

## 横向磁场激励下铁磁梁式板的混沌运动分析<sup>1)</sup>

高原文 周又和 郑晓静  
(兰州大学力学系, 兰州 730000)

**摘要** 在磁体力分布的磁弹性理论模型和磁场准静态假定模式基础上, 对于处在周期时变磁场中的不可移简支铁磁梁式板非线性磁弹性动力特性进行定性分析与定量分析. 首先利用磁场的摄动技术和结构变形的模态法, 导出了关于模态坐标的非线性动力方程; 然后利用 Melnikov 方法, 从理论上给出这一磁弹性动力系统可能出现混沌运动的必要条件及参数范围; 最后采用变步长 Runge-Kutta 数值积分方法对其磁弹性相互作用的混沌现象进行了定量搜索与模拟, 并利用其轨迹的 Poincaré 截面图与 Liapunov 指数加以判断. 结果表明磁弹性简支梁式板在横向周期时变磁场中存在混沌吸引子, 且在机械阻尼很小时其混沌吸引子表现出稠的特性.

**关键词** 几何非线性, 铁磁板, 横向磁场激励, 混沌运动, 必要条件, 数值模拟

### 引 言

当前, 有关对混沌动力学特性的研究已成为非线性科学研究的热点方向之一, 在力学、物理、气象、生物、化学、经济学等诸多学科领域中有着广泛的应用<sup>[1~8]</sup>. 随着电磁结构在高技术领域中的应用日益增多, 电磁弹性相互耦合作用的力学现象也倍受关注<sup>[9~16]</sup>. 对于磁弹性相互作用的动力系统, Moon 和 Holmes (1979) 首次开展了有关混沌现象的实验研究, 即对固支端受到周期激励而自由端处于两磁块之间的铁磁悬臂梁式板进行实验研究. Tani 等人 (1992) 实验研究了于自由端附着一集中质量块的铁磁悬臂梁式板处在均匀横向磁场中的混沌行为. Thompson 等人 (1997) 从实验上研究了磁弹性梁的混沌路径, 为了增强磁弹性耦合效应, 在梁的自由端两侧均附着了磁块. 在理论分析方面, Moon 和 Holmes (1979) 对于其磁弹性混沌实验现象应用动力分岔分支理论给予了研究. Lu 等人 (1995) 讨论了铁磁简支梁式板在周期时变磁场以及轴向周期激励下的动力分岔问题. Hai 等人 (1997) 研究了磁弹性梁的同宿轨道附近的不稳定周期解, 并在其动力方程中考虑控制的滞后效应项, 然后研究了磁弹性梁的混沌控制问题等等.

对于铁磁材料的可磁化介质弹性结构(体), Zhou 和 Zheng (1997, 1999)、Zhou 等人 (1995)、和 Zhou 和 Miya (1998) 等针对铁磁板位于横向磁场中的磁弹性屈曲实验 (Moon 和 Pao, 1968) 和位于面内纵向磁场中的自由振动固有频率上升的实验现象 (Tagaki 等人, 1995), 建立了能同时模拟这两类性质不同实验现象的理论模型与定量分析方法. 最近, Zhou 等人 (2000) 对于不可移几何非线性简支铁磁梁式板在静态横向和倾斜磁场中的屈曲、后屈曲与弯曲等磁弹性特性给予了定量分析. 本文在此基础上对处在周期时变横向磁场中的不可移几何非线性铁磁简支梁式板的混沌运动给予了理论上的定量搜索与分析.

2000-04-01 收到第一稿, 2001-06-01 收到修改稿.

1) 国家杰出青年科学基金(10025205)、教育部高校骨干教师基金和清华大学教育部破坏力学重点实验室开放课题资助项目.

