

弱连续条件下的九参三角形板元

何东升 唐立民

(大连理工大学工程力学系, 大连 116023)

摘要 首先对薄板弯曲平衡方程的弱形式进行了推导, 导出保证单元收敛的弱协调条件, 即三角形顶点函数值连续和三边的法向导数积分连续这两个条件; 对比拟协调元、广义协调元和双参数法中所使用的 3 个积分连续条件, 本条件更弱; 再对这 3 个积分协调条件的构成方法进行了总结和分析, 现有采用积分连续条件构造的有限元大都采用了这些构成方法. 采用弱协调条件构造有限元, 比原来的构造范围更广, 并以此构造出几种单元作为算例. 采用这种构成法还可构造多种单元, 它们都具有采用最小势能原理法构成有限元的简便的优点, 并在任意网格下收敛到真解.

关键词 九参三角形板元, 弱连续, 有限元法, 薄板弯曲, 广义协调元, 双参数法

引 言

我国的力学、数学家们在有限元的薄板弯曲方向作出了许多贡献^[1~4], 他们的工作大多是放松薄板弯曲的 C_1 连续条件为积分连续或加权积分连续条件. 众所周知, 在构造位移法有限元时, 我们是从弹性力学微分方程的等效积分形式即弱形式出发、通过分部积分再引入强连续(逐点连续)条件而得出最小势能原理的. 这里使用的是微分方程的“弱”形式和连续条件的“强”形式, 这一“强”—“弱”似乎不对称. 既然微分方程可以使用“弱”形式, 那连续条件也应该可以使用“弱”形式, 而与微分方程的等效积分形式(弱形式)相应的连续条件的“弱”形式正是单元边界的积分连续或加权积分连续条件. 这种对称地使用弱形式并不是一个猜想, 拟协调元、广义协调元和双参数法正是利用单元间的弱连续条件得出的. 这种弱连续条件其实是积分连续条件, 进一步研究表明, 连续性条件还可以放松, 因而可以扩大 C_1 连续有限元的构造空间.

1 薄板弯曲弱协调条件的导出

C_0 问题的连续性要求是很容易满足的, 例如采用 Lagrange 型插值函数就可以构造 C_0 连续的位移函数. 对薄板弯曲, 单元间不仅需要位移连续而且还需要导数连续, 即 C_1 连续, 采用低阶插值是不容易满足这种要求的. 所以这里只讨论 C_1 连续问题的薄板弯曲的弱协调条件, 薄板弯曲的平衡微分方程为

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (1.1)$$

该方程的弱形式即等效积分形式为

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q \right) V d\Omega = 0 \quad (1.2)$$

式中 V 为检验函数. 如果 V 是任意的, 那么加权积分平衡式 (1.2) 又变成式 (1.1), 即在域内逐点满足平衡微分方程. 当 $V = 1$ 时, 我们认为式 (1.2) 才是最基本的平衡方程, 因为微分方程本身是从区域的平衡导出的, 其它的微分方程或平衡方程都是积分平衡的导出方程, 即物体平衡的本质是区域平衡而不是逐点平衡.

对式 (1.2) 进行分部积分, 应用格林公式, 并注意到

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, & Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, & Q_n &= Q_x n_x + Q_y n_y \\ M_{nx} &= M_{xx} n_x + M_{xy} n_y, & M_{ny} &= M_{yy} n_y + M_{xy} n_x \\ M_{nn} &= M_{nx} n_x + M_{ny} n_y, & M_{ns} &= -M_{nx} n_y + M_{ny} n_x \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

得

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega} \left(M_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + M_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + qV \right) d\Omega - \oint_{\Gamma} Q_n V ds + \\ & \oint_{\Gamma} \left(M_{nx} \frac{\partial V}{\partial x} + M_{ny} \frac{\partial V}{\partial y} \right) ds = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega} \left(M_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + M_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + qV \right) d\Omega - \oint_{\Gamma} Q_n V ds + \\ & \oint_{\Gamma} \left(M_{nn} \frac{\partial V}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial V}{\partial s} \right) ds = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

在上面的推导中, 如果检验函数 V 是位移的变分 δw , 并且在边界上满足逐点 C_1 连续, 即在边界 Γ 上, 逐点成立

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial s} = 0 \quad (1.6)$$

则式 (1.5) 中的线积分为 0, 式 (1.5) 中只剩下面积分, 它就是薄板弯曲的最小势能原理, 这里我们把它称之为经典意义的最小势能原理.

