

# 动态油膜 - 柔性转子的分岔与混沌<sup>1)</sup>

于洪洁 吕和祥

(大连理工大学工程力学系工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

**摘要** 研究非稳态动载短轴承支撑的 Jeffcott 柔性转子系统的动力特性, 将转速比、不平衡量、阻尼比、黏度作为控制参数, 利用 Floquet 乘子预测周期解的局部稳定性, 通过 Lagrange 插值精细积分法给出系统运动的数值结果并预测系统的长期性态, 显示系统在 4 个参数组合的某些范围内还存在多形式次谐波解, 以及由倍周期分岔、二次 Hopf 分岔通往混沌的现象. 将动态油膜力模型和稳态油膜力模型的数值结果进行比较, 表明动态非线性油膜力模型的合理性.

**关键词** 柔性转子, 动态油膜, 精细积分, 分岔, 混沌

## 引 言

近年来随着非线性动力学的发展, 对各类转子系统的非线性研究已有大量文献见诸于世. Li 和 Taylor<sup>[1]</sup>1987 年研究了刚性转子 - 挤压油膜阻尼器系统的非同步运动. Zhao 和 Linnett<sup>[2]</sup>1994 年对柔性转子 - 挤压油膜器的不平衡响应稳定性和分岔进行了研究. Zheng 和 Hasebe<sup>[3]</sup>1999 年有效地分析了具有局部非线性的高阶柔性转子系统的动力特性. 文献 [4] 提出动态  $\pi$  油膜的新模型, 文献 [5] 从动态油膜力模型出发, 数值模拟研究了短轴承 - 刚性转子的分岔和混沌特性, 与  $\pi$  油膜空穴模型的模拟结果比较, 证明该动态  $\pi$  油膜模型的合理性.

本文以动态  $\pi$  油膜轴承 - 柔性转子系统作为研究对象, 采用打靶法和 Floquet 乘子理论求周期解及周期解的局部稳定性. 针对系统的强非线性, 采用一个 Lagrange 插值数值精细积分法求系统的运动微分方程<sup>[6]</sup>, 借助于轴心轨迹图、Poincaré 映射图、分岔图等分析系统的全局性态和混沌性态, 并考虑了转速比、不平衡量、阻尼比、黏度等参数对系统特性的影响, 显示许多有趣现象. 与稳态  $\pi$  油膜模型的数值结果进行了比较, 显示了动态油膜的合理性.

## 1 周期解的局部稳定性

一个中间圆盘质量为  $m$  的柔性轴 Jeffcott 转子, 两端支承在润滑油膜轴承上, 系统模型简图示于图 1, 考虑非稳态非线性油膜力, 系统的无量纲运动微分方程如下

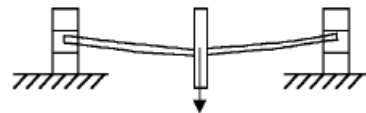


图 1 动态油膜 - Jeffcott 柔性转子系统模型图  
Fig.1 Flexible Jeffcott rotor system model

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \frac{2D_e}{\Omega} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \frac{1}{\Omega^2} \begin{Bmatrix} X - X_1 \\ Y - Y_1 \end{Bmatrix} = U \begin{Bmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{G} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1a)$$

2001-06-25 收到第一稿, 2002-03-12 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金重大项目 (19990510) 资助.

$$\frac{1}{\Omega^2} \begin{Bmatrix} X - X_1 \\ Y - Y_1 \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} \quad (1b)$$

上述式中  $X_1, Y_1$  为无量纲轴颈中心横向位移,  $X$  和  $Y$  为无量纲盘心横向位移,  $D_e$  为外阻尼比,  $\bar{G}$  为无量纲重力,  $\omega$  为转速,  $\omega_n$  为转子系统的一阶临界转速,  $\Omega$  为转速比 ( $\omega/\omega_n$ ),  $\tau$  为无量纲时间 ( $\omega t$ ),  $F_X$  和  $F_Y$  为非稳态非线性无量纲油膜力

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = B \left( \hat{C} \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \end{Bmatrix} + \hat{K} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} \right), \quad B = 6\mu LR^3/m\Omega\omega_n\delta^3$$

$\delta$  为轴颈与轴承的间隙,  $\mu$  为油的黏度,  $L$  和  $R$  为轴颈长和轴截面半径,  $\hat{C}$  和  $\hat{K}$  为非线性油膜力的瞬态阻尼阵, 刚度阵, 详见文献 [4]. 方程组 (1) 降为一阶微分方程组, 写成矩阵形式