## 1 磁弹性动力学基本方程

### 1.1 铁磁简支梁式板非线性动力方程

对于如图 1 所示的不可移简支非线性梁式板, 所处外加横向磁场为周期时变均匀磁场, 即  $B = B_0 \cos \Omega t$ . 设板长为  $L$ , 厚度为  $h$ , 杨氏模量  $Y$  和泊松比  $\nu$ . 根据板弯曲理论, 在考虑横向惯性力后, 铁磁梁式板的动力方程可以写为

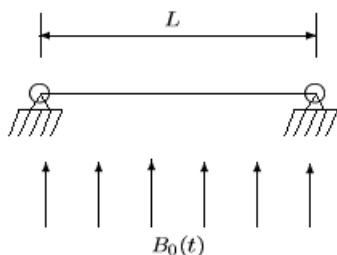


图 1 周期时变横向均匀磁场中不可移铁磁简支梁式板示意图

Fig.1 Schematic Drawing of a ferromagnetic beam-plate with un-movably simple supports in applied transverse magnetic fields of time variation of period

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q_z^{em}, \quad 0 < x < l \quad (1)$$

$$N_x = \frac{Yh}{2(1-\nu^2)l} \int_0^l \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (2)$$

这里:  $c$  为阻尼系数,  $\rho$  为板的质量密度,  $D$  为弯曲刚度:  $D = \frac{Yh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $q_z^{em}$  为铁磁板中面等效横向磁力,  $N_x$  为轴向力. 对于两端简支边界, 其边界条件为

$$x = 0, l: w(x) = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3)$$

### 1.2 磁场方程

考虑频率不太高的周期激励外加磁场, 在结构的几何尺度较小和不考虑磁结构的导电性的情形下, 磁场控制方程往往可以应用与准静态类似的方式进行处理. 即可引入磁标势函数  $\phi$ , 使  $\mathbf{H} = -\nabla\phi$ . 对于各向同性线性介质, 则 Maxwell 电磁方程被简化为以下边值方程

$$\nabla^2 \phi^+ = 0, \quad \text{in } \Omega^+(w) \quad (4a)$$

$$\nabla^2 \phi^- = 0, \quad \text{in } \Omega^-(w) \quad (4b)$$

$$\phi^+ = \phi^- \quad (5a)$$

$$\mu_r \frac{\partial \phi^+}{\partial n} = \frac{\partial \phi^-}{\partial n}, \quad \text{on } S(w) \quad (5b)$$

$$-\nabla \phi^- = \frac{1}{\mu_0} B_0, \quad \text{at } \infty \quad (6)$$

这里:  $\Omega^+$  表示铁磁介质内部区域, 而  $\Omega^-$  表示铁磁介质外部区域,  $\mu_0$  和  $\mu_r$  分别为真空和铁磁介质绝对磁化系数和相对磁化系数,  $S$  表示铁磁介质的边界,  $n$  表示曲面  $S$  的外法向. 值得注意的是磁场区域  $\Omega^+$  和  $\Omega^-$  以及铁磁介质区域的边界  $S$  均与铁磁结构的变形有关, 从而磁势函数  $\phi$  或磁场  $\mathbf{H}$  的分布与结构的变形有关.

### 1.3 横向磁力

依 Zhou 和 Zheng (1997, 1999) 可知, 对于处在横向磁场中的铁磁板, 作用在中面上的等效

横向磁力计算公式为

$$q_z^{em} = \frac{\mu_0 \mu_r \chi_m}{2} \left\{ \left( H_n^+ \left( x, \frac{h}{2} \right) \right)^2 - \left( H_n^+ \left( x, -\frac{h}{2} \right) \right)^2 \right\} \quad (7)$$

对于铁磁薄板，依薄板的 Kirchhoff 假定，有  $z = z_0 + w(x, t)$ ，这里  $z_0$  和  $z$  分别为板上一点在变形前后的  $z$  坐标。当  $|w| \ll 1$  时，对磁场函数的法向分量  $H_n(x, z)$  在  $z = z_0$  处进行摄动展开，并考虑变形前磁场的对称关系<sup>[9,10]</sup>后，(7)式可以化为

$$q_z^{em}(x, t) = 2\mu_0 \mu_r \chi_m \left[ H_{0n}^+ \left( x, \frac{h}{2} \right) \frac{\partial H_{0n}^+ (x, h/2)}{\partial z} w(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial H_{0n}^+ (x, h/2)}{\partial z} \frac{\partial^2 H_{0n}^+ (x, h/2)}{\partial z^2} w^3(x, t) \right] \quad (8)$$