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega} \left(M_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \right. \\ & \left. M_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + qV \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

它要求单元边界间的函数值、法向导数、切向导数逐点连续, 即逐点满足式 (1.6), 这种要求是不容易满足的. 对三角形板元, 至少需

要在单元内构造一个全 5 次 21 个节点参数的位移函数, 显然这样做使单元刚度矩阵变得复杂, 计算量也会随之增大. 事实上我们可以以分片试验^[5]的要求放宽式 (1.6), 分片试验要求当单元给定常应力所对应的单元函数时, 至少包含一个内部节点的式 (1.7) 精确成立. 对薄板弯曲, 常应力就是常弯矩, 所对应的位移函数为全 2 次多项式. 这时式 (1.5) 线积分中的弯矩项为常数, 剪力为零

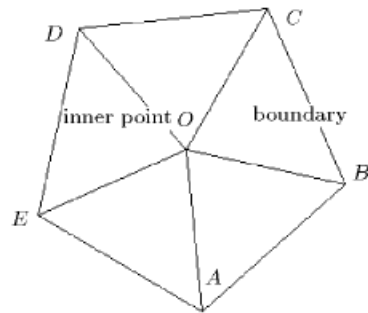


图 1 检验函数的作用子域
Fig.1 The acting area of test fuction

$$\oint_{\Gamma} M_{nn} \frac{\partial V}{\partial n} ds = \sum M_{nnC_i} \int_{I_i} \frac{\partial V}{\partial n} ds \quad (1.8a)$$

$$\oint_{\Gamma} M_{ns} \frac{\partial V}{\partial s} ds = \sum M_{nsC_i} \int_{I_i} \frac{\partial V}{\partial s} ds = \sum M_{nsC_i} (V_k - V_j) \quad (1.8b)$$

$$\oint_{\Gamma} Q_n V ds = 0 \quad (1.8c)$$

因而式 (1.8c) 是自动满足的. 通过分片试验只要求单元边界满足

$$\int_{I_i} \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0, \quad \int_{I_i} \frac{\partial V}{\partial s} ds = 0 \quad (1.9)$$

即法向导数和切向导数积分协调. 注意到

$$\int_{I_i} \frac{\partial V}{\partial s} ds = V_k - V_j \quad (1.10)$$

即切向导数的积分等于零要求边界两端的函数值相等, 因为函数值的 C_0 连续是容易满足的, 可以把这个条件适当加强为

$$V_i = V_j = V_k = 0 \quad (1.11a)$$

$$\int_{I_i} \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0 \quad (1.11b)$$

写成单元间连续的形式

$$w_i^+ = w_i^- \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.12a)$$

$$\int_{I_i} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^+ ds = \int_{I_i} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^- ds \quad (1.12b)$$

数学界对分片试验有所批评^[6], 并提出了自己的分片试验方法^[7,8], 文献 [7] 条件很弱但应用起来比较麻烦; 文献 [8] 比较直观, 用起来比较简单即 F-E-M-Test, 其中强 F_1 - F_2 条件就是弱协调条件

$$\int_I [w] ds = 0, \quad \int_I \left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] ds = 0, \quad \int_I \left[\frac{\partial w}{\partial s} \right] ds = 0 \quad (1.13)$$

式中 $[\cdot]$ 表示在单元边界的跳跃值, 据式 (1.10), 当单元顶点位移连续时, 式 (1.13) 最后一式成立, 并且根据文献 [8] 的公式

$$\left| \int_I [w] ds \right| \leq ch^2 |w|_{2, K_1 \cup K_2}$$

已经满足 F_1 条件, 即只需再满足下式仍可保证收敛

$$\int_I \left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] ds = 0 \quad (1.14)$$

事实上这就是式 (1.9) 的第一式, 只是二者的写法不同. 式 (1.9) 是按检验函数的作用子域写的, 式 (1.14) 是按单元间函数导数的跳跃值写的. 所以只要式 (1.9) 或式 (1.11) 成立, 就能保证收敛, 仍可按最小势能原理构造有限元. 它意味着单元边界之间的法向导数是弱连续的, 即

$$\int_l \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^+ ds = \int_l \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^- ds \quad (1.15)$$

在条件 (1.11) 或 (1.12) 下的式 (1.7) 就是弱连续条件下的最小势能原理, 它与经典的最小势能原理形式上是相同的, 但具有本质的区别. 经典的最小势能原理要求单元间逐点连续, 而弱连续条件下的最小势能原理只要求顶点连续和法向导数积分连续. 后者的条件要弱得多. 这种积分协调条件是相对逐点协调的弱协调条件, 它比通常说的弱连续条件更弱. 以下简单回顾近年提出的积分协调条件以作比较.

