

## 二维槽道湍流的标度律分析<sup>1)</sup>

李新亮

马延文

(清华大学工程力学系 SMC 气动中心, 北京 100084) (中国科学院力学研究所 LHD 开放实验室, 北京 100080)

傅德薰

(中国科学院力学研究所 LNM 国家重点实验室, 北京 100080)

**摘要** 对不同 Reynolds 数的二维不可压槽道湍流(即二维槽道流动的扰动饱和态)进行了标度律分析. 指出二维槽道湍流中存在明显的标度律及扩展自相似性; 分析了标度指数随着流动 Reynolds 数的变化, 指出随着 Reynolds 数的增长, 标度指数的奇异性并没有减小的趋势; 由此推测充分发展的二维槽道湍流的标度指数也是奇异的. 将所得计算值和余振苏等人的 SL 标度律预测值相比较, 认为余等人的 SL 标度律公式能很好描述二维湍流.

**关键词** 二维槽道湍流, 标度律, 奇异性

### 引 言

湍流现象是自然界最复杂的物理现象, 人类对其研究已有上百年的历史, 虽然目前已取得了重大进展, 但离真正认清湍流的本质还有相当距离. 湍流的研究有着巨大的理论和工程应用意义.

湍流的机理问题, 一个多世纪以来, 一直是人们不断探索的问题. 1941 年数学大师 Kolmogorov 提出了著名的湍流理论(以下简称 K41 理论), 深刻地刻划了湍流的本质. 对半个多世纪以来的湍流基础研究产生了极其深远的影响. K41 理论的精华是预测到了湍流中标度律的存在<sup>[1]</sup>.

标度律是指湍流流场中惯性区内两点间速度差(所谓速度结构函数)的统计矩与两点之间的距离呈幂次关系. 其幂次即为标度指数. 标度指数是对多尺度复杂系统临界自组织状态的定量刻画, 直接反映了湍流的基本流动机制, 成为湍流基本机理的试金石. K41 理论认为标度指数对于统计矩阶数是线性的, 而近年来的实验测量及数值模拟结果表明, 标度指数与统计矩阶数之间呈非线性依赖关系. 这便是著名的奇异标度律问题. 奇异标度律引起了物理学界研究临界现象专家的极大关注, 并构成对 K41 理论的挑战. 对于奇异标度律, 不同学者给出了不同的解释, 比较成功的是余振苏等人的层次结构模型(SL 模型). 该模型认为湍流是由不同尺度、不同振动幅度和不同相干程度的层次结构组成的<sup>[2,3]</sup>. 通过与风洞湍流、尾迹湍流、射流湍流实验以及均匀各向同性湍流 DNS 和 GOY 壳模型的标度指数对比, SL 模型均吻合较好, 在一定程度上验证了 SL 模型的正确性. 应当指出, 由于受计算条件和实验条件的限制, 雷诺数不可能很高, 湍流场中没有明显的惯性区, 这就给标度指数的测量和计算带来了一定的困难. 1993 年意大利学者 Benzi 等人发现了湍流的扩展自相似性(ESS)即速度差的统计矩之间呈幂次关系,

2000-02-20 收到第一稿, 2002-02-28 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(59876002)资助项目, 国家基础研究发展规划资助项目(G1999032805).

ESS 的适用范围比普通的标度律的适用范围更广泛得多, 这就给标度指数的测量带来了极大的便利, 也使精确性大为提高<sup>[4]</sup>.

由于目前的实验技术及数值计算条件所限, 关于标度指数的实验及数值计算数据均来自较低 Reynolds 数的湍流场; 当 Reynolds 数充分高时标度指数是否还具有奇异性还存在争议. 例如我国学者钱俭<sup>[5,6]</sup>, 通过对湍流场速度概率密度分布函数 (PDF) 的理论分析认为: 随着 Reynolds 数的增高, 标度指数的奇异性将减小, 当 Reynolds 数充分高时 (即充分发展湍流) 标度指数是正常的, 也就是说 K41 理论是正确的. 充分发展湍流的标度律是否具有奇异性是湍流机理研究的一个重要问题, 关于该问题的争论在近期还不可能得到解决.

DNS 是研究可压缩湍流标度律的最有效手段, 但三维 DNS 所需的巨大计算量又给研究带来很大困难. 而二维流动的扰动饱和状态具有许多和三维湍流类似的现象, 如都存在上抛 - 下扫等拟序结构以及间歇现象, 因而也称为二维湍流<sup>[7]</sup>. 二维湍流中包含了真实湍流的某些信息, 因而对其研究很有意义<sup>[7,8]</sup>.

应当指出二维湍流与实际的三维湍流是有区别的. 在二维湍流中, 拟涡能 (enstrophy) 为一守恒量, 因此二维湍流中的能谱及湍能的级串结构与三维湍流不同, 关于二维湍流的这些特点直到近期仍不断有文献进行探索<sup>[9,10]</sup>. 需要指出, 自然环境中的某些流动 (如大气湍流, 海洋湍流等) 因三个方向尺度相差悬殊, 也具有某些二维湍流的特点. 文献 [11] 发现大气湍流能谱的某些规律 (如  $k^{-3}$  律) 可以用二维湍流解释, 而另一些规律 (如大气能谱中出现的  $k^{-5/3}$  律) 无法用二维湍流解释.