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{H}\mathbf{w} + \mathbf{g}(\tau, \mathbf{w}, \Omega) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)^T = (X, \dot{X}, Y, \dot{Y}, X_1, Y_1)^T$  为方程组 (1) 的运动状态变量, 向量  $\mathbf{g}(\tau, \mathbf{w}, \Omega)$  与时间及系统状态变量有关, 是非线性函数. 采用求解非线性动力学积分方程的 Lagrange 三次插值精细积分法 [6], 求时刻  $\tau = \tau_{k+1} = \tau_k + \Delta\tau$  时的解

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{k+1} = & \mathbf{T} \{ \mathbf{w}_k + \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{r}_0 + \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{H}^{-1} (2\mathbf{r}_2 + 6\mathbf{H}^{-1}\mathbf{r}_3))] \} - \\ & \mathbf{H}^{-1} \{ \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1\Delta\tau + \mathbf{r}_2\Delta\tau^2 + \mathbf{r}_3\Delta\tau^3 + \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2\Delta\tau + \\ & 3\mathbf{r}_3\Delta\tau^2 + \mathbf{H}^{-1} (2\mathbf{r}_2 + 6\mathbf{r}_3\Delta\tau + 6\mathbf{H}^{-1}\mathbf{r}_3)] \} + O(\Delta\tau^5) \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{r}_j (j = 0, 1, 2, 3)$  是用插值点函数值  $\mathbf{g}_i(\tau, \mathbf{w}, \Omega)$  表示的, 矩阵  $\mathbf{T} = \exp(\mathbf{H} \cdot \Delta\tau)$ .

由拟牛顿打靶法计算周期为  $T$  的周期系统 (1) 的周期解, 并利用 Floquet 理论求得标准基解矩阵  $\mathbf{W}(T)$ , 矩阵  $\mathbf{W}(T)$  的特征值  $\lambda_i$  即为周期解的 Floquet 乘子, 通过主导 Floquet 乘子  $|\lambda_1|$  位于复平面上单位圆的里外, 可判断周期解的局部稳定性 (不稳定性). 图 2(a) 显示了  $D_e = 0.1$ ,  $\mu = 5.68 \times 10^{-3}$ ,  $U = 0.1, 0.3, 0.5$  时  $|\lambda_1|$  随转速比变化的情况, 当  $U = 0.1, U = 0.3$ , 系统只有拟周期分岔,  $\lambda_1$  以一对复共轭形式离开单位圆, 周期解分岔变为拟周期运动, 此又为第二 Hopf 分岔, 这主要是油膜失稳造成的. 而当  $U = 0.5$ , 系统除了在  $\Omega = 2.81$  发生拟周期分岔外, 在  $\Omega = 0.95$  处,  $\lambda_1$  从  $(-1, 0)$  离开复平面上的单位圆, 发生倍周期分岔,  $\Omega = 1.0$  时轴颈中心的运动轨迹图示于图 2(b), 其中  $U = 0.5$  时的轨迹是二圈叠连的倍周期运动. 可见一定量的质量偏心导致了倍周期分岔.

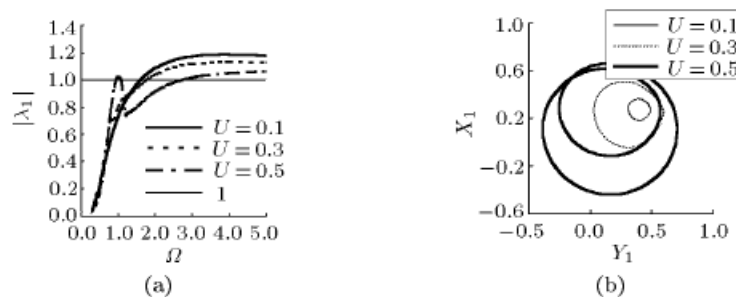


图 2 主导 Floquet 乘子与转速比关系图及轴心轨迹图

Fig.2  $|\lambda_1|$  VS  $\Omega$  and the trajectory of shaft center plot

图 3(a), (b) 给出了  $\Omega = 2.9(U = 0.1, 0.5)$  时轴颈中心发生拟周期运动的轨迹图, 可见油膜失稳后,  $U$  的增加并没有对拟周期运动起到抑制作用, 反而加强.