2 几种积分连续条件

1) 拟协调元是直接假定构造单元刚度矩阵的应变场来实现, 它要求单元间满足拟协调条件, 即

$$\int_a^b w^+ ds = \int_a^b w^- ds \quad (2.1a)$$

$$\int_a^b \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^+ ds = \int_a^b \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^- ds \quad (2.1b)$$

$$\int_a^b \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^+ ds = \int_a^b \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^- ds \quad (2.1c)$$

2) 广义协调元则直接采用单元间的广义协调条件来构造有限元, 其构造方法十分巧妙, 直接采用边的函数值、法向导数的加权积分作为广义位移来构造位移函数. 其中广义协调条件为

$$H = \int \left[M_n \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \tilde{\varphi}_n\right) + M_{ns} \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \tilde{\varphi}_s\right) - Q_n(w - \tilde{w}) \right] ds = 0 \quad (2.2)$$

式中: M_n, M_{ns}, Q_n 当作权函数. 当权函数任意或取 $1, x, y \cdots$ 序列时, 上式又成为逐点连续的强连续条件. 但实际应用时, 一般是按边界积分连续和 1 次加权积分连续构造^[2].

3) 双参数的构造方法与广义协调元的构造是类似的, 其自由度与广义协调元的广义位移类似. 同时双参数还给出了拟协调元、广义协调元的数学证明^[3,4], 双参数要求单元位移函数满足 F-E-M-Test^[8], 它比积分连续条件更弱, 其中强 F-E-Test 为

$$\int_l [w]_h ds = \int_l \left[\frac{\partial w_h}{\partial n} \right]_h ds = \int_l \left[\frac{\partial w_h}{\partial s} \right]_h ds = 0 \quad (2.3)$$

可见所谓拟协调条件、广义协调条件和 F-E-Test 是相似的, 它们都是在积分意义下的位移及其法向导数连续. 事实上, 如果单元位移函数满足 F-E-M-Test, 则它们也满足 Stummel 的广义分片试验^[7], 因此可以保证有限元解的正确.

可见弱连续条件式 (1.11) 比拟协调元、广义协调元和双参数的弱连续条件都弱, 此外对单元边界的离散三者大都采用函数值 3 次分布、法向导数线性分布的假设, 即

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_{l3} &= L_1^2(1+2L_2)w_1 + l_3L_1^2L_2\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_1 + L_2^2(1+2L_1)w_2 - l_3L_1L_2^2\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_2 \\ \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}\right)_{l3} &= \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_1L_1 + \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_2L_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

应用相似的积分连续条件、相同的边界离散格式 (2.4), 因而它们应是等价的^[3,4]. 在传统观念的有限元中, 弱连续似乎就是连续的一个特例, 因为它不满足有限元的逐点连续条件, 但我们认为弱连续与“弱平衡”(微分方程的等效积分形式)一样, 都是构造有限元的条件, 有限元的条件同时需要弱平衡和弱协调.

3 弱连续条件下的九参三角形板元

弱连续条件即积分连续条件, 对九参三角形板元而言, 它要求单元间函数值 w 及其法向导数 w_n , 切向导数 w_s , 3 个积分连续. BCIZ^[8] 元采用三角形 3 个顶点的 9 个节点参数确定单元的形函数, 它保证了单元间的位移是强连续的, 但是它不能保证单元间的法向导数连续或弱连续, 不能保证对任意网格都收敛. 拟协调元、广义协调元、双参数法在对边进行离散时都采用了相同的离散格式 (2.4), 保证了弱协调条件, 在任意网格下均收敛. 拟协调元先假定应变场, 然后在边界上进行离散, 对称地使用了节点参数和边参数, 对一定参数的单元, 如九参三角形板元, 其构成方法和结果是唯一的. 而在按广义协调元、双参数法构造有限元时, 广义参数(或自由度)甚至基底的取法都很多, 如广义协调元给出了 8 类 33 种单元^[9], 双参数法又给出了两类单元 VZ_1 、 VZ_2 ^[10]. 参数的不同的取法得到了不同的列式, 也得到不同的计算结果. 那么到底要怎样选取参数、那些参数才是必需的、到底可以构造多少种单元?