本文利用作者在文献 [8] 中得到的数值结果, 对  $Re$  为 10000, 12000 和 15000 的二维不可压槽道湍流速度结构函数的各阶统计矩进行了分析, 发现“二维湍流”中存在明显的标度律和扩展的自相似性 (ESS). 同时发现对于二维湍流, 随着 Reynolds 数的增高, 标度指数的奇异性并未减小, 由此作者推测当 Reynolds 数充分高时二维湍流的标度指数仍然是奇异的.

将计算结果与余振苏等人的 SL 模型给出的标度指数公式进行比较, 二者吻合得较为理想, 在一定程度上对 SL 模型的正确性进行了验证. 此外, 还分析了壁面效应对标度指数的影响.

## 1 二维槽道湍流的标度律分析

对二维槽道流动的平衡态 (所谓二维湍流) 进行统计分析, 所分析的数据来自文献 [8] 的数值计算, 以平均速度及槽道半宽度定义的 Reynolds 数 ( $Re$ ) 分别为 10000, 12000 及 15000. 达到流动平衡态时, 这三种流场槽道中心线上相对应的以 Taylor 微尺度定义的 Reynolds 数 ( $Re_\lambda$ ) 分别为 193.1, 272.4 及 374.4. 这里  $Re_\lambda = \frac{u'\lambda}{\nu}$ ,  $u' = \langle (u^2 + v^2)/2 \rangle^{1/2}$  为脉动速度均方根,  $\lambda^2 = u'^2 / \langle \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \rangle$ ,  $\lambda$  为 Taylor 微尺度.

所谓湍流的标度律是指充分发展的湍流场惯性区内具有如下关系<sup>[2]</sup>:  $\langle |\delta u_l|^p \rangle \sim l^{\zeta_p}$ , 其中  $\delta u_l = u(x+l) - u(x)$ ,  $\zeta_p$  为标度指数. 本文取  $\delta u_l = u(x+l, y) - u(x, y)$ , 为对应同一  $y$  值的两点间的流向速度差.  $\langle \bullet \rangle$  为沿流向的空间平均后再按时间平均, 即时间 - 空间平均. 流动达到平衡态后, 本文平均了跨越 1000 个无量纲时间单位的 25000 个计算步, 共计 3200000 个样本点. 达到了统计的收敛 (即各阶矩不随统计时间的增长而变化).

图 1 给出  $Re = 15000$  的二维槽道湍流在中心线 ( $y = 0$ ) 处的速度结构函数的统计矩与两点间距离的关系. 从中可以看出, 在一个相当明显的范围内  $\lg \langle |\delta u_l|^p \rangle$  与  $\lg l$  呈线性关系. 即,

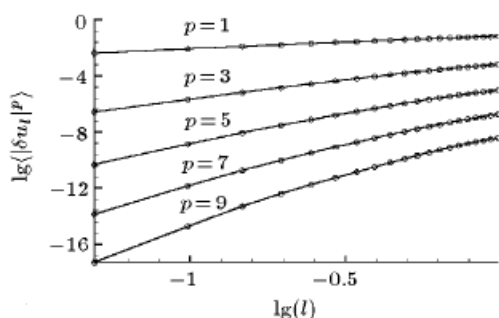


图 1  $Re = 15000$  二维槽道湍流中心线  
( $y = 0$ ) 处的标度律  
Fig.1 The scaling laws at the centerline  
of the fluid field  $Re = 15000$

图 2 给出  $Re = 15000$  的二维湍流中心线处  $\lg\langle |\delta u_l|^p \rangle$  与  $\lg\langle |\delta u_l|^3 \rangle$  的关系图. 从中可以看出, 在相当明显的范围内二者呈线性关系. 对比图 2 与图 1 中对应的相同阶数的曲线, 可以看出图 2 的线性范围要比图 1 大得多. 图中直线的斜率即为相对标度指数:  $\zeta(p, 3) = \zeta_p / \zeta_3$  (在本文中该相对标度指数通过最小二乘法计算). 由此可以看出, 在二维湍流中存在扩展自相似性.

图 3 给出  $Re$  为 10000, 12000, 15000 的二维槽道湍流中心线处的相对标度指数随统计阶数  $p$  的变化情况. 图中的虚线为 K41 理论公式 ( $p/3$  律). 从图中可以看出, 三种不同 Reynolds 流动的 (相对) 标度指数均与统计阶数呈非线性关系, 而且其与 K41 理论有明显差距, (相对) 标度指数均低于 K41 理论的预测值. 也就是说, 二维槽道湍流中的标度律是奇异的.

