传统优化算法的一大难题. 但是, 遗传算法的群体搜索、全局收敛等特殊性质, 为解决这类问题带来新的途径.

本文应用遗传算法研究求解具有局部屈曲约束的桁架拓扑优化和具有动力响应约束的结构优化这两类问题, 它们的可行域均为多连通或者分离的. 对前一类问题的优化数学模型, 引入了拓扑变量, 提出新的数学列式. 采用了二进制编码的遗传算法, 并做了若干改进: 适应度函数和约束的处理方法, 约束凝聚选择方法, 交叉的改进, 竞争最优保留方法. 数值算例显示了遗传算法的优点, 它确实能够比较有效地求解可行域不连通优化问题的全局最优解.

## 1 数学模型

结构优化问题一般可以表示为如下的非线性数

## 学规划模型

$$\left. \begin{aligned} \min f(\mathbf{X}) \\ \text{s.t. } g_j(\mathbf{X}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \mathbf{X}^L \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}^U \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中,  $f(\mathbf{X})$  是目标函数, 通常以结构的重量作为目标函数;  $g_j(\mathbf{X})$  为约束函数, 可以是应力、位移、频率、屈曲载荷等结构性态函数;  $m$  为约束函数  $g_j(\mathbf{X})$  的个数;  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_n)$  为设计变量,  $\mathbf{X}^L, \mathbf{X}^U$  分别为设计变量的下限和上限值,  $n$  是设计变量的个数.

本文求解的第一类问题, 即受局部屈曲约束的桁架结构拓扑优化设计, 数学列式可以表述如下

$$\left. \begin{aligned} \min W = \sum_{i=1}^N \rho_i L_i A_i \\ \text{s.t. } KU_j(\mathbf{A}) = P_j, \quad j = 1, 2, \dots, M \\ \sigma_i^L \leq \sigma_{ij}(\mathbf{A}) \leq \sigma_i^U, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \quad j = 1, 2, \dots, M, \text{ 如果 } A_i > 0 \\ \sigma_{ij}(\mathbf{A}) \geq \sigma_i^{cr} = -\frac{\pi^2 E_i I_i}{A_i l_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \quad j = 1, 2, \dots, M, \text{ 如果 } A_i > 0 \\ A_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2002-04-08 收到第一稿, 2003-03-03 收到修改稿.

1) 国家重点基础研究专项经费资助项目 (G1999032805)、国家高技术研究发展计划专项经费资助项目和高等学校骨干教师资助项目.

式中  $N$  是基结构中杆件的总数;  $M$  代表载荷工况;  $A_i, \rho_i, E_i, l_i$  分别代表第  $i$  根杆件的截面积, 密度, 杨氏模量和长度.  $\sigma_i^L$  和  $\sigma_i^U$  是第  $i$  根杆应力的下限和上限值.  $I_i$  代表了第  $i$  根杆的惯性矩, 它取决于杆截面积的形状和尺寸. 不失一般性, 假设每根杆为圆形截面, 杆的欧拉屈曲应力则为

$$\sigma_i^{\sigma} = -\frac{\pi E_i A_i}{4l_i^2} \quad (3)$$

考虑到问题的组合性质以及奇异最优解现象所带来的困难, 本文引入拓扑变量  $t_i$ , 构造了 0-1 混合规划问题, 其相应的优化数学列式为

$$\left. \begin{aligned} \min W &= \sum_{i=1}^N \rho_i L_i(t_i A_i) \\ \text{s.t. } KU_j(\mathbf{A}) &= P_j, \quad j = 1, 2, \dots, M \\ t_i(\sigma_{ij}(\mathbf{A}) - \sigma_i^U) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ & \quad j = 1, 2, \dots, M \\ t_i(\sigma_i^L - \sigma_{ij}(\mathbf{A})) &\leq 0 \\ t_i(\sigma_i^{\sigma} - \sigma_{ij}(\mathbf{A})) &\leq 0 \\ A_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, N \\ A_i(1 - t_i) &= 0 \\ t_i &= 0 \text{ 或 } 1 \\ P^T U &\leq C \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中,  $t_i$  表示拓扑设计变量. 如果拓扑变量  $t_i = 0$ , 则表示该杆件不存在, 不计相应的杆应力; 如果拓扑变量  $t_i = 1$ , 则表示该杆件存在.  $P$  为外载荷向量;  $U$  为位移向量;  $C$  为柔度约束的许用值.

