

双相介质波动方程孔隙率反演的同伦方法¹⁾

韩 华 章梓茂 汪越胜 魏培君*

(北方交通大学土建学院, 北京 100044) * (北京大学力学系, 北京 100871)

摘要 从材料响应的理论合成应与实际测量数据相拟合这一出发点, 将双相介质波动方程参数反演问题转化为非线性算子方程的零点求解问题, 从而应用一种大范围收敛的同伦方法来求解非线性算子方程, 并把这种方法用于 Simon(1984) 给出的具有解析解的一维双相介质模型的数值模拟, 最后的数值结果表明, 给出的算法是十分有效的.

关键词 双相介质, 反演, 同伦法, 大范围收敛

引 言

双相介质理论较传统的单相弹性介质理论, 更接近实际, 也更能准确地描述实际地层结构和地层性质. 因此在地球物理勘探、地震工程和岩土动力学等领域都有广泛应用.

由于传统求解介质参数反问题的优化方法, 如梯度法^[1], 扰动法^[2]或时卷正则迭代法^[3], 其迭代序列是否收敛及反演结果都明显依赖于初始点, 因为它们都基于局部收敛的牛顿迭代法. 为克服这一不足, 本文引入了大范围收敛的同伦反演方法.

同伦方法是求解非线性问题的一种新的非常有效的方法, 它克服了传统迭代法局部收敛的弱点, 对初值的选取没有严格限制, 能够全局收敛. 由于双相介质动力学控制方程的复杂性, 动态响应问题一般须采用数值方法求解, 而能够在初、边值条件下得到解析解的情况并不多见. 本文以 Simon^[4](1984) 给出的双相介质一维波动方程瞬态位移响应的解析解为算例, 用同伦方法对双相介质的孔隙率参数进行了反演, 并同传统的优化方法——时卷正则迭代方法进行了比较. 数值结果表明了同伦方法的可行性和稳健性.

1 一维双相介质数学模型

一维双相介质的动力学控制方程可写为^[5]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\alpha Q) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \rho_f \ddot{u} + \rho_f \ddot{w} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\alpha Q) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[(Q) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \rho_f \ddot{u} + m \ddot{w} + r \dot{w} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = w(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t) \quad (4)$$

$$u(0, t) = f(t) \quad (5)$$

其中, λ, μ 为固体骨架的 Lamé 系数; ρ 为固流双相介质的密度; α, Q 为表征固体骨架和孔隙流体压缩性的常数; m 和 r 是 Biot 引进的系数, $m = \rho_f / \beta$, $r = \eta / k$, 这里 k 为动态渗透率, η 为液体黏性系数, ρ_f 为流体的密度, β 为固体骨架的有效孔隙率; u 为固体骨架的位移; w 为流体相对于固体骨架的位移, 即 $w = \beta(U - u)$, 其中, U 表示孔隙中流体的位移; $g(t)$ 是地表震源函数; $f(t)$ 是地表测量数据.

上述的参数之间有如下关系式

$$\lambda = K_m - \frac{2}{3}\mu$$

$$\rho = (1 - \beta)\rho_s + \beta\rho_f$$

$$\alpha = 1 - \frac{K_m}{K_s}$$

$$Q = \frac{K_s^2}{k(1 + \beta(K_s/K_f - 1)) - K_m}$$

其中, K_m 为固体骨架的体变模量, K_s 为无孔固体的体变模量, K_f 为流体的体变模量, ρ_s 为无孔固体的密度.

2001-09-03 收到第一稿, 2002-10-08 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (19872002) 和教育部博士点基金资助项目 (20010004011).

这样,波动方程孔隙率反演问题就归结为由方程(1)和(2),初始条件(3)和边界条件(4)以及附加条件(5)来反演孔隙率 β .

2 孔隙率反演的同伦法

令 $u(x,t)$ 为波动方程的解,则 $u(x,t)$ 非线性地依赖 β ,从材料响应的理论合成应与实际测量数据相拟合这一原则出发,由附加条件(5),构造非线性算子 $F(\beta,t) = f(t) - u(\beta;0,t)$,这样,波动方程的参数反演问题可以转化为下面的非线性算子方程零点的求解

$$F(\beta,t) = 0 \quad (6)$$

为了克服在用传统的方法如Newton迭代法求解形如(6)式非线性方程时存在的局部收敛的问题,在此引入同伦方法,有效地解决了这一问题.