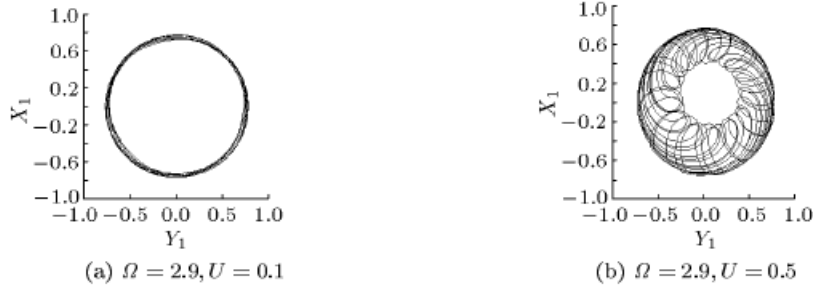


图 3 轴颈中心轨迹

Fig.3 The trajectory of shaft center plot

### 2 参数空间内系统动力特性研究

系统存在一定质量的偏心会导致倍周期分岔的产生, 而从提高油膜临界失稳转速来看, 较大的不平衡具有增稳作用. 如果  $U = 0$ , 系统在失稳转速之前, 轴颈中心总是回到稳定的平衡点, 在油膜失稳点发生 Hopf 分岔之后, 系统作拟周期运动; 如果  $U \neq 0$ , 系统在参数的一定范围内作同频周期运动, 而在参数的某些范围内, 系统运动可能发生分岔. 下面还选取系统的外部控制参数  $D_e, \mu$ , 在较宽的参数范围内研究系统的局部稳定性和长期性态.

取参数  $U = 0.3, \mu = 5.68 \times 10^{-3}$ , 改变阻尼比  $D_e$ , 将  $D_e = 0.03, 0.05, 0.1$  时  $|\lambda_1|$  与  $\Omega$  的关系曲线绘于图 4 中, 可看出较大的  $D_e$  对拟周期分岔具有抑制作用, 油膜临界失稳转速有较大的提高.  $D_e = 0.03, D_e = 0.05$  时, 系统有倍周期分岔发生.  $D_e$  越低, 倍周期分岔范围越大, 由此可知较大的  $U$  和较小的  $D_e$ , 系统运动越容易产生倍周期分岔. 用 Poincaré

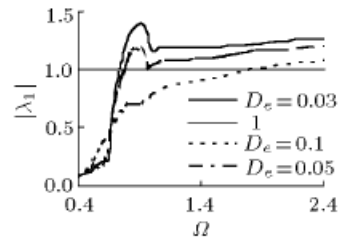


图 4 Floquet 乘子与转速比的关系

Fig.4  $|\lambda_1|$  VS  $\Omega$

映射图和分岔图去检验图 4 的结果, 发现当  $D_e = 0.03$ , 数值模拟结果显示出 Floquet 乘子所体现不出来的系统特性, 图 5(a) 的分岔图显示了在  $\Omega = 1.199$ , 系统由倍周期分岔运动进入混沌

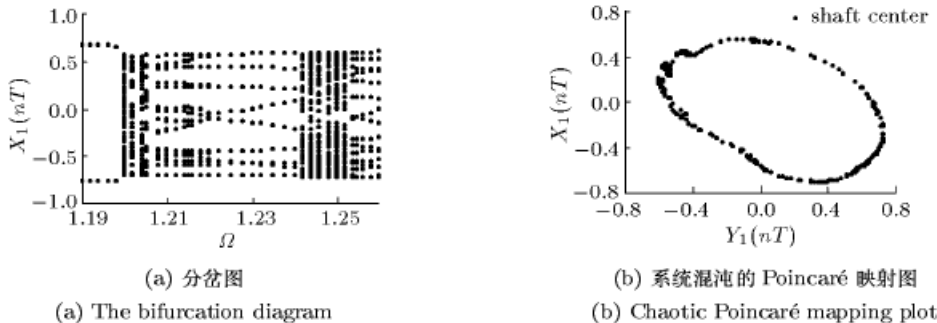


图 5 分岔图及 Poincaré 映射图

Fig.5 The bifurcation diagram and chaotic Poincaré mapping plot

区域, 混沌区域内有周期 9 窗口和周期 16 窗口. 当  $\Omega = 1.2817$ , 系统进入拟周期运动, 图 5(b) 是  $\Omega = 1.2$  时系统混沌的 Poincaré 映射图.

