

# 考虑场地介质随机特性的无限域波动分析<sup>1)</sup>

廖松涛 李 杰

(同济大学建筑工程系, 上海 200092)

**摘要** 针对场地介质具有随机特性的无限域地震波动分析问题, 在概率空间中随机反应向量按随机介质场离散所得主导随机变量的正交多项式级数形式展开, 使随机微分方程变换为确定性的扩阶线性方程组; 并在波动有限元模拟技术的基础上, 构造了扩阶透射人工边界公式, 两者结合形成了求解无限域随机介质中波动传播问题的有限元分析方法. 该方法不仅不受基于摄动思想各类方法的久期项的干扰, 而且避免了采用模拟方法时人工边界单元参数样本不均匀所引起的数值计算不稳定问题.

**关键词** 波动, 随机介质, 有限元分析, 扩阶透射人工边界, Monte Carlo 模拟

## 引 言

随机介质场地中, 地震波动传播分析问题中的相关波动观测量应当以其统计特征加以描述. 在声学、电磁学诸多领域内的波动现象分析中, 考虑介质的随机特性对波动传播的影响, 自 20 世纪 50 年代以来一直是人们的关注热点之一<sup>[1,2]</sup>. 考虑场地介质随机特性的无限域地震波动分析问题一般有两类解决方法: 1) Monte Carlo 模拟方法: 首先依据一定算法产生随机介质的样本, 然后利用确定性介质波动数值模拟技术得到波动观测点的响应样本, 重复模拟多次后可在一定精度水平上得到相应的波动统计特征. 2) 各类随机摄动方法, 其共同特征是将随机波动方程的随机算子或随机矩阵按级数展开, 根据同次幂项相等的思想获得一系列递推方程, 由此可以顺序求解均值或二阶矩. 根据不同的摄动展开途径, 又可以将摄动系列方法划分为三类: 第一类为近似解析理论, 直接在随机波动微分方程的基础上, 对线性微分算子进行摄动展开<sup>[3]</sup>; Born 一阶近似方法和多次散射理论等即属于此类. 第二类是随机有限元法, 随着计算机技术的发展, 这类方法在静力分析、动力特征值计算等领域得到了成功, 但一般均未涉及无限域随机介质中波的传播问题<sup>[3,4]</sup>. 第三类为随机边界元法<sup>[5,6]</sup>, 近年来, 人们亦尝试以随机边界元法分析无限域随机介质中波动传播问题, 以边界元模拟无限域的外行波动的能量单向传播. 总的来说, 摄动方法应用方便, 但它要求场地介

质的随机变异性小, 并且存在久期项问题, 随着计算时间的增加, 分析结果的精度将急剧恶化.

无限域地震波动分析是一个能量开放体系的动力分析问题, 本文把考虑场地介质随机特性时的这一问题归结为求解广义随机系统的响应问题, 在确定性波动有限元模拟技术的基础上, 根据随机结构正交展开理论, 将离散介质节点响应随机过程在随机泛函空间中以正交多项式为基函数进行级数展开, 通过引入扩阶透射边界公式考虑随机介质中波动传播分析的人工边界问题, 形成求解无限域随机介质中波动传播的一种分析途径. 文中所给算例表明: 该方法可以避免久期项问题, 与相应 Monte Carlo 方法分析结果吻合良好.

## 1 无限域波动有限元分析

对于无限域内复杂场地的地震波动问题, 应用传统的解析方法难以获得解答, 而波动有限元分析技术以其在模拟复杂场地条件的强适应性及高度的灵活性而在地震近场波动分析中得到广泛应用, 原则上这类方法可用以研究任何复杂介质中的波动分析问题<sup>[7,8]</sup>.

对所关心的近场波动分析区域, 基于有限元离散技术和弹性动力学 Hamilton 变分原理可以写出相应离散网格点的波动运动控制方程

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = R(t) \quad (1)$$

式中  $M$ ,  $C$  及  $K$  分别为计算区域的质量矩阵、阻

2001-07-04 收到第一稿, 2002-01-28 收到修改稿.

1) 国家杰出青年基金资助项目 (59825105).

尼矩阵和刚度矩阵.