其中  $\chi_m = \mu_r - 1$ 。

#### 1.4 时间响应的动力方程

引入如下的无量纲量（为了简便起见，在不混淆的情形下，在后面的叙述中我们将略去无量纲量的上标记号“-”）

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{t} = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad \bar{c} = \frac{cL^2}{\sqrt{\rho D}}, \quad \bar{q}_z = \frac{q_z L^4}{Dh}, \quad \bar{N}_x = \frac{N_x L^2}{D} \quad (9)$$

于是(1)式可以化为如下的无量纲动力方程

$$\ddot{w} + w'''' + c\dot{w} - N_x w'' = q_z(x, t) \quad (10)$$

这里，上标“·”表示对时间变量的偏导数，“'”为空间坐标  $x$  的偏导数。取模态函数展开式

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \Phi_n(x) \quad (11)$$

将(11)式代入(10)式中，应用 Galerkin 方法后得到

$$\ddot{f}_m + c\dot{f}_m + \sum_{n=1}^{\infty} f_n A_{nm} = \int_0^1 q_z(x, t) \Phi_m(x) dx; \quad xm = 1, 2, \dots \quad (12)$$

其中

$$A_{nm} = \int_0^1 \Phi_n'''' \Phi_m dx - \left[ \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k \phi_k' \right) \left( \sum_{l=1}^{\infty} f_l \Phi_l' \right) dx \right] \int_0^1 \Phi_n'' \Phi_m dx \quad (13)$$

当仅考虑一阶模态时，即取  $\Phi_m(x) = \sin \pi x$ ，则(12)式可化为

$$\ddot{f} + c\dot{f} + \left( \pi^4 + \frac{\pi^4}{2} f^2 \right) f = 2 \int_0^1 q_z(x, t) \sin \pi x dx \quad (14)$$

在板未变形情形，记

$$H_{0n}^+ = c_1 \left( x, \frac{h}{2} \right) B, \quad \frac{\partial H_{0n}^+}{\partial z} = c_2 \left( x, \frac{h}{2} \right) B, \quad \frac{\partial^2 H_{0n}^+}{\partial z^2} = c_3 \left( x, \frac{h}{2} \right) B \quad (15)$$

磁场的有限元数值结果表明:  $c_3 \rightarrow 0$ . 记  $C^* = \frac{2\mu_0\mu_r\chi L^4}{Dh} \int_0^1 c_1\left(x, \frac{h}{2}\right)c_2\left(x, \frac{h}{2}\right)\sin^2\pi x dx$ ,  $\alpha = (\pi^4 - C^*B_0^2)$ ,  $\beta = C^*B_0^2$ , 于是, (14) 式被化为如下形式

$$\ddot{f} + c\dot{f} + [\alpha - \beta\cos(2\Omega t)]f + \gamma f^3 = 0 \quad (16)$$

## 2 混沌运动存在的必要条件

对于非线性动力方程 (16) 式, 当  $B_0^2 > \pi^4/C^*$  时, 记  $\alpha^* = -\alpha$ , 则方程 (16) 化为

$$\ddot{f} + c\dot{f} - \alpha^*f - \beta\cos(2\Omega t)f + \gamma f^3 = 0 \quad (17)$$

引入变换  $f = \sqrt{\frac{\alpha^*}{\gamma}}u$ ,  $t = \sqrt{\frac{1}{\alpha^*}}t^*$  后, 记  $2\epsilon\delta = \frac{c}{\sqrt{\alpha^*}}$ ,  $\epsilon\beta^* = \frac{\beta}{\alpha^*}$ ,  $\Omega^* = \frac{\Omega}{\sqrt{\alpha^*}}$  (在后面, 仍将  $t^*$ ,  $\Omega^*$  分别记为  $t, \Omega$ ), 且令  $\frac{du}{dt} = v$ ,  $\frac{d^2u}{dt^2} = \dot{v}$ , 于是方程 (17) 可化为以下形式的状态方程

$$\dot{u} = v \quad (18a)$$

$$\dot{v} = u - u^3 - \epsilon[2\delta v - \beta^*\cos(2\Omega t)u] \quad (18b)$$

当  $\epsilon \neq 0$  时, 方程组 (18) 式表示了一受扰的 Hamilton 系统. 而在  $\epsilon = 0$  时, 它们表示相应的未扰 Hamilton 系统. 显然, 在这一动力系统中, 平衡点  $(0,0)$  为鞍点, 平衡点  $(-1,0)$  和  $(1,0)$  是中心点. 由 Melnikov 的理论方法知<sup>[4]</sup>: 定义 Melnikov 函数