3.1 积分协调参数及其选择

首先我们把单元的节点参数及单元特定点上的参数如中点处的参数称之为点参数, 而边界参数沿边的积分和加权积分称为边参数. 则角点参数有 9 个, 即 w_i, w_{xi}, w_{yi} , 而边参数则更多: $\int_{l_i} w ds, \int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial n} ds, \int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial s} ds, \int_{l_i} L_j w ds, \int_{l_i} L_k w ds, \int_{l_i} L_j \frac{\partial w}{\partial n} ds, \int_{l_i} L_k \frac{\partial w}{\partial n} ds, \int_{l_i} L_j \frac{\partial w}{\partial s} ds, \int_{l_i} L_k \frac{\partial w}{\partial s} ds$ 以及其它高阶加权积分. 其中 L_i 为面积坐标, $j = i+1, k = i+2(i, j, k = 1 \sim 3)$, 下标轮换.

现在根据积分协调条件直接构造有限元. 广义协调元要求满足式 (2.2), 但实际上仍是按边的加权积分协调构造有限元, 即按下式

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b L^m w ds &= \int_a^b L^m \bar{w} ds \\ \int_a^b L^m \frac{\partial w}{\partial n} ds &= \int_a^b L^m \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} ds \\ \int_a^b L^m \frac{\partial w}{\partial s} ds &= \int_a^b L^m \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} ds \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

当权函数 L^m 的阶次 m 取遍 $0 \sim \infty$ 时, 上式又成为逐点连续条件. 设单元形函数 $w = L\beta$, β 为待定系数矢量, L 为基底矢量. 把式 (3.1) 左端用 w 表示, 则有: $d_i = C\beta$, C 为系数矩阵, d_i 称之为广义位移或自由度. 再把式 (3.1) 的右端按式 (2.4) 进行离散: $d_i = Gq^e + \varepsilon$,

ε 为误差, G 为系数矩阵, q^e 为节点参数, 忽略高阶小量则有

$$C\beta = Gq^e, \quad \beta = C^{-1}Gq^e \quad (3.2)$$

$$w = LC^{-1}Gq^e \quad (3.3)$$

式 (3.3) 就是广义协调元和双参数法的位移函数, 显然不同的参数取法构成的位移函数是不同的. 其中最基本的要求是在式 (3.1) 中 $m = 0$, 即积分协调.

$$\int_{l_i} w ds = \int_{l_i} \tilde{w} ds \quad (3.4a)$$

$$\int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial n} ds = \int_{l_i} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} ds \quad (3.4b)$$

$$\int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial s} ds = \int_{l_i} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} ds \quad (3.4c)$$

这样边参数式 (3.4) 是必需的, 而其它则可任意选取, 只要 C 阵满秩. 以下逐一分析构造式 (3.4) 的 3 个条件, 然后再说明现有的广义协调元和双参数法构造的单元大多在这个范围内.

A 切向导数可以通过以下两个办法来实现:

A₁ 直接使用参数 $\int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial s} ds$, 因为 $\int_{l_1} \frac{\partial w}{\partial s} ds = w_3 - w_2$, 所以 3 条边的切向导数的积分不独立, 所构成 C 阵时矩阵不满秩, 3 个切向导数不能同时使用, 应用中可以不用此法构造;

A₂ 正因为 $\int_{l_1} \frac{\partial w}{\partial s} ds = w_3 - w_2$, 如果广义位移中包括参数 w_i , 则可保证切向导数积分连续;

B 边界函数值的积分协调则可通过以下 4 个办法来保证:

B₁ 直接使用广义位移参数 $\int_{l_i} w ds$;

B₂ 使用节点参数 $w_i + w_{xi} + w_{yi}$, 这与 BCIZ 元一样, 可保证函数值在边界上完全协调;

B₃ 使用节点参数 $w_i + w_{jk}$, w_{jk} 为节点 i 对边中点的函数值, 对 3 次基底来说, 3 点并不能确定唯一的 3 次函数, 但是可以保证积分相等, 这是因为: $\int_{l_i} w ds = (w_i + 4w_{jk} + w_j)l_i/6$, 这就是文献 [10] 的 VZ₁ 和 VZC_i 元所采用的形式;

B₄ 只使用参数 w_i , 这样可保证 $\int_{l_i} [w] ds \leq ch^2 |w|_{2, K_1 \cup K_2}$ (见文献 [8]), 从而满足所谓 F-E-M-Test 而保证收敛.

C 法向导数的弱协调可通过以下两个办法来实现:

C₁ 直接使用广义参数 $\int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial n} ds$;

C₂ 只使用 i 点对边中点所对应的法向导数 w_{nmi} . 前面我们假定边上的法向导数线性分布, 这样 $\int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial n} ds = 2l_i w_{nmi}$, 可保证法向导数积分连续;

C₃ 采用两点高斯积分, 这时积分具有 3 阶精度, 因而可保证法向导数积分连续.