为了减小波动分析的计算规模,人们采用各种人工边界模拟场地无限域,其中廖振鹏等人提出的多次人工透射边界是效果较好的一种.多次人工透射边界直接模拟单侧波动的共同运动学特征,假定任意人工边界点及其充分邻近的介质点运动在每一时间步距内可以表示为若干个穿过人工边界向外传播的平面波的叠加,利用高阶误差项同样是行波的波动自变量的函数这一性质,得到如下的多次透射公式

$$\hat{u}_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N T_j \hat{u}_j^{p+1-j} \quad (2)$$

式中  $C_j^N$  为组合计算公式,  $\hat{u}_0^{p+1}$  表示人工边界节点位移向量,  $\hat{u}_j^{p+1-j}$  为与  $\hat{u}_0^{p+1}$  相对应的、由人工边界节点及内部节点位移所组成的向量.注意两者的维数一般不同;它们的上标表示计算时刻,下标为离散网格节点的坐标,  $T_j$  是联系计算点与节点之间的插值矩阵,与计算时所选取的人工波速  $c_a$  有关.

联立 (1),(2) 式即可求解场地地震波动问题.

原本连续且无限的场地介质经过人工边界分隔及离散化处理后,将产生附加频散、寄生振荡等现象,为了保证波动有限元分析的计算精度,离散有限元单元网格尺寸  $\Delta$  一般应当满足

$$\Delta \leq (1/8)\lambda_{\min} \quad (3)$$

其中  $\lambda_{\min}$  为分析中所关心频段内谐波的最短波长.透射人工边界公式中所涉及的人工波速的取值范围为

$$c_a \leq 2c_{\min} \quad (4)$$

式中  $c_{\min}$  为场地介质的最小物理波速,对弹性体而言  $c_{\min}$  为介质的剪切波速.

## 2 随机介质中波动有限元列式的正交展开

考虑结构材料参数的随机特性时,正交展开理论在结构分析领域取得了成功,避免了摄动方法在动力分析中的久期项问题<sup>[9]</sup>.对于通过人工边界分隔的场地波动分析这一开放的广义结构系统,正交展开理论同样适用.

因为介质的随机特性,式(2)所代表的离散波动有限元运动方程中的位移向量  $u$ 、速度向量  $\dot{u}$  以及加速度向量  $\ddot{u}$  均为随机过程.根据正交展开理论,可以在随机泛函空间中将随机位移向量次序正交展

开为以随机正交多项式集合  $H_{l_s}(b_s)$  的级数形式

$$u(b) = \sum_{\substack{0 \leq l_s \leq N_s \\ 1 \leq s \leq R}} X_{l_1 l_2 \dots l_R}(t) \prod_{s=1}^R H_{l_s}(b_s) \quad (5)$$

其中  $b$  表示介质的随机性,  $X_{l_1 l_2 \dots l_R}(t)$  为确定性的待定函数向量,相应的随机速度向量、随机加速度向量可以通过求导运算以类似的形式写出.而(2)式同时可以展开为随机矩阵方程列式

$$\left( M_0 + \sum_{i=1}^{N_m} M_i b_i \right) \ddot{u} + \left( C_0 + \sum_{i=1}^{N_c} C_i b_i \right) \dot{u} + \left( K_0 + \sum_{i=1}^{N_k} K_i b_i \right) u = R(t) \quad (6)$$

式中,  $M_0, C_0, K_0$  为均值质量矩阵、均值阻尼矩阵及均值刚度矩阵;  $N_m, N_c, N_k$  分别为质量随机场、阻尼随机场和刚度随机场所考虑的独立随机变量个数;  $M_i, C_i, K_i$  分别为结构体系的均方差质量矩阵、均方差阻尼矩阵和均方差刚度矩阵.

正交多项式集合有如下的递推关系和正交特性

$$b \cdot H_i(b) = \alpha_i H_{i-1}(b) + \beta_i H_i(b) + \gamma_i H_{i+1}(b) \quad (7)$$

$$E \left[ \prod_{i=1}^R H_{l_i}(b_i) \cdot \prod_{i=1}^R H_{k_i}(b_i) \right] = \delta_{l_i k_i} \quad (8)$$

在(6)式的基础上,对  $\prod_{i=1}^R H_{l_i}(b_i)$  的每一种组合均可运用以上关系式并得到  $n$  个确定性方程组,将其组集起来即可形成考虑介质随机特性的离散波动运动方程的扩阶整体矩阵

$$A_M \ddot{X} + A_C \dot{X} + A_K X = F(t) \quad (9)$$

由于正交多项式的总组合数为  $M_R = \prod_{s=1}^R (N_s + 1)$  (其中  $R$  为所考虑独立随机变量的总数,  $N_s$  为每个随机变量的正交多项式展开项数),扩阶矩阵的阶数为  $n \cdot M_R$ .有关各扩阶矩阵的详细表达可以参见文献<sup>[9]</sup>.