引入拓扑变量后的数学列式, 即式 (4), 比原问题增加了一个柔度约束. 这是因为所有拓扑变量均取值为 0, 各杆件的截面积为 0, 则结构重量为 0, 这显然不是问题真正的最优解. 只要柔度约束许用值足够大, 则不影响原问题的可行域, 而数学列式趋于完整.

这里用一个例子说明局部屈曲应力约束引起的拓扑优化奇异现象. 如图 1 所示的 3 杆桁架, 设垂直方向载荷  $P = 1$ , 各杆的杨氏模量  $E = 1/\pi$ ,  $h = 1$ . 由欧拉屈曲应力决定的可行域如图 2 所示, 由一个二维和两个一维可行域组成. 一维可行域位于两坐标轴上, 从点  $P$  和  $Q$  延伸到无穷远处, 是某个设计变量为零产生的退化可行域. 适当选择杆件密度,

全局最优解可能位于  $P$  或  $Q$  点. 很显然, 可行域具有许多不连通退化子域. 这只是一个二维示例, 随着变量增多可行域更复杂, 分离的可行域可能是二维或高维的面.

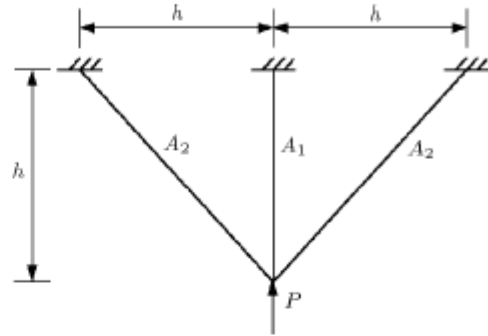


图 1 3 杆桁架结构

Fig.1 3-bar truss structure

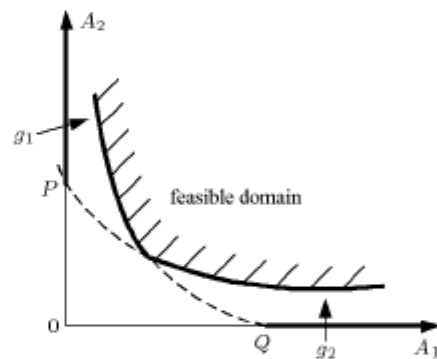


图 2 3 杆桁架的设计可行域

Fig.2 Design feasible domain of 3-bar truss

## 2 遗传算法的实施

本文采用二进制的遗传算法求解具有不连通可行域的结构优化问题, 并且采用了凝聚约束处理、约束凝聚选择、两点交叉、基本位变异、竞争最优保留等改进方法. 下面简要介绍这些算法的实施, 更为详细的内容见文献 [5].

### 2.1 凝聚约束处理

对优化问题 (1) 中的约束, 通过引进信息熵函数, 构造了如下的可微函数

$$F_p(X) = \frac{1}{p} \ln \left\{ \sum_{j=1}^m \exp[\rho g_j(X)] \right\} \quad (5)$$

称之为“凝聚”函数, 其中  $p$  是一个正的控制参数.