令  $\Omega = 1.2, U = 0.3$ , 将  $D_e$  作控制参数, 作  $\mu = 1.68 \times 10^{-3}$  时响应随  $D_e$  变化的分岔图, 如图 6(a), 可以看到  $D_e$  有一个阈值 (threshold), 在此值以下, 系统表现出丰富的非线性特性, 除倍周期和拟周期运动外, 还有周期 5, 7, 9 等周期运动, 甚至有周期 16 窗口、周期 5 窗口发生倍周期化形成混沌的区域. 在阈值以上, 系统均作同频周期运动. 将  $D_e = 0.029$  时, 混沌的 Poincaré 映射图示于图 6(b), 这是由周期 5 倍周期分岔形成的.

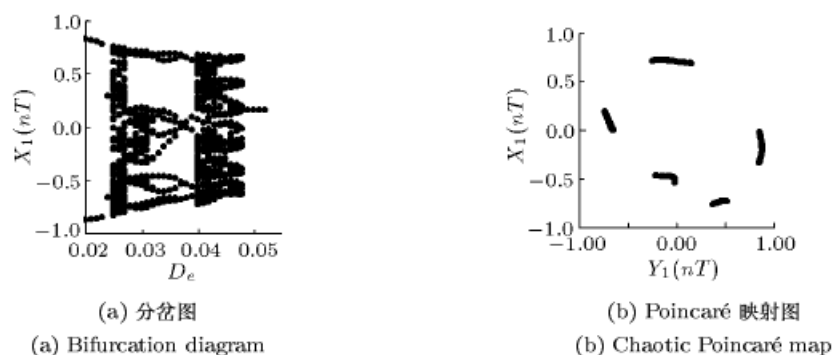


图 6 分岔图及 Poincaré 映射图

Fig.6 The bifurcation diagram and chaotic Poincaré mapping plot

取  $\Omega = 1.2, U = 0.3, D_e = 0.04$ , 将黏度系数  $\mu$  作为控制参数, 作系统运动的分岔图, 系统在  $\mu = 1.526 \times 10^{-2}$  为阈值, 在此值以下存在拟周期运动、多形式周期运动及混沌运动. 当  $\mu = 0.85 \times 10^{-3}$ , 倍周期解发生第二 Hopf 分岔, 变为拟周期运动, 见图 7(a), 图中 Poincaré 映射为两个独立的封闭环,  $\mu = 0.768 \times 10^{-3} \sim 0.73 \times 10^{-3}$ , 环面破裂发生二次 Hopf 分岔, 导致混沌现象出现, 见图 7(b). 由此可见, 系统运动由倍周期运动经拟周期分岔、二次 Hopf 分岔通向混沌区域的途径.  $\mu$  在阈值以上为和外激励同步的周期运动.

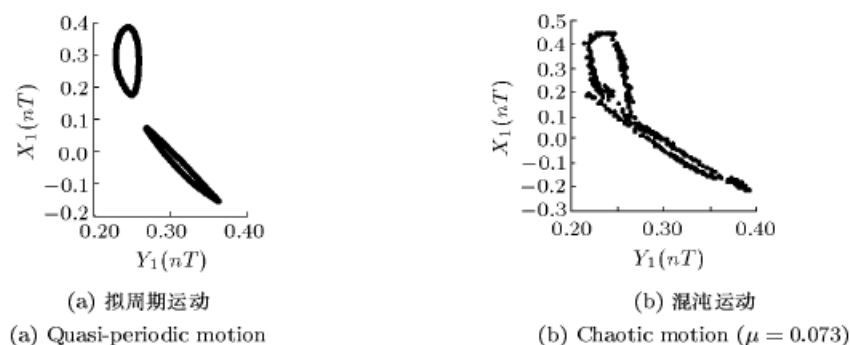


图 7 Poincaré 映射图

Fig.7 Poincaré mapping plot

### 3 讨论和结论

本文对不同的不平衡参数, 分别采用动态和稳态油膜力两种模型得到的油膜失稳转速  $\Omega_c$ .

列于表 1, 从中可看到  $U$  较小 ( $U = 0.01$ ) 的情况下, 两种模型得到的  $\Omega_c$  是一致的, 但随着  $U$  的增加, 稳态油膜力模型得到的  $\Omega_c$  呈快速下降趋势, 动态油膜力模型  $\Omega_c$  远大于稳态油膜力模型并随  $U$  的增加而提高, 与文献 [5] 中的结论是一致的.