对于无限域随机介质波动问题,还需要考虑人工边界.介质的随机特性同样使人工边界节点响应

向量为随机过程，将 (5) 式代入 (1) 式，有

$$\sum_{\substack{0 \leq l_s \leq N_s \\ 1 \leq s \leq R}} \hat{X}_{l_1 l_2 \dots l_R}(t) \Big|_0^{p+1} H_{l_s}(b_s) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N T_j \cdot \sum_{\substack{0 \leq l_s \leq N_s \\ 1 \leq s \leq R}} \hat{X}_{l_1 l_2 \dots l_R}(t) \Big|_j^{p+1-j} H_{l_s}(b_s) \quad (10)$$

因为现有的各类正交基函数均有如下性质

$$H_0(b_s) \equiv 1.0$$

故结合期望运算性质 (8) 式，有

$$E[H_{l_i}(b_i)] = E[H_0(b_i) \cdot H_{l_i}(b_i)] = \begin{cases} 0, & l_i \neq 0 \\ 1, & l_i = 0 \end{cases} \quad (11)$$

对于 (10) 式中正交多项式计算式  $\prod_{i=1}^R H_{l_i}(b_i)$  的每一组合，应用  $R$  次期望运算，经过整理可以得到如下确定性的代数关系式

$$\hat{X}_{l_1 l_2 \dots l_R}(t) \Big|_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N T_j \cdot \hat{X}_{l_1 l_2 \dots l_R}(t) \Big|_j^{p+1-j} \quad (12)$$

总共可得到  $M_R$  个相似的表达式，其中上下标的意义和公式 (2) 相同。与扩阶方程相对应，我们称 (12) 式为扩阶透射边界公式。根据扩阶方程及扩阶透射边界公式可以求解相应的扩阶待定函数  $X_{l_1 l_2 \dots l_R}(t)$ ，

利用 (8) 式所表示的正交多项式基函数系性质，可以写出波动观测量的均值以及方差等统计特征。

对于观测点的位移响应矢量，其均值为

$$E[u(b)] = X_{00 \dots 0}(t) \quad (13)$$

协方差矩阵可写成

$$\begin{aligned} \text{cov}[u(b), u(b)] &= \\ E[u(b)u(b)^T] - E[u(b)]E[u(b)^T] &= \\ \sum_{\substack{1 \leq l_s \leq N_s \\ 1 \leq s \leq R}} X_{l_1 l_2 \dots l_R}(t) X_{l_1 l_2 \dots l_R}^T(t) & \quad (14) \end{aligned}$$

由之可以得到位移响应矢量的方差表示

$$\text{var}[u(b)] = \sum_{\substack{1 \leq l_s \leq N_s \\ 1 \leq s \leq R}} X_{l_1 l_2 \dots l_R}^T(t) X_{l_1 l_2 \dots l_R}(t) \quad (15)$$

依据相同的原理可以推导得到波动观测点的速度或加速度响应矢量的统计特征表达式，兹不赘述。

### 3 算例

为了说明本文方法的可行性，考虑一弹性半空间场地在某一点振源下的波动响应问题。为此，取如图 1 所示场地模型作为计算示例，通过人工边界将该场地分隔为宽 200m，高 100m 的计算区域，模型的两竖直边界与底部边界均采用二阶透射人工边界。假定在点  $K$  处有一确定性振源作用，这里采用实际的地震记录。场地质量密度取为  $1000 \text{kg/m}^3$ ，弹性模量为  $1.524 \times 10^9 \text{Pa}$ ，泊松比为 0.1669，则所