针对非线性算子方程(6),从附加条件(5)出发,构造了Newton同伦映射

$$H(\beta,\omega) = F(\beta,t) - (1-\omega)F(\beta_0,t) \quad (7)$$

其中, $F(\beta,t) = f(t) - u(\beta;0,t)$; $F(\beta_0,t) = f(t) - u_0(\beta_0;0,t)$; $u_0(\beta_0;0,t)$ 是 β 取为 β_0 时,波动方程的解.

由(7)式可知,当 $\omega = 0$ 时, $H(\beta,0)$ 有已知的零点 β_0 ,而当 $\omega = 1$ 时,有 $H(\beta,1) = F(\beta)$.

当(7)式的解 β 是关于同伦参数 ω 的函数时, $\beta = \beta(\omega)$,则 $\beta(\omega)$ 满足初值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\beta}{d\omega} &= -H'_\beta(\beta,\omega)^{-1}H'_\omega(\beta,\omega) \\ \beta(0) &= \beta_0 \end{aligned} \right\} \omega \in (0,1) \quad (8)$$

微分方程初值问题存在解曲线;由等价性原理可知,这条解曲线即为同伦路径 Γ .

这样,跟踪路径求最优解,有两条路径,一条从同伦方程出发,另一条从微分方程初值问题求解,由于二者是等价的,故可将它们结合起来,效果更好.为此本文采用Euler预估-Newton校正算法^[7],对同伦路径 $H(\beta(\omega),\omega) = 0(\omega = 0 \rightarrow 1)$ 进行追踪.主要过程如下:

取预估步长为 h_i ,则预估点为

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h_i, \quad \bar{\beta}_{i+1} = \beta_i + h_i \frac{d\beta_i}{d\omega} \quad (9)$$

若 $\|H(\bar{\beta}_{i+1},\omega_{i+1})\|$ 不能满足 $H(\beta,\omega) = 0$ 的精度要求,则用

$$\beta_{i+1} = \beta_i - H'_\beta(\beta_i,\omega_{i+1})^{-1}H(\beta_i,\omega_{i+1}) \quad (10)$$

进行校正.

预估步长 h 的选取和修正采用的是Georg^[8]给出的基于渐近估计的步长策略.

3 关于孔隙率对同伦参数导数 $\frac{d\beta_i}{d\omega}$ 的求解

当由式(9)计算下一个Euler预估点时,需要计算 $\frac{d\beta_i}{d\omega}$ 的值.为此,将式(7)的同伦函数代入式(8),由于 $H'_\beta = \frac{\partial F}{\partial \beta}$, $H'_\omega = F(\beta_0)$,从而有 $\frac{d\beta}{d\omega} = -\left[\frac{\partial F}{\partial \beta}\right]^{-1}F(\beta_0)$.由于 $H'_\omega = F(\beta_0)$ 为常数,则问题的关键归结为 $H'_\beta = \frac{\partial F}{\partial \beta}$ 的求解.

根据谢干权(1986)^[9]提出的一种解波动方程逆问题的时卷正则迭代方法,并考虑到固相介质是各向同性均匀的,本文给出了一维双相介质波动方程参数孔隙率逆问题的Fretet算子的数学表达式如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \beta} = & - \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \alpha^2 \frac{\partial Q}{\partial \beta} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \alpha \frac{\partial Q}{\partial \beta} + \right. \\ & \left. \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \alpha \frac{\partial Q}{\partial \beta} + \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \frac{\partial Q}{\partial \beta} + \right. \\ & \left. (\ddot{u}\varphi) \frac{\partial \rho}{\partial \beta} + (\ddot{u}\psi) \frac{\partial m}{\partial \beta} + (\dot{w}\psi) \frac{\partial r}{\partial \beta} \right\} dx \quad (11) \end{aligned}$$

于是,同伦函数 $H(\beta,\omega)$ 的导数 H'_β 可求.

4 算 例

Simon(1984)^[4]给出了满足Biot的动力相容条件下的双相介质在阶跃载荷和脉冲荷载下的一维问题的瞬时解.双相介质一维波动方程和初始条件同(1),(2)和(3).在半无限双相介质表面作用动荷载,假定表面排水不受限制,该问题的边界条件可表示为

$$\sigma(0,t) = f(t), \quad \pi(0,t) = 0 \quad (12)$$

其中, $\sigma(x,t)$ 表示双相介质 x 方向总应力, $\pi(x,t)$ 表示孔隙流体应力.