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{q}^0(t)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{q}^0(t), t + t_0) dt \quad (19)$$

这里,  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  分别对应 Hamilton 系统的未扰部分和扰动部分,  $\mathbf{q}^0(t)$  表示一组未扰轨道. 如果对于  $M(t_0)$  存在简单零点 (即  $\frac{dM(t_0)}{dt}$  在零点处不为零), 则非线性动力系统可能存在混沌振动, 即  $M(t_0)$  具有简单零点是非线性动力系统存在混沌的必要条件. 对应于 (18) 式所表征的受扰 Hamilton 系统, 两条经过鞍点  $(0,0)$  的未扰同宿轨道的表达式为

$$u_0^\pm(t) = \pm\sqrt{2}\operatorname{sech}(t), \quad v_0^\pm(t) = \mp\sqrt{2}\operatorname{sech}(t)\tanh(t) \quad (20)$$

将 (20) 式代入 (19) 式得到

$$M(t_0) = -\frac{8}{3}\delta + 2\beta^*\pi\Omega^2\operatorname{csch}\Omega\pi\sin 2\Omega t_0 \quad (21)$$

从而, Melnikov 函数具有简单零点的条件为

$$R^f(\infty)\delta < g(\Omega) \quad (22)$$

其中  $g(\Omega) = \Omega^2\operatorname{csch}\Omega\pi$ ,  $R^f(\infty) = \frac{4}{3\pi\beta^*}$ . 依 (22) 不等式在图 2 中所作出的阴影部分表示了混沌可能存在的参数范围. 由于  $R^f(\infty)$  为常数, 所以从图上可以看出,  $\delta$  (或阻尼) 越大, 产生混沌的频率范围就越小.

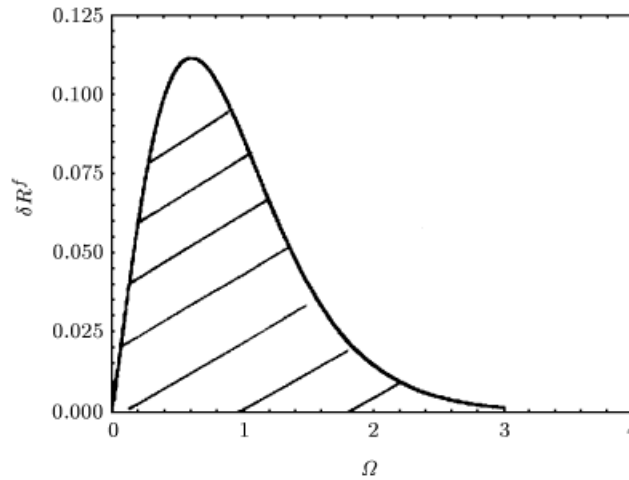


图 2 不可移简支几何非线性铁磁板在横向周期激励下产生混沌运动的可能参数范围

Fig.2 A possible parameter range of chaotic motion to a ferromagnetic beam-plate with un-movably simple supports in applied transverse magnetic fields of time variation of period

### 3 数值结果与讨论

前一节里给出了铁磁梁式板在横向周期时变磁场中出现混沌的必要条件. 这里, 我们将采用变步长龙格 - 库塔方法对此混沌运动进行数值模拟, 记  $\Delta t_m = t_{m+1} - t_m$ ,  $\mathbf{Y}_m = \mathbf{Y}(t_m)$

$$\mathbf{K}_1 = f(\mathbf{Y}_m, t_m) \quad (23a)$$

$$\mathbf{K}_i = f\left(\mathbf{Y}_m + \frac{\Delta t_m}{2} \mathbf{K}_{i-1}, t_m + \frac{\Delta t_m}{2}\right) \quad i = 2, 3 \quad (23b)$$

$$\mathbf{K}_4 = f(\mathbf{Y}_m + \Delta t_m \mathbf{K}_3, t_m + \Delta t_m) \quad (23c)$$

于是求解微分方程的 4 阶龙格 - 库塔方法的递推格式为

$$\mathbf{Y}_{m+1} = \mathbf{Y}_m + \frac{\Delta t_m}{6} (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \quad (24)$$

变步长龙格 - 库塔方法是在此过程基础上对步长加倍或折半处理方法, 以达到所希冀的精度.