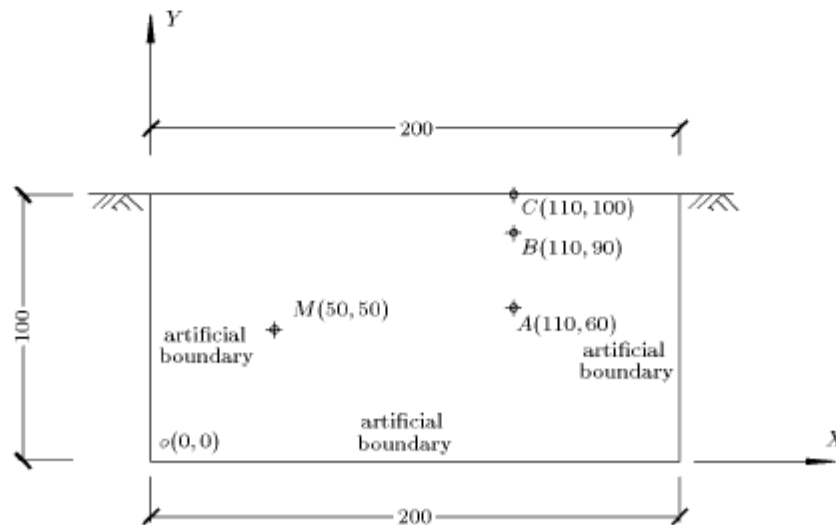


图 1 场地计算模型 (单位: m)  
Fig.1 Computational model (unit:m)

对应的 SV 剪切波速为 808m/s，P 波波速为 1278m/s。采用 10m×10m 的有限元网格对计算区域进行离散，积分步长取为 0.007s。考虑场地介质的弹性模量具有随机性，并以均匀、各向同性随机场的形式表述，假定该物理参数的变异系数为 22.47%，其相关长度为 100.0m。由于弹性模量的随机特性，场地的各种波速必然具有随机性。

对上述该算例同时进行正交展开分析和 Monte Carlo 模拟。当进行正交展开分析时，利用局部平均法将弹性模量随机参数场离散化为一组随机变量集  $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m\}$ ，离散网格与有限元分析网格相同；采用相关结构分解技术把该随机变量集转换为独立随机变量序列  $\{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ ，并取前 2 个独立随机变量表述原离散随机变量集的主导特征。

为了检验取 2 个独立随机变量的合理性，设局部平均随机场的随机变量集对应的协方差矩阵记为  $C_c$ ，最后截取的标准独立随机变量集的协方差矩阵  $C_b$  为

$$C_b = \Phi_{m \times q} A_{q \times q} \Phi_{q \times m}^T \quad (16)$$

式中  $\Phi_{m \times q}$  表示由  $q$  个截断特征向量组成的矩阵， $A_{q \times q}$  表示  $q$  阶特征值对角矩阵，这里  $q=2$ 。协方差矩阵  $C_c$  与  $C_b$  之间的相对误差为