现有的广义协调元和双参数法构造的有限元大多在上述范围内.

文献 [2] 即 TGC-9 则是由条件 $A_1+B_1+C_1+\sum_j \int_{l_i} (L_j - \frac{1}{2})w ds$ 构成; 因为 3 个切向导数的秩为 2, 所以加入了第四项填秩, 后来文献 [11] 指出它具有几何可变性, 但这并不是广义协调元本身的性质, 只在使用 A_1 的情况下才存在这种几何可变性, 在选取广义位移时完全可以避免几何可变性. 而广义协调元^[9]的第二种构造方案则是由 $A_2+B_1+C_1$ 所构成; 第三、四、五、六种构造方案则是 $A_2+B_2+C_1$ 或 C_2 及其变化构成.

文献 [5] 提出的 VZ 系列中, VZ_1 为 $A_2+B_3+C_1$ 构成, 采用 9 个自由度、9 个基底, VZ_1C_i 是在 VZ_1 再加一个自由度共 10 个自由度、10 个基底, 这样可以采用全 3 次表示基底, 其中 VZ_1C_1 加上自由度 $\int_{l_i} L_j \frac{\partial w}{\partial n} ds$, 类似于文献 [3]; VZ_1C_2 加上自由度 $\int_{l_i} L_j w ds$, VZ_1C_3 加上自由度 $\sum_j \int_{l_i} (L_j - \frac{1}{2})w ds$, 类似于文献 [4]. 而 VZ_2 系列则采用 $w_i + F_i \frac{\partial w}{\partial n}(\rho_{i\alpha}) + w(a)$, $\rho_{i\alpha}(\alpha = 1, 2)$ 为边上 2 次 Legendre 多项式的零点, a 为形心, 也为 10 自由度、10 基底, 其中 $\int_{l_i} w ds$, $\int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial n} ds$, $\int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial s} ds$ 都连续, 而 w 的积分满足 C_3 .

3.2 弱协调条件下的构造方案

以上是采用积分协调 (3.4) 或加权积分协调 (3.1) 条件下构造的有限元, 但是前面已经说明了保证有限元收敛只需要弱协调条件 (1.12): 即单元角点的函数值和单元边界的法向导数积分连续, 因而它比起 (3.1) 或 (3.4) 有更大的构造范围. 所以构造有限元只需包含点参数 w_i 和边参数 $\int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial n} ds$ 两种参数即可, 其它参数则可任意, 只要所构成的 C 阵满秩即可. 这类似于 Morley 元^[12]的条件, Morley 元收敛到常应变, 拟协调元收敛到常应变, 而与之等价的广义协调元也应收敛到常应变. 这样我们就可以构造多个弱连续下的弱协调元.

这样, 如果采用 9 基底, 参数可采用 $w_i + \int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial n} ds$ 其它参数. 在前述的几组点参数和边参数中, 则可采用除 $\int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial s} ds$ (引起几何不对称性) 之外的其它任意一组参数作为第三组参数, 可有 9 种取法. 如 $+\int_{l_i} L_k w ds$ 或 $+\int_{l_i} L_j \frac{\partial w}{\partial s} ds$ 或 $+\int_{l_i} L_j w ds$ 都是一种单元函数, 但有的列式较为复杂, 不便在文中列出. 采用 10 个基底和 12 个基底又可构成其它的单元函数. 显然, 相同的基底数不同的基底也构成不同的单元函数, 所以可以构成的单元总数很多.

3.3 计算方法

广义协调元和双参数法在构造积分协调的有限元方面已经做了大量的工作, 提出了许多具有简单的列式的单元函数. 但是有些参数组成的单元函数极为复杂, 采用机器推导时, 求 C 的逆可能需要几个小时, 未经化简的一个形函数 N 可能超过几千项, 显然, 如果采用手工来做这些工作, 需要高度的熟练和技艺, 但采用数值求逆方法可以克服这些不便.

$$w = LC^{-1}Gq^e$$

表达式繁琐是 C 在求逆后符号不能化简或相互抵消造成的, 如果采用数值求逆, C^{-1} 最大也就是个满阵, 如果用 9 基底, 则 C^{-1} 为 9×9 数字矩阵, 表示起来并不繁琐. 以下是 B 阵

的构造办法.