为了判断其动力系统的混沌, 在模拟程序中我们采用 Liapunov 指数与 Poincaré 映射图等成熟方法来判断混沌运动是否出现<sup>[8]</sup>. 对于 (18) 式所表示的非自治系统, 先将其化为等价的自治系统, 然后进行数值模拟. 等价的自治系统表示为

$$\dot{u} = v \quad (25a)$$

$$\dot{v} = u - u^3 - \epsilon[2\delta v - \beta^* u \cos(2\Omega\theta)] \quad (25b)$$

$$\dot{\theta} = 1 \quad (25c)$$

在图 2 所示的可能混沌运动参数域内, 取参数  $\epsilon = 0.01$ ,  $\delta = 10$ ,  $\beta^* = 101$ ,  $\Omega = 0.23$ , 对 (25) 微分方程组进行数值积分后, 得到的时间历程、相图、Poincaré 图、Liapunov 最大指数演化图

分别示于图 3(a, b, c, d). 从图上可以看出, 其时间历程无周期性, 且 Poincaré 映射图具有明显的分维结构, Liapunov 维数  $D_L = 2.254$ , 同时 Liapunov 最大指数值收敛于  $\lambda_{\max} = 0.119 (> 0)$ . 由此可以判定: 在此组参数下动力系统具有混沌吸引子. 在其它参数保持不变而仅将  $\delta$  增加到  $\delta = 100$  时, 动力系统呈现出周期运动.

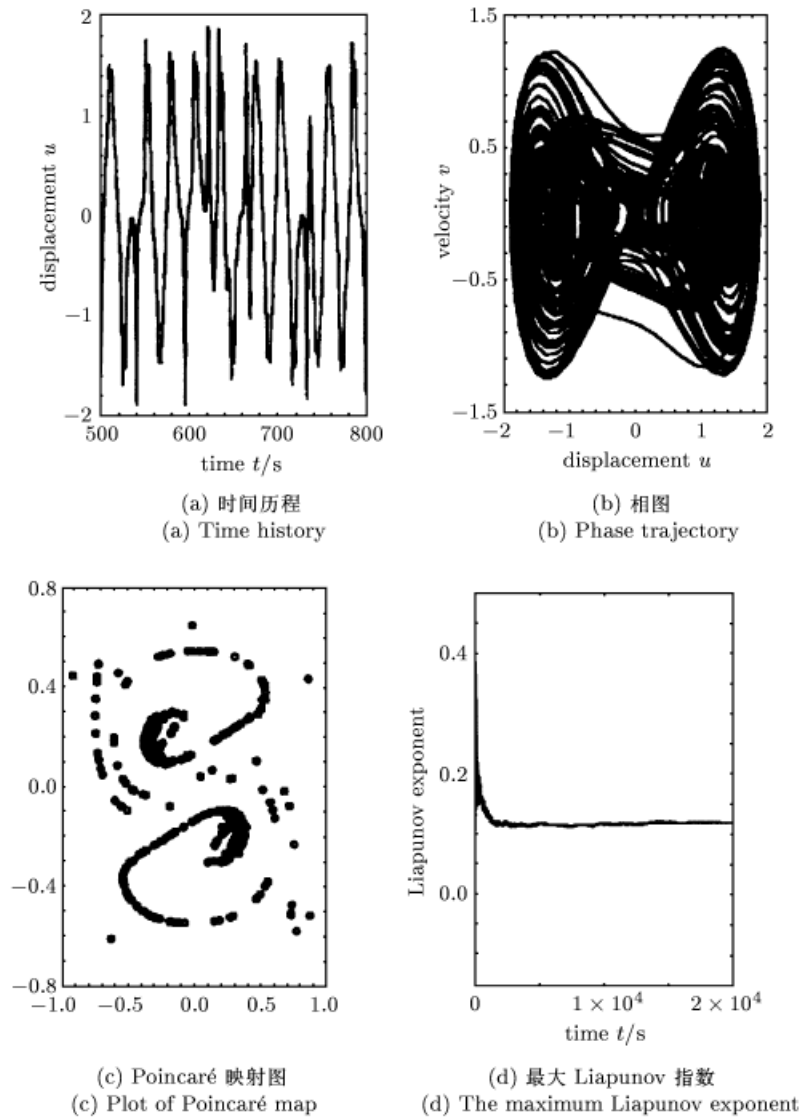


图 3 不可移非线性简支梁式铁磁板在横向周期磁场激励作用下的混沌运动数值模拟结果: 分形吸引子特征 ( $\epsilon = 0.01, \delta = 10, \beta^* = 101, \Omega = 0.23$ )