$$\delta = \frac{\|C_c\| - \|C_b\|}{\|C_c\|} \quad (17)$$

式中范数种类可以选用 Frobenius 范数。即对一个  $m \times n$  的矩阵  $C$  而言，相应的 Frobenius 范数定义为

$$\|C\| = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (18)$$

通过计算，本文算例的协方差之间的相对误差为 3.011%，所以可以认为对该算例而言，2 个独立随机变量完全能够表述原离散随机变量集的主导特征。

以上述分析场地中的 3 个波动观测点 A, B, C 为例进行分析。当不考虑透射人工边界区域单元的弹性模量的随机特性时，图 2, 图 3 以及图 4 依次给

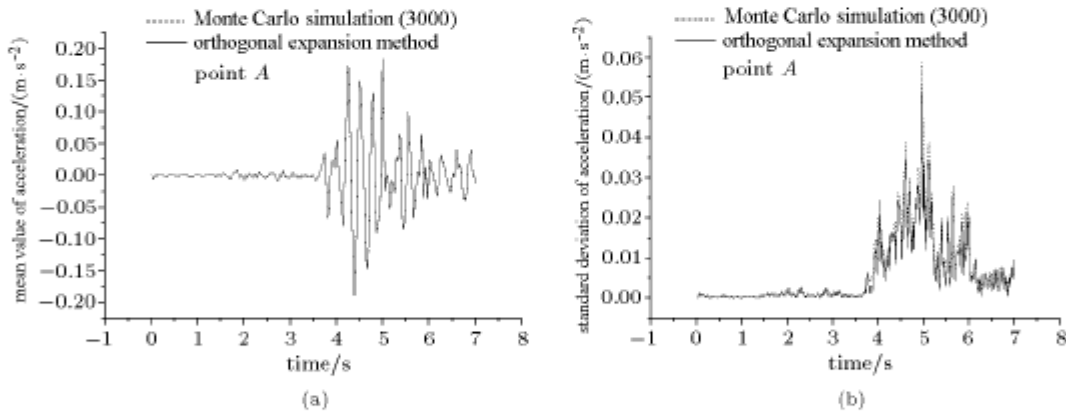


图 2 波动观测点 A 的均值响应曲线及相应的标准差

Fig.2 Response mean curves and corresponding standard deviation for wave observation point A

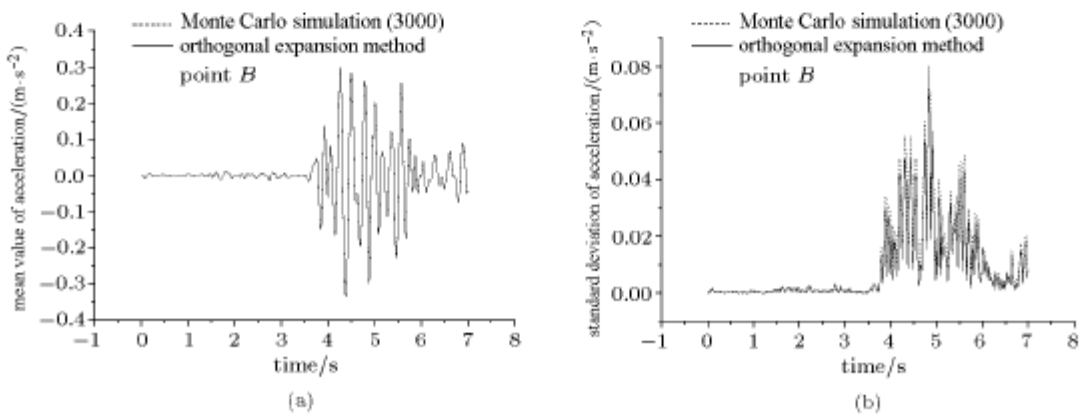


图 3 波动观测点 B 的均值响应曲线及相应的标准差

Fig.3 Response mean curves and corresponding standard deviation for wave observation point B

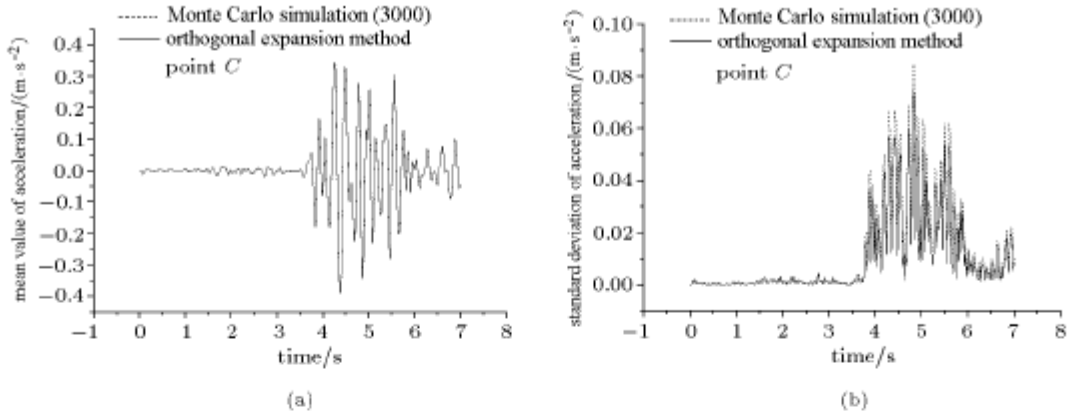


图 4 波动观测点 C 的均值响应曲线及相应的标准差

Fig.4 Response mean curves and corresponding standard deviation for wave observation point C

出了 A, B, C 点的均值响应曲线和标准差响应曲线, 各图中同时绘出了正交展开分析结果与 3000 次 Monte Carlo 模拟分析结果. 从图中可以看出, 两种方法的分析结果吻合相当良好, 扩阶方法的分析结果没有久期项的干扰.