原问题式 (1) 转化为单一约束问题, 等价形式如下

$$\left. \begin{aligned} \min f(\mathbf{X}) \\ \text{s.t. } F_p(\mathbf{X}) = \frac{1}{p} \ln \left\{ \sum_{j=1}^m \exp[p g_j(\mathbf{X})] \right\} \leq 0 \\ j = 1, 2, \dots, m \\ \mathbf{X}^L \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}^U \end{aligned} \right\} (6)$$

引入约束  $g_0(\mathbf{X}) = 0$ , 采用凝聚函数转换, 惩罚函数形式变为

$$\varphi(\mathbf{X}, \alpha) = f(\mathbf{X}) + \frac{\alpha}{p} \ln \left\{ 1 + \sum_{j=1}^m \exp[p g_j(\mathbf{X})] \right\} \quad (7)$$

当  $\alpha$  大于门槛值  $\alpha = \|\lambda^*\|_D$  (此处为所有 Lagrange 乘子之和) 且  $p \rightarrow \infty$  时,  $\varphi(\mathbf{X}, \alpha)$  的无约束极小解即为原问题式 (1) 的解. 因实际计算时, 控制参数  $p$  只能取一有限值, 会导致更严厉的惩罚, 从而使迭代点更迅速地逼近可行域, 这在计算中是有利的. 此处的惩罚因子  $\alpha$  在数值上等于原问题所有拉格朗日乘子之和, 这是凝聚函数的“凝聚”作用. 因为惩罚不是加在个别约束上, 而是施加在整体约束上, 故它是一种“总体惩罚”.

采用下面形式的适应度函数进行转化

$$F(\mathbf{X}) = C_{\max} - \varphi(\mathbf{X}, \alpha) \quad (8)$$

其中,  $C_{\max}$  是一个很大的常数,  $\varphi(\mathbf{X}, \alpha)$  为附加了惩罚项的目标函数. 本文取常数  $C_{\max}$  为当代群体中最大的目标函数值  $\max \varphi(\mathbf{X}, \alpha)$ , 这样避免了常数  $C_{\max}$  难以预先估计的情况.

## 2.2 约束凝聚选择

其具体步骤:

(1) 首先计算群体中各个个体的约束函数值. 采用“凝聚”函数即等式 (5), 将多个约束凝聚成一个约束, 并求出约束函数值.

(2) 选择出较好的个体进入匹配池. 随机选择两个或者两个以上个体, 首先判断个体是否为可行设计. 如果均为可行设计, 根据适应度函数值决定它们的优劣, 具有最大的适应度函数值的个体被选择, 进入匹配池; 如果均为不可行设计, 根据约束函数值判断它们的好坏, 具有最小约束函数值的个体被选择, 进入匹配池; 如果既有可行设计又有不可行设计, 则优先考虑可行设计, 具有较大适应度函数值的个体被选入匹配池.

(3) 判断匹配池中的个体是否达到种群数. 如果匹配池未滿, 则转到 2; 如果匹配池已经滿, 则结束选择过程.

约束凝聚选择既考虑了适应度函数值, 又考虑了约束函数值, 符合约束优化问题的性质, 使得可行个体和接近可行域的个体有更多机会被选入匹配池. 被选择的个体具有优良基因特性, 遗传给下一代个体, 而且在进化初期和后期都能够保持一定的选择压力, 使优化过程顺利进行.

## 2.3 交叉

本文对配对后的个体, 首先用海明距离统计配对个体之间对应基因座上具有不同基因值的位数, 以判断交叉后是否能产生新个体. 海明距离为

$$z = \sum_{i=1}^l t_i \quad (9)$$

其中,  $z$  为配对个体之间对应基因座上具有不同基因值的位的个数;  $l$  为二进制串的长度; 如果配对个体间对应基因座上的基因值相同, 则  $t_i = 0$ ; 否则,  $t_i = 1$ . 由此可以看出  $z$  值越大, 则两个配对个体之间具有不同基因值的个数越多. 如果配对个体的海明距离  $z \leq 1$ , 则配对的个体完全相同或只有一位对应的基因值不同, 则交叉点选择在任何位置, 交叉操作后得到的新个体都与父代相同, 不会产生新的个体, 因此对这样配对的个体不必进行交叉操作, 从而能减少计算量.