Simon用Laplace积分变换和反变换方法求得了上述方程的解析解为

$$\begin{aligned} w(\xi,\tau) = & \frac{\alpha}{(1-\alpha\chi)\sqrt{a}} \int_0^\tau f(\tau-\bar{\tau})e^{-b\bar{\tau}/2a} \\ & I_0 \left[\frac{b\sqrt{\bar{\tau}^2 - a\xi^2}}{2a} \right] H(\bar{\tau} - \xi\sqrt{a})d\bar{\tau} \quad (13) \end{aligned}$$

$$u(\xi, \tau) = - \int_0^\tau f(\tau - \bar{\tau})H(\bar{\tau} - \xi)d\bar{\tau} - \chi w(\xi, \tau) \quad (14)$$

u 和 w 的空间导数为

$$w_{,\xi} = \frac{-\alpha}{1-\alpha\chi} \left\{ f(\tau - \xi\sqrt{a})e^{-b\xi/2\sqrt{a}}H(\tau - \xi\sqrt{a}) + \frac{b\xi}{\sqrt{a}} \int_0^\tau f(\tau - \bar{\tau}) \frac{e^{-b\bar{\tau}/2a} I_1 \left[\frac{b\sqrt{(\bar{\tau}^2 - a\xi^2)}}{2a} \right]}{\sqrt{(\bar{\tau}^2 - a\xi^2)}} H(\bar{\tau} - \xi\sqrt{a})d\bar{\tau} \right\} \quad (15)$$

$$u_{,\xi} = -f(\tau - \xi)H(\tau - \xi) - \chi w_{,\xi} \quad (16)$$

其中, $\xi = \frac{x}{\rho k V_c}$, $\tau = \frac{t}{\rho k}$, $V_c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q}{\rho}}$, $\chi = \frac{\rho f}{\rho}$, $\gamma = \frac{\chi}{\beta}$, $k = \frac{Q}{\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q}$, $f(\tau) = \frac{k}{V_c} f(t)$, $a = (\gamma - \chi^2)/(k - \chi^2)$, $b = 1/(k - \chi^2)$, $I_0(z)$, $I_1(z)$ 分别为零阶和一阶的修正 Bessel 函数, $H(\tau)$ 是 Heviside 函数.

本文就此算例用同伦法对孔隙率进行了反演. 双相介质材料真值为: $E = 3.0 \times 10^4$ kPa, $\nu = 0.2$, $\alpha = 0.667$, $\rho = 0.306$ g/cm³, $\chi = 0.9730$, $\beta = 0.333$, $k = 0.004883$ m². 测量地震记录的地点选取在半无限双相介质表面, 即 $x = 0$ 处.

在双相介质表面分别作用瞬时突加荷载和脉冲荷载, 即

$$F_1(t) = \sigma_0 H(t)$$

和

$$F_2(t) = \begin{cases} 0, & t > 0, t > 2\Delta \\ \frac{\sigma_0 t}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ -\frac{\sigma_0(t - 2\Delta)}{\Delta}, & \Delta \leq t \leq 2\Delta \end{cases}$$

其中, $H(t)$ 为 Heviside 函数, $\sigma_0 = 1000.0$ kPa, $\Delta = 0.03$ s.

利用式 (13) 和式 (14), 由孔隙率的真值进行波动方程正问题的求解, 可求得瞬时突加荷载的表面积位移响应 $u(0, t)$, 并以此代替实际地震测量数据 $f(t)$, 用于数据拟合.

用孔隙率的真值, 通过式 (13) 和 (14) 解出精确的地表位移 $u(0, t)$ 作为反演的附加条件, 即实际的地震测量数据以后, 再假定孔隙率为未知, 利用公式 (15) 和 (16), 求得瞬时突加荷载和脉冲荷载响应对空间坐标的导数. 分别在 x 方向和 t 方向进行等距剖分, x 方向最大取为 20m, 间距为 0.5m, t 方向最大取为 0.06s, 间隔为 0.0025s, 对 (11) 式进行离散, 求得 H'_β , 然后进行反演计算. 反演时, 利用前面叙述的预估 - 校正算法, 初始孔隙率可任意选取, 初始步长 h 为 0.03, 预估和校验同伦函数 $H(\beta, t) = 0$ 的误差精度分别为 $\varepsilon_1 = 1.00 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 8.00 \times 10^{-3}$. 孔隙率反演的部分结果见表 1, 反演结果同真值比较见图 1.