值得指出的是, 简单采用随机模拟方法进行波动分析将导致错误的分析结果. 图 5 是当人工边界区单元的弹性模量采用模拟样本时 C 点的 500 次模拟计算结果, 可见标准差反应曲线随时间增大而迅速扩大, 显然此种现象是由数值计算上的不稳定造成的, 结果没有可信度. 有鉴于此, 在图 2 至图 4 的分析中均假定人工边界区域各单元的物理参数不存在随机性. 事实上, 在进行确定性有限元波动分析时, 多次透射人工边界要求沿人工边界法线方向上的介质是均匀的. 在波动分析时采用随机模拟方法产生人工边界区域单元的样本将无法满足这一条

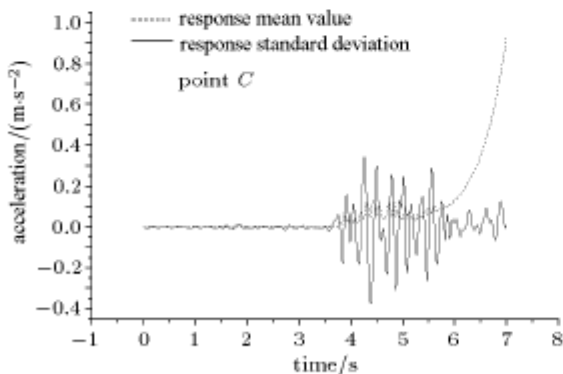


图 5 考虑人工边界区单元随机特性时的 C 点 Monte Carlo 模拟计算结果 (500)

Fig.5 The result of Monte Carlo simulation (500) for point C when the randomness of the elements in ABC field is considered

件, 因而必然得到错误的波动分析结果. 亦即是说, 人工边界区域单元法线方向介质均匀这一条件决定了当采用基于多次透射人工边界的随机模拟波动分析技术进行随机介质中波动传播分析时, 无限域问题将无法得到有效地处理.

本文所建议的方法并不存在 Monte Carlo 模拟方法的上述问题, 当采用扩阶多次透射边界公式对随机介质无限域进行描述时, 从数值计算这一角度来看, 公式 (12) 表示的扩阶多次透射人工边界公式所涉及的人工边界区单元计算参数是“沿人工边界法线方向均匀”的, 不会引起计算结果的畸变. 图 6 是考虑人工边界区单元随机特性的正交展开分析结果, 作为比较, 图中还给出了不考虑人工边界区单元随机特性时的结果; 从该图可以看出, 考虑人工边界区单元随机特性时正交展开分析结果不存在类似 Monte Carlo 模拟方法中响应标准差随时间而迅速增大的畸变现象. 并且, 考虑人工边界区单元随机特性时的均值响应与不考虑人工边界区单元随机特性时的分析结果十分吻合, 但对标准差而言, 则前者明显高于后者. 这正是我们所预期的: 人工边界区域单元的随机特性代表了整个计算区外无限域场地介质的随机特性, 因而必然增大波动观测量的变异性.

### 4 结 论

针对考虑场地介质的随机特性的无限域地震波动分析问题, 本文在确定性波动有限元模拟技术的基础上, 将随机结构正交展开理论应用于能量开放体系动力分析问题, 引入扩阶透射边界公式以反映随机介质无限域, 形成了一种新的分析方法. 为了

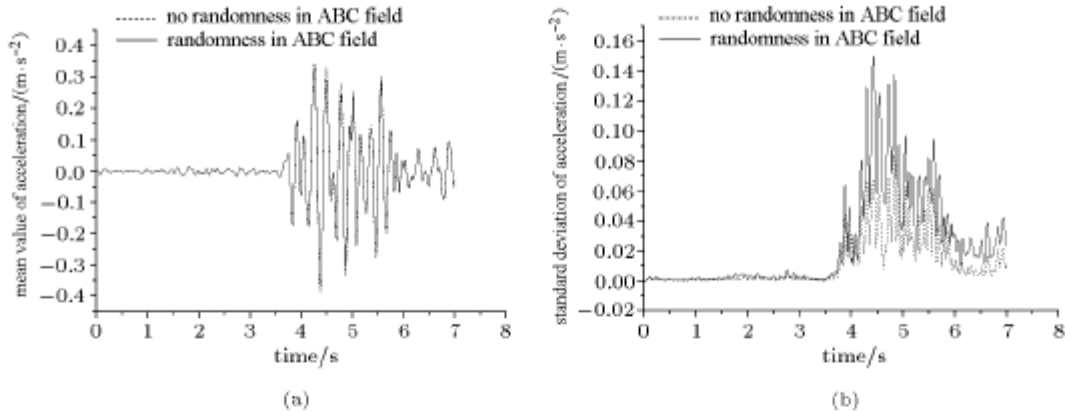


图 6 考虑人工边界区单元介质随机特性的正交展开分析结果

Fig.6 The result of orthogonal expansion method for point C when the randomness of the elements in ABC field is considered