Fig.3 Numerical simulations of Chaotic motions to a nonlinear ferromagnetic beam-plate with un-movably simple supports in transverse magnetic fields of time variation of period: fractal attractor ( $\epsilon = 0.01, \delta = 10, \beta^* = 101, \Omega = 0.23$ )

图 4 是在小阻尼参数情形下的数值模拟结果, 所取的参数为  $\epsilon = 0.01, \delta = 0.001, \beta^* = 150, \Omega = 1.0$ , 此时最大 Liapunov 指数为 0.153. 由其 Poincaré 映射图可以看出: 其混沌吸引子除了具有分维结构特性, 还表现出稠的特性. 数值计算得到: 所对应的 Liapunov 维数  $D_L \approx 3.0$ .

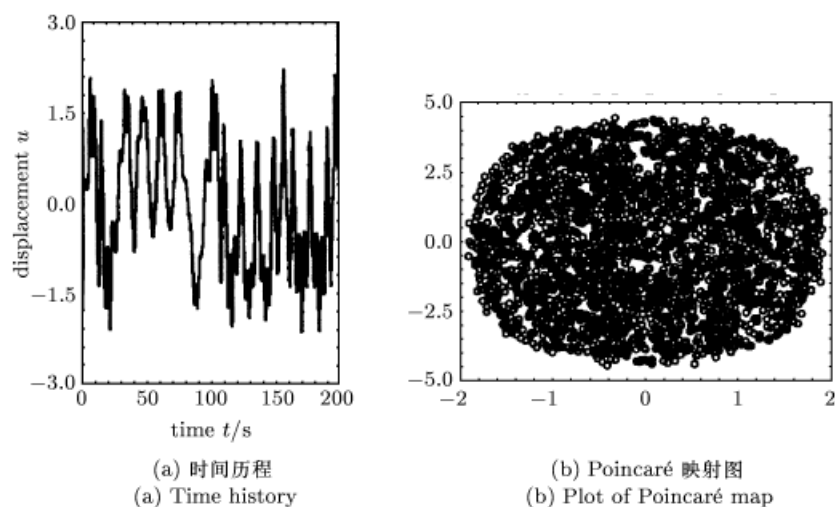


图 4 在小阻尼情形下不可移非线性简支梁式铁磁板在横向周期磁场激励作用下的混沌运动数值模拟结果：分形吸引子具有稠的特征  
( $\epsilon = 0.01, \delta = 0.001, \beta^* = 150, \Omega = 1.0$ )

Fig.4 Numerical simulations of chaotic motion to a nonlinear ferromagnetic beam-plate with un-movably simple supports in transverse magnetic fields with time variation of period when mechanic damping is small: The character of fractal attractor is dense  
( $\epsilon = 0.01, \delta = 0.001, \beta^* = 150, \Omega = 1.0$ )