$$B = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} C^{-1} G q^e$$

L 为一个 $1 \times$ 基底数的矩阵, 其中的元素为面积坐标幂级数的有理式, 对面积坐标有

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial}{\partial L_1} b_1 + \frac{\partial}{\partial L_2} b_2 + \frac{\partial}{\partial L_3} b_3 \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{4A^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial L_1^2} b_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_2} b_1 b_2 + \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_3} b_1 b_3 + \dots \right)$$

把 B 写成矩阵形式

$$B = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} -b_1^2 & -b_1 b_2 & -b_1 b_3 & \cdots & -b_3^2 \\ -c_1^2 & -c_1 c_2 & -c_1 c_3 & \cdots & -c_3^2 \\ 2b_1 c_1 & 2b_1 c_2 & 2b_1 c_3 & \cdots & 2b_3 c_3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 L}{\partial L_1^2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial L_1 \partial L_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial L_1 \partial L_3} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial L_3^2} \end{array} \right\} C^{-1} G q^e$$

因为 L 为 $1 \times$ 基底数的矩阵, 上式 $\{ \}$ 中其实为 $9 \times$ 基底数的矩阵, 对同一基底, $\{ \}$ 内是相同的, B 取决于 $C^{-1} G$.

3.4 算例

3.4.1 参数组合方式

由于保证单元收敛只需要满足式 (1.12) 所示的两个弱连续条件, 下面的 3 个算例中的其它条件则可任意选取.

例 1 广义参数选为: $w_i, -2A \int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial n} ds, -4A \int_{l_i} L_j \frac{\partial w}{\partial n} ds$.

基底: $[L_1, L_2, L_3, L_1 L_2, L_2 L_3, L_3 L_1, L_1^2 L_2 - L_1 L_2^2, L_2^2 L_3 - L_2 L_3^2, L_3^2 L_1 - L_3 L_1^2]$.

例 2 广义参数选为: $w_i, w_{xi}, \int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial n} ds$.

基底: $[L_1, L_2, L_3, L_1 L_2, L_2 L_3, L_3 L_1, L_1^2 L_2, L_2^2 L_3, L_3^2 L_1]$.

例 3 广义参数选为: $w_i, w_{mi}, \int_{l_i} \frac{\partial w}{\partial n} ds, \frac{1}{l_i} \int_{l_i} L_j \frac{\partial w}{\partial n} ds$.

基底: $[L_1, L_2, L_3, L_1 L_2, L_2 L_3, L_3 L_1, L_1^2 L_2 - L_1 L_2^2, L_2^2 L_3 - L_2 L_3^2, L_3^2 L_1 - L_3 L_1^2, L_1^2 \times L_2^2, L_2^2 \times L_3^2, L_3^2 \times L_1^2]$.

3.4.2 分片试验

尽管数学家们^[6]对分片试验提出怀疑,因为分片试验应用简便,因而常被工程师用于有限元的检查,所以本文仍然对所构成单元函数进行了分片试验.事实上,这些算例在构造时事先满足了 F-E-M-Test 的条件,已经通过了文献[8]的分片试验,因而必然收敛.

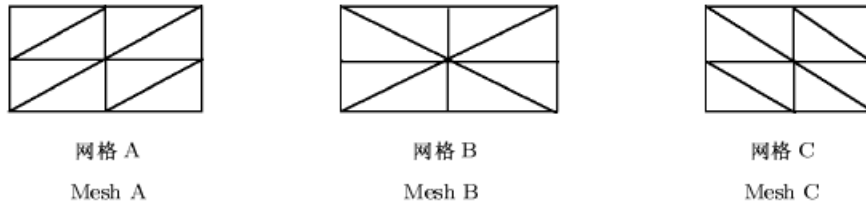


图 2 网格形式

Fig.2 Types of mesh

对 50×50 的方板,设位移满足 $y = x^2 + xy + y^2$,若中心点坐标为 (25,25),则中心点的位移应为 (1875, -75, 75);若中心点坐标为 (30,28),则中心点的位移应为 (2524, -88, 86);计算表明,上述 3 种构造方法都通过规则网格和任意网格的分片试验.

3.4.3 数值结果

弹性正方形薄板受中心集中载荷作用、在四边简支时、薄板中心处位移的解析解 $w = 11.60 \frac{PL^2}{1000D}$,四边固支的解析解 $w = 5.612 \frac{qL^4}{1000D}$,式中分子式前的数值为挠度系数. BCIZ 元^[5]及 3 个算例的挠度系数数值计算结果如表 1.

数值计算的结果表明所构造的几种单元都收敛到解析解,收敛速度因单元而异.在粗网格下的精度并不都比 BCIZ 的精度高,随着网格的细分其计算精度一般都高于 BCIZ 的计算精度.