为了保证交叉操作后能够产生新的后代个体, 交叉点的设置要保证配对个体之间交换部分的基因座上具有不同的基因值, 并且配对个体之间交换部分的不同基因值的位数要小于整个基因串的海明距离. 本文采用两点交叉, 并将其应用于设计变量的子串上, 通过交叉能搜索更大的空间.

## 2.4 竞争最优保留

将经过选择、交叉和变异产生的新个体与父代群体形成一个扩展群体. 首先判断扩展群体中可行个体的数目, 如果可行个体的数量大于或等于种群数, 那么将可行个体按照适应度函数值由大到小进行排序, 从而选择出较好的个体作为下一代群体; 如果可行个体数量小于种群数, 则优先选择可行个体, 不可行个体按照约束函数值由小到大进行排序, 选择违反约束程度小的不可行个体, 直到满足群体个数.

采用竞争最优保留方法, 实际上是延长父代个体的生存寿命, 会使优良的基因有较长的生存时间, 并

且有更多的机会遗传到子代，不至于过早的丢失。既保证了遗传算法的全局收敛性，又能保持优良基因。在新产生的群体中，采用海明距离判断它们之间的差异，保证群体中的个体单一性。

### 3 算例

**例 1** 10 杆桁架拓扑优化。10 杆结构如图 3 所示。杨氏模量  $E = 1.0 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ ，密度  $\rho = 0.1 \text{ kg/cm}^3$ ，长度  $h = 360 \text{ cm}$ 。外载荷  $P = 100 \text{ N}$ 。每根杆许用应力为  $-\sigma_i^L = \sigma_i^U = 20.0, i = 1, 2, \dots, 10$ 。考虑每个受压杆件的局部屈曲约束。

遗传算法的控制参数为：群体规模 150，最大迭代次数 200，交叉概率 1.0，变异概率 0.01，惩罚因子 1000.0。最优结果见表 1，其中可行性是违反约束的最大相对值。可以看出，采用普通的应力形式约束不能得到最优的拓扑结构。本文遗传算法的最优解与文献 [6] 中  $\epsilon$ - 放松算法的结果非常接近，比采用应力形式约束得到的重量减轻很多，可见本文的改进遗传算法对这类优化问题是很有效的。图 4 显示了随着群体的进化目标函数的变化曲线。进化初期得到的结果不可行，目标函数值波动较大；进化后期波动比较小，趋于稳定。

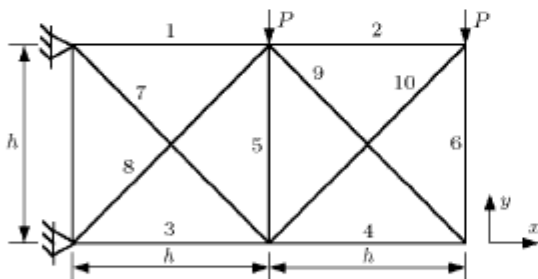


图 3 10 杆桁架结构  
Fig.3 10-bar truss

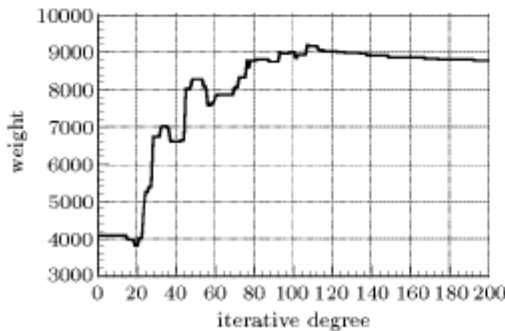


图 4 10 杆桁架拓扑优化收敛历史  
Fig.4 Convergence history of topology optimization for 10-bar