表 1 不同  $U$  下油膜失稳转速比  $\Omega_c$

Table 1  $\Omega_c$  for different  $U$

$U$	0.01	0.05	0.1	0.3	0.4
steady model $\Omega_c$	1.60	1.583	1.52	0.84	0.66
dynamic model $\Omega_c$	1.60	1.589	1.61	1.81	2.18

利用理论与数值方法, 在较宽的参数范围内, 研究了动态油膜 - 不平衡柔性转子系统运动的局部稳定性、分岔和全局性态. 数值方法可分析周期解分岔以后系统随参数变化的动力特性, 这是 Floquet 乘子理论的局限性. 大量的数值计算表明系统在一定的参数范围内具有丰富的非线性特性, 本文观察到倍周期分岔、拟周期环面破裂产生混沌的途径. 不平衡参数、阻尼比及黏度越大, 对系统的非同步运动就越具有抑制作用, 能提高油膜失稳转速.

### 参 考 文 献

- 1 Li XH, Taylor DL. Nonsynchronous motion of squeeze film damper systems. *ASME Journal of Tribology*, 1987, 109: 169~176
- 2 Zhao JY, Linnett IW, McLean LJ. Stability and bifurcation of unbalanced response of a squeeze film damped flexible rotor. *ASME Journal of Tribology*, 1994, 116: 361~368
- 3 Zheng TS, Hasebe N. An efficient analysis of high-order dynamical system with local nonlinearity. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1999, 121: 408~416
- 4 Zhang Wen, Zhang Huisheng, Xu Xiaofeng. Study of general nonlinear formula of oil-film force acting on a journal with unsteady motion. In: *Asia-Pacific Vibration Conferences, Korea 1997*. 9~13
- 5 徐小峰, 张文. 一种非稳态油膜力模型下刚性转子的分岔和混沌特性. *振动工程学报*, 2000, 13(6): 247~252 (Xu Xiaofeng, Zhang Wen. Bifurcation and chaos of rigid unbalance rotor in short bearings under an unsteady oil-film force model. *Journal of Vibration Engineering*, 2000, 13(6): 247~252(in Chinese))
- 6 吕和祥, 于洪洁, 裘春航. 精细积分的非线性动力学积分方程及其解法. *固体力学学报*, 2001, 22(3): 303~308 (Lü Hexiang, Yu Hongjie, Qiu Chunhang. An integral equation of non-linear dynamics and its solution method. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2001, 22(3): 303~308 (in Chinese))

## THE BIFURCATION AND CHAOS OF THE FLEXIBLE ROTOR SYSTEM WITH DYNAMIC $\pi$ -OIL FILM BEARING SUPPORTS<sup>1)</sup>

Yu Hongjie    Lü Hexiang

(*Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China*)

**Abstract** The dynamics behaviors of the flexible Jeffcott rotor system supported by unsteady short dynamic journal bearing are investigated. Based on nonlinear unsteady-state dynamic  $\pi$ -oil film force model described by three functions the local stability of the periodic solutions with the controlling parameters, rotational speed ratio, imbalance amount, damping ratio and viscosity, is predicted by using Floquet multiplier. It is found that the period doubling bifurcation is caused by a certain imbalance amount and the Hopf bifurcation is created by the lost stability of the oil-film. By means of the precise integration method with Lagrangian interpolation the trajectory of the shaft center, the Poincaré mapping and the bifurcation graphs are given numerically. The results predicted by the Floquet theory are checked and the long term dynamic behavior of the system is predicted. It is shown that the system has rich nonlinear behaviors at some combination of the four parameters, for examples, multi-frequency subharmonic resonance, as well as chaos phenomenon from doubling bifurcation and twice Hopf bifurcation. Using analytical and numerical methods the local stability, the bifurcation and long term behaviors of the imbalance rotor dynamic system are investigated in a wide range of various parametric configurations. It is concluded the results show that the results of both of the two methods are the same for analyzing local stability of the periodic solutions but after the bifurcation of the periodic solutions the dynamic behaviors of the system with the parameters changed only can be analyzed by numerical method. This is the limitations of the Floquet theory. Combining both methods some suggests on the design parameters of oil-film bearing-flexible rotor system can be offered. Comparing the results for the dynamic oil-film force model to for steady the rationality of the dynamic oil-film force model is noted. The computation results show that the more the imbalance amount, damping ratio and the viscosity, the more the no-synchronization motions of the system will be restrained. The rotational speed of the oil-film lost stability is increased.

**Key words** flexible rotor, dynamic-film, precise integration, bifurcation, chaos

---

Received 25 June 2001, revised 12 March 2002.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China(19990510).