表 1a 薄板中心位移的挠度系数, 网格 A

Table 1a Computed central deflection of a thin plate bending, mesh A

Element	Simply supported plate					Clamped plate				
	1×1	2×2	4×4	8×8	16×16	1×1	2×2	4×4	8×8	16×16
BCIZ	12.8676	11.7599	11.6414	11.6288	11.6228	5.2083	5.8802	5.7016	5.6422	5.6272
example 1	9.9774	10.9375	11.4180	11.5516	11.5875	3.2895	5.1538	5.4765	5.5743	5.6016
example 2	7.8431	10.6186	11.3532	11.5355	11.5832	5.6818	5.2210	5.5285	5.5884	5.6049
example 3	9.8682	10.8896	11.4031	11.5472	11.5862	2.7562	5.0518	5.4486	5.5671	5.5997

表 1b 薄板中心位移的挠度系数, 网格 B

Table 1b Computed central deflection of a thin plate bending, mesh B

Element	Simply supported plate					Clamped plate				
	1×1	2×2	4×4	8×8	16×16	1×1	2×2	4×4	8×8	16×16
BCIZ	12.8676	12.1616	11.9064	11.8451	11.8272	5.2083	5.8282	5.7747	5.7346	5.7216
example 1	9.9774	11.2074	11.4682	11.5607	11.5891	3.2895	4.9936	5.4535	5.5649	5.5986
example 2	7.8431	11.2474	11.6048	11.6255	11.6128	5.6818	5.4847	5.7266	5.6718	5.6336
example 3	9.8682	11.1719	11.4487	11.5531	11.5866	2.7562	4.9084	5.4220	5.5543	5.5953

表 1c 薄板中心位移的挠度系数, 网格 C

Table 1c Computed central deflection of a thin plate bending, mesh C

Element	Simply supported plate					Clamped plate				
	1×1	2×2	4×4	8×8	16×16	1×1	2×2	4×4	8×8	16×16
BCIZ	15.035 4	13.311 3	12.256 8	11.860 1	11.705 1	5.208 3	6.376 1	6.036 2	5.791 6	5.685 7
example 1	10.216 3	11.327 7	11.511 9	11.574 1	11.592 9	2.403 8	4.914 1	5.426 5	5.560 2	5.597 7
example 2	14.233 7	13.183 4	12.113 5	11.754 7	11.645 7	4.807 7	6.492 6	6.007 1	5.740 8	5.650 8
example 3	9.686 4	11.122 8	11.447 3	11.555 0	11.587 4	1.873 9	4.732 5	5.364 4	5.541 5	5.592 3

同时也说明了, 直接采用弱协调甚至积分协调条件来构造有限元并不总是能得到精度好的有限元, 因为它只能收敛到常应变. 在常应变量级下, 尽管广义协调元和双参数法已经在这方面构造了许多精度好的单元, 如何构造精度较高的有限元仍然是一个有待解决的课题. 此外, BCIZ 只是在特殊的规则网格下才收敛, 而上述 3 个算例是在任意网格下都是收敛的.

4 结 论

薄板弯曲的 C_1 连续问题传统上需要 C_1 连续, 即单元间的函数值及其导数逐点连续, 这种要求太强了, 有违有限元平衡方程弱形式的弱化机理. 对称地弱化即对几何条件中的连续条件的弱化就得到弱连续条件, 这也称之为积分协调和加权积分协调、拟协调条件、广义协调条件. 拟协调元、广义协调元和双参数法的单元大多是在这一框架下构造的.

本文通过平衡方程的弱形式, 引入分片试验要求所建立的弱连续条件比原来的积分协调条件更弱, 它只需要角点函数值连续和法向导数积分连续. 事实上这种弱连续条件满足了石钟慈教授的 F-E-M-Test 条件, 因而收敛性是有保证的. 采用这种弱连续条件下的最小势能原理构造有限元也是收敛的. 因为进一步降低了连续条件的要求, 扩大了构造弱连续条件下构造有限元的范围. 本文所构造的 3 个算例只是其中的一些, 根据这个条件还可以构造许多单元, 其精度可能有所差异, 它们都只能收敛到常应变, 随着网格的细分即使在任意网格下都能收敛到真解.