表 1 10 杆桁架拓扑优化结果

Table 1 Optimum topology solutions for 10-bar truss

cross-sectional areas of bars	optimum in Ref.[6]		Present GA
	stress formula	$\epsilon$ -relaxed	
A1	10.0	5.00	5.2785
A2	6.68	0.00	0.00
A3	57.45	70.36	70.1104
A4	0.05	40.62	40.5005
A5	0.00	57.48	57.2823
A6	5.64	40.62	40.4895
A7	7.07	14.14	14.1353
A8	68.31	0.00	0.00
A9	0.00	7.07	7.0381
A10	68.31	0.00	0.00
weight	10190.00	8785.75	8769.792
feasibility	$2.114 \times 10^{-4}$	$1.509 \times 10^{-4}$	$7.097 \times 10^{-3}$

**例 2** 结构动力响应约束优化问题。具有集中质量 (200kg) 的悬臂梁结构如图 5 所示，目标函数是极小化结构质量。梁的长度为 1000cm，截面尺寸是 40 cm×40 cm， $t_b$  和  $t_h$  独立变化。材料密度  $\rho = 2.768 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ ，杨氏模量  $E = 7.1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ 。结构受简谐载荷  $P(t) = 4000 \sin \Omega t (\text{N})$ ，载荷的激励频率为  $\Omega = 3.4 \text{ Hz}$ 。设计变量是  $t_b$  和  $t_h$ ，其边界约束为  $0.5 \text{ cm} \leq t_b, t_h \leq 10 \text{ cm}$ 。端点受动力稳态响应位移约束  $|\omega| \leq 10.0 \text{ cm}$ 。由于激励频率接近于结构的一阶固有频率，共振区的位移响应超出约束条件，导致了设计空间可行域分离，如图 6 所示。

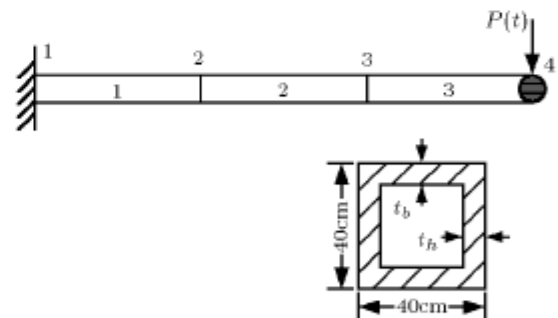


图 5 悬臂梁结构图

Fig.5 Cantilever beam

遗传算法的控制参数为：群体规模 60，最大代数 50，交叉概率 1.0，变异概率 0.01，惩罚因子 100.0。结构优化的结果见表 2。本文得到的优化结果与文献 [7] 给出的结果一致。在本文遗传算法迭代中，结构重量的变化曲线如图 7 所示，随着进化代数增加结构重量下降很快，到第 3 代时就已经得到了问题的最优解。

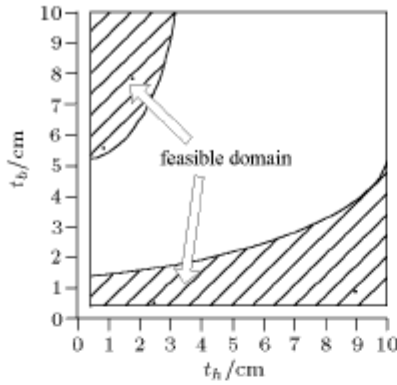


图 6 分离的可行域

Fig.6 Disjointed feasible domain

表 2 悬臂梁优化结果

Table 2 Optimum solutions for cantilever beam

optimization methods	$t_h/cm$	$t_b/cm$	weight/kg	feasibility
Ref.[7]	0.5	0.5	218.672	feasible
Present GA	0.5	0.5	218.672	feasible