### 参 考 文 献

- 1 Moon FC, Holmes PJ. A magnetoelastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration*, 1979, 65(2): 275~296
- 2 Thompson RCA, Mullin T. Routes to chaos in a magneto-elastic beam. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1997, 8(4): 681~697
- 3 Tani J, Zhu Q, Takagi T, Ohtomo K. Experiments on Chaotic Motions of a Magnetoelastically Buckled Beam. *Int Journal of Applied Electromagnetics in Materials*, 1992, 2: 317~324
- 4 刘曾荣. 混沌的微扰判据. 上海: 上海科技教育出版社 (Liu Zengrong. Perturbation Criteria for Chaos. Shanghai: Shanghai Publishing House of Science, Technology, and Education. 1994 (in Chinese))
- 5 Wolf A, Swift JB, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica*, 1985, 16D: 285~317
- 6 陈予恕, 唐云. 非线性动力学中的现代分析方法. 北京: 科学出版社, 1992 (Chen Yushu, Tang Yun. Modern Analysis Methods for Nonlinear Dynamics. Beijing: Science Press, 1992 (in Chinese))
- 7 Hai W, Duan Y, Pan X. An analytical study for controlling unstable, periodic motion in magneto-elastic chaos. *Physics Letter A*, 1997, 234: 198~204
- 8 Lu QS, To CWS, Huang KL. Dynamic stability and bifurcation of an alternating load and magnetic field excited magnetoelastic beam. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 181(5): 873~891
- 9 Zhou Youhe, Zheng Xiaojing. A generalized variational principle and theoretical model for magnetoelastic interaction of ferromagnetic bodies. *Science in China (Series A)*, 1999, 42: 618~626
- 10 周又和, 郑晓静. 电磁固体结构力学. 北京: 科学出版社, 1999 (Zhou Youhe, Zheng Xiaojing. Mechanics of Electromagnetic-Solid Structures. Beijing: Science Press, 1999 (in Chinese))
- 11 Zhou YH (周又和), Zheng XJ (郑晓静). A general expression of magnetic force for soft ferromagnetic plates in complex magnetic fields. *Int J Eng Sci*, 1997, 35(15): 1404~1417
- 12 Zhou YH, Zheng XJ, Miya K. Magnetoelastic bending and snapping of ferromagnetic plates in oblique magnetic fields. *Fusion Eng and Design*, 1995, 30: 325~337

- 13 Zhou YH, Miya K. A theoretical prediction of natural frequency of a ferromagnetic plate with low susceptibility in in-plane magnetic field. *ASME J Appl Mech*, 1998, 65(1): 121~126
- 14 Moon F, Pao YH. Magnetoelastic buckling of a thin plate. *ASME J Appl Mech*, 1968, 35(1): 53~58
- 15 Tagaki T, Tani J, et al. Dynamic behavior of fusion structural components under strong magnetic fields. *Fusion Eng and Design*, 1995, 27: 481~489
- 16 Zhou YH, Gao YW, Zheng XJ, Jiang Q. Buckling and post-buckling of a ferromagnetic beam-plate induced by magnetic interactions. *Int J Non-linear Mech*, 2000, 35: 1059~1065

## ANALYSIS OF CHAOTIC MOTIONS OF GEOMETRICALLY NONLINEAR FERROMAGNETIC BEAM-PLATES EXCITED BY TRANSVERSE MAGNETIC FIELDS <sup>1)</sup>

Gao Yuanwen    Zhou Youhe    Zheng Xiaojing

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

**Abstract** Based on the theoretical model of Magnetic Body Force for magnetoelastic interaction of ferromagnetic plates in magnetic fields, and the assumption of quasi-static state to magnetic fields, a theoretical analysis is presented in this paper to the nonlinear dynamic system of a geometrically nonlinear ferromagnetic beam-plate with simply supported and unmovable ends in an exciting transverse magnetic field with periodic variation. First of all, the perturbation technique is employed for analyzing distribution of magnetic fields varying with deflection of the plate. Secondly, a necessary condition of existence of chaotic motions in the magnetoelastic dynamic system is obtained by means of the Melnikov Method. Finally, the chaotic motions of the magnetoelastic system are simulated or searched by the Runge-Kutta method with variable steps, and the Poincaré map and the Liapunov exponents to the trace of motions are employed to evaluate if a chaotic motion appears. The numerical results indicate that there exist some chaotic motions in the magnetoelastic system of the ferromagnetic beam-plates in transverse magnetic fields of periodic varying, and that the chaotic motion is dense when the mechanical damping in the system is small enough in the chaotic range of parameters.

**Key words** geometric nonlinearity, ferromagnetic plates, excited magnetic fields in transverse direction, chaotic attractor, necessary condition of existence, numerical simulations

---

Received 1 April 2000, revised 1 June 2001.

- 1) The project supported by the Outstanding Young Scientist Fund of NSFC (10025205), the Fund of the Ministry of Education for Excellent Teachers in Universities, and the Opening Fund of the Failure Mechanics Laboratory of the Ministry of Education in Tsinghua University.