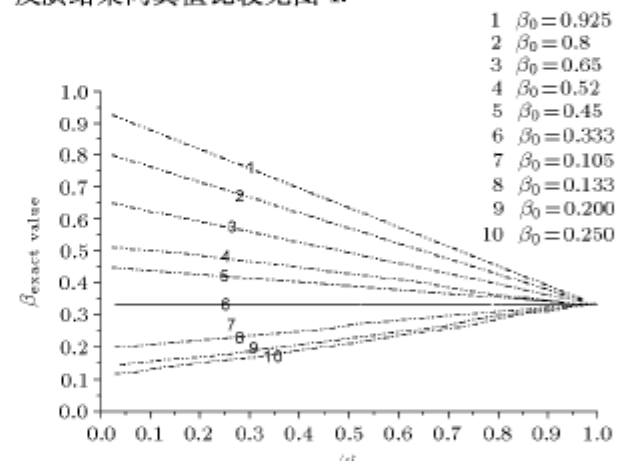


图 1 孔隙率取不同初始值时反演结果同真值比较
Fig.1 Comparison of the inversion results and the exact value for different original value of porosity

表 1 孔隙率取不同初始值时数值反演结果

Table 1 Numerical inversion results for different original value of porosity

Number	Original value (β_0)	Iterative times	Iterative value ($\beta \times 10^{-1}$)	Exact value	Absolute value of relative error
1	0.105	35	3.327034	0.333	2.9660×10^{-4}
2	0.150	20	3.349058	0.333	1.9058×10^{-3}
3	0.200	17	3.341187	0.333	1.1187×10^{-3}
4	0.250	14	3.329620	0.333	3.8000×10^{-5}
5	0.450	30	3.358379	0.333	2.8379×10^{-3}
6	0.520	47	3.334950	0.333	4.9500×10^{-4}
7	0.650	52	3.335206	0.333	5.0260×10^{-4}
8	0.925	72	3.342185	0.333	1.2185×10^{-3}

为便于比较, 本文又用时卷正则迭代法^[5]对孔隙率进行了反演. 其中孔隙率增量的线性化积分方程推导结果同(11)式, 然后通过关于孔隙率 β 的导算子的积分表达式(11)式构造 Newton 迭代格式. 反演结果见表 2.

从表 2 可以看出, 用时卷正则迭代法反演孔隙率时, 当孔隙率初值离真值比较近时, 反演结果精

度很高, 收敛速度也很快, 而当初值取值离真值较远时, 迭代序列不收敛. 用同伦方法反演孔隙率时, 在满足孔隙率定义域的前提下($0 < \beta < 1.0$), 当任意选取孔隙率的初始值时, 都能保证很好地收敛(表 1), 说明同伦方法是大范围收敛的方法. 从图 1 可以看出, β 是同伦参数 ω 的单调函数, 本文构造的 Newton 同伦映射为单调同伦映射.

表 2 时卷正则迭代法反演孔隙率的数值结果

Table 2 Iterative steps of inversion porosity by time convolution regularity iterative method

Number	Original value (β_0)	Iterative times	Iterative value (β)	Exact value	Absolute value of relative error
1	0.105		nonconvergent	0.333	
2	0.133		nonconvergent	0.333	
3	0.150	10	0.334031	0.333	1.0310×10^{-3}
4	0.200	7	0.333978	0.333	9.7800×10^{-4}
5	0.250	5	0.333076	0.333	7.6000×10^{-5}
6	0.450	12	0.334324	0.333	1.3240×10^{-3}
7	0.520		nonconvergent	0.333	
8	0.650		nonconvergent	0.333	

5 结 论

从计算结果可见, 即使被反演的初值与真值相差甚远时反演结果仍然可以收敛到相当好的精度. 说明同伦反演方法是大范围的收敛方法, 用同伦方法反演双相介质波动方程的参数是可行的和有效的, 它非常适用于参数初始值难以获取的高度非线性反演问题. 同伦法不仅本身可以作为一种有效的反演方法, 也可以为其它的反演方法, 如 PST 方法, 提供很好的迭代初值. 然而, 计算结果也反映出一些问题: 1) 由于追踪同伦路径时, 需要进行多次的牛顿校正, 这样计算时间上要大于传统的优化方法(梯度法, 扰动法, 时卷正则迭代法). 2) 在进行 Newton 校正时如果预估步长的理想压缩比选值不当, 则可能出现步长压缩过多而无法跳出校正步骤的情况. 应该通过调节它的值, 避免这种情况出现. 3) 追踪同伦路径要保证同伦函数的 Jacobi 矩阵对任意点 β 是满秩的, 如果 Jacobi 矩阵不是满秩的, 要采取一定的措施, 才能保证同伦路径的顺利追踪.