对单元的构造方法, 如九参三角形板元, 如果采用全 3 次幂级数, 弱连续条件则可以确定幂级数的全 2 次项, 即完备的刚性位移和常应变项, 共 6 项, 剩下 4 个 3 次项可由多种方法确定. 如对称地在单元边界离散, 使用直到 1 阶的所有加权积分连续条件, 这是拟协调元的方法; 增加其它的积分连续条件来构成 3 次乃至更高阶次的位移函数, 这是广义协调元和双参数的方法; 用其它的点参数来确定剩下的 4 项, 包括直接用这 6 项去修改其它由定点法确定的单元函数如 BCIZ 函数等, 这类似于精化元的做法^[13].

参 考 文 献

- 1 Tang LM, Chen WJ, Liu YX. String net function approximation and quasi-conforming technique. In: Atluri SN, Gallagher RH, Zienkiewicz OC eds. Hybrid and Mixed Finite Element Methods. New York: John Wiley & Sons, 1983. 173~188
- 2 Long YQ, Xin KG. Generalized conforming elements for bending and buckling analysis of plate. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1989, 5(1): 15~30
- 3 石钟慈, 陈绍春. 九参拟协调元的直接分析. 计算数学, 1990, 12(1): 76~84 (Shi Zhongci, Chen Shaochun. A direct analysis of the 9 parameter quasi-conforming plate element. *Mathematic Numerica Sinica*, 1990, 12(1): 76~84 (in Chinese))

- 4 石钟慈, 陈绍春. 九参广义协调元的收敛性. 计算数学, 1991, 13(2): 193~203 (Shi Zhongci, Chen Shaochun. Convergence of a nine parameter generalized conforming element. *Mathematic Numerica Sinica*, 1991, 13(2): 193~203 (in Chinese))
- 5 Bazeley GP, Cheung YK, Irons BM, et al. Triangular elements in bending-conforming and non-conforming solutions. Proc Conf Methods in Struct Mech, Air Force Inst of Tech. Wright Patterson AF Base, Ohio, 1965 (October). 547~576
- 6 Stummel F. The limitations of the patch test. *Int J Num Meth Eng*, 1980, 15: 177~188
- 7 Stummel F. The generalized patch test. *SIAM J Numer Anal*, 1979, 16: 449~471
- 8 Shi ZC. The F-E-M-Test for convergence of nonconforming finite elements. *Math Comput*, 1987, 49: 391~405
- 9 龙驭球. 新型有限元引论. 北京: 清华大学出版社, 1993. 1~106 (Long Yuqiu. The Introduce to the New Type Finite Element. Beijing: Tsinghua University Publishing Company, 1993. 1~106 (in Chinese))
- 10 陈绍春, 石钟慈. 构造单元刚度矩阵的双参数法. 计算数学, 1991, 13(3): 286~296 (Chen Shaochun, Shi Zhongci. Double set parameter method of constructing stiffness method. *Mathematic Numerica Sinica*, 1991, 13(3): 286~296 (in Chinese))
- 11 陈万吉, 杨晓林. 广义协调元的变分基础及几何不变性. 计算力学及其应用, 1992, 9(3): 245~252 (Chen Wanji, Yang Xiaolin. The variational foundation and geometrical invariability. *Journal of Computational Structural Mechanics and Applications*, 1992, 9(3): 245~252 (in Chinese))
- 12 Morley LSD. On the constant moment plate bending element. *J Strain Analysis*, 1971, 6(1): 20~24
- 13 Cheung YK, Chen WJ. Refined nine-parameter triangular thin plate bending element by using refined direct stiffness method. *Int J Numer Methods Eng*, 1995, 38(2): 283~298

THE 9-PARAMETERS TRIANGULAR PLATE ELEMENT IN WEAK FORM

He Dongsheng Tang Limin

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract The equilibrium equations for the thin plate bending problem in weak form are presented in this paper, and proposed the weak conforming conditions assured the convergence, that is, the displacement continuity at the triangle vertex and the normal derivative integral continuity along the boundary of the triangular element. The proposed weak continuity condition seems much weaker compared with the three kinds of integral continuity conditions which are used in the quasi-conforming element, the generalized element and double set parameter method. The constructed conditions of the above three integral conforming methods have been summarized and analyzed in this paper, the common used finite elements which satisfy the integral continuity conditions are mostly based on the above method. To construct finite elements by the weak conforming condition presented in this paper, we will have a more extensive range of choices, and several elements are constructed as numerical examples. More types of finite element can be constructed using this method, which possess the advantages of simplicity and convenience, just as the common used finite element based on the principle of minimum potential energy, and can converge to the analytical solution in the limit of arbitrary mesh sub-divisions.

Key words 9 parameters triangular plate element, weak continuity, finite element method, thin plate bending, generalized conforming element, double set parameter method

Received 10 January 2001, revised 7 June 2001.