检验该方法的合理性,在确定性波动有限元基础上以 Monte Carlo 模拟方法给出波动观测量的响应均值、标准差计算结果。比较分析表明:扩阶透射人工边界公式可以有效描述无限域中波动单向传播的特性。与摄动分析方法相比,本文方法分析结果不受久期项问题的干扰。同时,本文方法避免了采用基于多次透射人工边界有限元分析技术模拟无限域随机介质波动传播问题时的数值计算不稳定现象。

但是,由于所得的扩阶方程的阶数远大于波动离散系统的自由度,并且因为能量开放系统无法应用基于振动模态的动力聚缩方法,所以需要进一步寻求降低问题求解计算成本的途径。

### 参 考 文 献

- 1 Sobczyk K. Stochastic Wave Propagation. Warsaw: PWN-Polish Scientific Publishers, 1985. 248
- 2 Uscinski BJ. The Elements of Wave Propagation in Random Media. New York: McGraw-Hill, 1977. 153
- 3 Faccioli E, Tagliani A. Attenuation analysis of high frequency SH waves in random media by finite differences, Proceedings of Ninth World Conference on Earthquake Engineering, Vol. VIII, Paper SA-2. Tokyo, 1989. 25~30
- 4 Manolis GD, Shaw RP. Harmonic wave propagation through visco-elastic heterogeneous media exhibiting mild stochasticity—II. Applications. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1996, 15 (2): 129~139
- 5 Burczynski T, Skrzypczyk J. Theoretical and computational aspects of the stochastic boundary element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, 168(1-4): 321~344
- 6 向家琳,姚振汉,杜庆华.弹性半平面中SH波动问题的随机边界元法及其应用.清华大学学报(自然科学版),1996,36(10):56~61 (Xiang Jialin, Yao Zhenhan, Du Qinghua. Stochastic boundary element method and its applications to SH wave propagation in half plane. *Journal of Tsinghua University (Sci & Tech)*, 1996, 36(10): 56~61 (in Chinese))
- 7 Smith WD. The application of finite element analysis to body wave propagation problems. *Geophys J R Astr Soc*, 1975, 42(9): 747~768
- 8 廖振鹏.工程波动理论导引.北京:科学出版社,1996.322 (Liao Zhenpeng. An Introduction to Wave Theory in Engineering. Beijing: Science Press, 1996. 322 (in Chinese))
- 9 李杰.随机结构系统——分析与建模.北京:科学出版社,1996.297 (Li Jie. Stochastic Structural System—Analysis and Modeling. Beijing: Science Press, 1996. 297 (in Chinese))

## INFINITE DOMAIN WAVE MOTION ANALYSIS IN RANDOM MEDIA<sup>1)</sup>

Liao Songtao Li Jie

(*Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China*)

**Abstract** The random parameter field is discretized into random variables which are expanded in the form of orthogonal polynomials in probability space, and the random differential wave equation is transformed into deterministic linear order-expanded equations. An order-expanded multi-transmitting artificial boundary formula is also derived based on the finite element simulation of wave motion. The combination of the deterministic order-expanded equations and the order-expanded multi-transmitting artificial boundary formula can provide a method to analyze the problem of wave motion analysis in infinite domain with uncertainty in site. Not only is this method free from the secular problem of the corresponding methods which are based on perturbation idea, but also it avoid the numerical instability resulted from the heterogeneity of the ABC elements samples when the Monte Carlo simulation method is used.

**Key words** wave motion, random media, finite element analysis, order-expanded multi-transmitting artificial boundary, Monte Carlo simulation

---

Received 4 July 2001, revised 28 January 2002.

1) The project supported by the National Outstanding Youth Science Fund of China (59825105).