参 考 文 献

- 刘克安, 刘宏伟, 郭慧娟. 双相介质中参数的非线性反演模拟. 哈尔滨建筑大学学报, 1996, 29(2): 115~120 (Liu Kean, Liu Hongwei, Guo Huijuan. The parameter nonlinear-inversion in biphas media. *Journal of Harbin University of Architecture and Engineering*, 1996, 29(2): 115~120(in Chinese))
- 刘克安, 刘宏伟. 双相介质二维波动方程孔隙率反演的扰动方法. 哈尔滨建筑大学学报, 1996, 29(4): 80~84(Liu Kean, Liu Hongwei. Method of perturbation for inversion of 2-D elastic wave equation in a two-phase medium. *Journal of Harbin University of Architecture and Engineering*, 1996, 29(4): 80~84(in Chinese))
- 刘克安, 刘宏伟, 郭保琦等. 二维双相介质波动方程孔隙率反演的时卷正则迭代法. 石油地球物理勘探, 1996, 31(3): 410~414 (Liu Kean, Liu Hongwei, Guo Baoqi, et al. Time-convolution regularization iteration method for wave-equation porosity inversion in 2-D two-phase medium. *Oil Geophysical Prospecting*, 1996, 31(3): 410~414(in Chinese))
- Simon BR, Zieniewicz OC, Paul DK. An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1984, 8: 381~398
- Biot MA. The theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solids: I. Low frequency range, II. Higher frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, 28: 168~178, 179~191
- 王则柯, 高安堂. 同伦方法引论. 重庆: 重庆出版社, 1990 (Wang Zeke, Gao Antang. Introduction of Homotopy Method. Chongqing: Chongqing Press, 1990(in Chinese))
- 王宇. 计算机优化同伦算法. 大连: 大连海运学院出版社, 1996 (Wang Yu. Homotopy Optimization Algorithm via Computer. Dalian: Dalian Marine University Press, 1996(in Chinese))
- Allgower EL, Georg K. Numerical Continuation Methods. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1990

9 Gan Quanxie. A new method for solving the coefficient inverse problem of the wave equation. *Communications on*

Pure and Applied Mathematics, 1986, XXXIX: 307~322

HOMOTOPY METHOD FOR INVERSING THE POROSITY OF 1-D WAVE EQUATION IN POROUS MEDIA ¹⁾

Han Hua Zhang Zimao Wang Yuesheng Wei Peijun*

(*Department of Civil Engineering, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China*)

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing 100871, China*)

Abstract According to that the computed and measured response should be fitted, the porosity parameter inversion problem in porous media is reduced to solve a problem of nonlinear equations' zero with the homotopy method in this paper.

The essence of traditional optimum methods such as gradient method, perturbation method or time-convolution regularization iterative method is based on Newton iterative method with local convergence. The homotopy method is a newly developed powerful device for solving nonlinear problems. It is introduced to improve on the convergent state of Newton iterative method. The basic idea of the homotopy method is to construct a homotopy map with a homotopy parameter, then tracking the homotopy path with the homotopy parameter as the variable numerically to yield the solution that is needed.

Because of the complexity of the wave equations in porous media, the associated dynamic problems are often solved by numerical methods. Up to now, a few analytical solutions for these initial-boundary value problems have been obtained. The analytical solution with high theoretical value obtained by Simon (1984) using Laplace integral transform and inverse technique for the transient response of the one-dimensional wave equation in porous media is used to inverse the porosity parameter with the homotopy method in this paper. The Euler predictor-Newton corrector algorithm is taken to tracking the homotopy path. In the end, the inversion results are compared with those computed by the time-convolution iterative method. The numerical results show that the porosity inversion by using the homotopy method is very effective. It is convergent for any arbitrary initial values of porosity very well. It is proved that the homotopy method is a widely convergent method. It not only suits to solve highly nonlinear inverse problems but also suits to get the initial parameter value that is very difficult to obtain.

Key words porous media, parameter inversion, the homotopy method, homotopy parameter, Euler predictor-Newton corrector

Received 3 September 2001, revised 8 October 2002.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19872002) and Doctoral Foundation of Ministry of Education of China (20010004011).