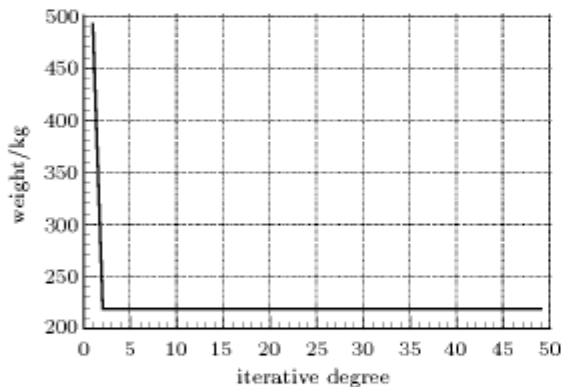


图 7 悬臂梁收敛历史

Fig.7 Convergence history for cantilever beam

## 4 结 论

本文研究应用遗传算法求解具有不连通或分离可行域的结构优化问题. 对其中的一类问题——受局部屈曲约束的桁架结构拓扑优化, 提出了新的数学列式, 使得遗传算法的求解更加方便. 对遗传算法提出了改进, 采用凝聚约束处理能够比较容易地选择惩罚因子; 约束凝聚选择使有潜力的个体有更多的机会遗传给后代; 应用于每个设计变量的交叉操作使遗传算法能够搜索更大的区间; 竞争最优保留延长了父代的寿命, 优良的基因得以生存, 易于产生可行个体. 算例表明, 遗传算法无需特殊的辅助措施, 能够有效地克服不连通的可行域给传统优化算法所带来的困难.

## 参 考 文 献

- 1 Svanberg K. On Local and Global Optimal in Structural Optimization, in *New Directions in Optimum Design*. Atrek E and alt (ed.) John Wiley, 1984
- 2 Cheng GD. Some aspects on truss topology optimization. *Structural Optimization*, 1995, 10(3/4): 173~179
- 3 Rozvany GIN. Difficulties in truss topology optimization with local buckling and system stability constraints. *Structural Optimization*, 1996, 11(3/4): 213~221
- 4 Zhou M. Difficulties in truss topology optimization with stress and local buckling constraints. *Structural Optimization*, 1996, 11(2): 134~136
- 5 唐文艳. 结构优化中的遗传算法研究和应用. [博士论文], 大连: 大连理工大学, 2002 (Tang Wenyan. Research and application of genetic algorithm in structural optimization. [Ph D Thesis], Dalian: Dalian University of Technology, 2002)
- 6 Guo X, Koetsu Yamazaki, Cheng GD. A new approach for the solution of singular optima in truss topology optimization with stress and local buckling constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 22(5): 364~373
- 7 Sepulveda AE, Schmit LA. Approximation-based global optimization strategy for structural synthesis. *AIAA J*, 1993, 31(1): 180~188

## GENETIC ALGORITHM APPLIED TO STRUCTURAL OPTIMIZATION PROBLEMS WITH DISJOINTED FEASIBLE DOMAINS<sup>1)</sup>

Tang Wenyan Gu Yuanxian Li Yunpeng

*(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dept. of Engineering Mechanics,  
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)*

Cai Lei

*(Shenzhen Sinodata Tech. Co. Ltd. 3/F., 7 Block, Tianan Industrial Zone Nanyou, Shenzhen 518054, China)*

**Abstract** Genetic algorithm (GA) is applied to solve two kinds of structural optimization problems with disjointed feasible domains, which include problems of topology optimization for truss structures subject to stress and local buckling constraints and problems with dynamic response constraints. A new mathematic formula is proposed to the first kind of problems to make it fit the solution of GA. Some improvements on GA are proposed, such as improvement on fitness function and constraints handling, surrogate reproduction, improvement on crossover operator and competitive elitist model. This way, the efficiency and reliability of GA are improved. The numerical examples given in the paper show that GA can overcome difficulties result from disjointed feasible domains to the traditional optimization algorithms, and effectively search the global optimum from multi-connected feasible domains.

**Key words** design optimization, disjointed feasible domains, genetic algorithm, surrogate reproduction

---

Received 8 April 2002, revised 3 March 2003.

1) The project supported by the National key Base Research Special Foundation of China (G1999032805), the National Plan of High Fechnology Research and Development and the Foundation for University Key Teacher by the Ministry of Eduction of China.