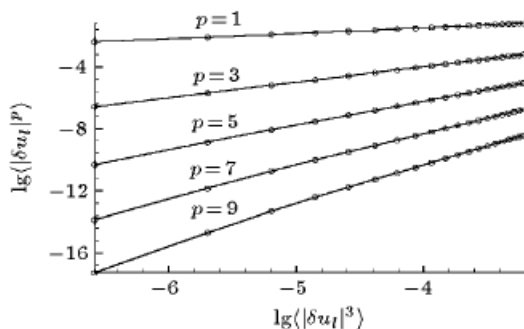


图 2  $Re = 15000$  二维槽道湍流中心线 ( $y = 0$ )  
处的扩展自相似性  
Fig.2 ESS at the centerline of the fluid field  
 $Re = 15000$

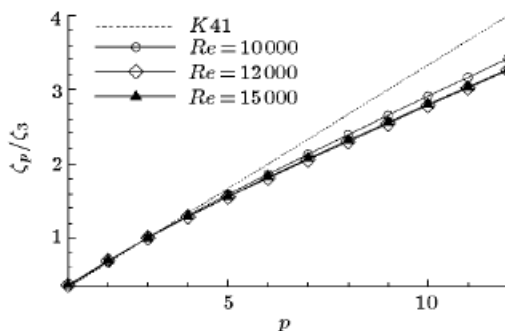


图 3 (相对) 标度指数的变化情况  
Fig.3 Relative scaling exponents

虽然目前的实验和数值结果与 K41 理论相违背, 但 K41 理论是针对充分发展湍流提出的, 由于实验水平和数值计算能力所限, 目前关于标度指数的实验和数值结果都是针对较低 Reynolds 数流动的, 与 K41 理论要求的充分发展湍流还有很大差距. 到底湍流达到充分发展时 (即 Reynolds 数充分高时) 其标度指数是否具有奇异性目前还有争议. 文献 [5,6] 根据理论分析结果推断当 Reynolds 数升高时, 标度指数与 K41 线性标度指数的差距逐渐减小; 由此该文推断目前实验及数值计算中发现的奇异标度指数是一种“有限 Reynolds 数效应”, 高 Reynolds 数

在二维槽道湍流中存在明显的标度律.

标度律是有一定的适用范围的, 对于三维充分发展的湍流, 标度率的适用范围是在湍流惯性区内. 1993 年 Benzi 等人提出了湍流的扩展自相似性 (ESS), 认为速度结构函数的统计矩之间呈幂次关系. 即:  $\langle |\delta u_l|^p \rangle \sim \langle |\delta u_l|^q \rangle^{\zeta(p,q)}$  (一般取  $q = 3$ ). ESS 的适用范围要比标度律的适用范围广泛得多. ESS 的发现为标度律的实验测量及通过数值计算带来了很大方便. 根据 ESS 得到的标度指数:  $\zeta(p, q) = \zeta_p / \zeta_q$  (通常取  $q = 3$ ) 称为相对标度指数. 由于可靠性更高, 目前的实验及数值计算得到的标度指数基本上都是相对标度指数.

的充分发展湍流的标度律很可能是非奇异的.

由图 3 可以发现, 对于二维槽道湍流, 随着 Reynolds 数的增高, 标度指数与 K41 理论的预测值的差距并未减小 (相反, 还略有增加). 由此可以推断二维湍流中的奇异标度律并非“有限 Reynolds 效应”. 由此推断, 更高 Reynolds 数的充分发展二维湍流的标度指数也应当是奇异的.

反常标度律反映了湍流结构的复杂性, K41 理论无法对其进行解释. 为了解释反常标度律, 余振苏等人提出了湍流层次结构模型 (SL 模型), 该模型给出了标度率的公式  $\zeta_p = \gamma p + C(1 - \beta p/3)$ .

根据 SL 公式给出对于二维槽道湍流的相对标度指数公式:  $\zeta_p/\zeta_3 = 0.229p + 0.624(1 - 0.472p/3)$ , 图 4 为该公式与数值结果 ( $Re = 15000$  的标度指数) 的比较, 从中可以看出 SL 理论结果和数值结果吻合较好, 从而间接验证了 SL 标度率的正确性 (图中的虚线为 K41 理论对应的线性标度律:  $\zeta_p/\zeta_3 = p/3$ ).

另外, 还分析了壁面效应对标度指数的影响, 图 5 为  $Re = 15000$  流场距壁面不同位置处的相对标度指数, 三条曲线所对应的位置分别为  $y^+ = 1.63, y^+ = 7.74$  及  $y^+ = 246.26$  (槽道中心线). 从中可以看出壁面效应对相对标度指数有明显的影响.

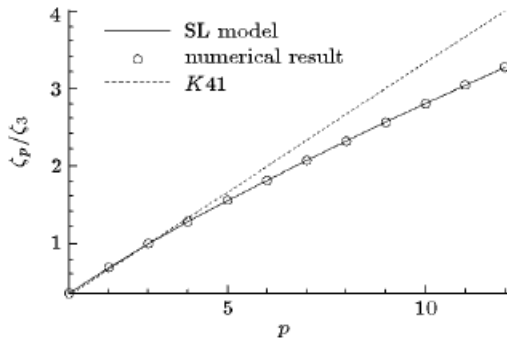


图 4 本文计算的 (相对) 标度指数 ( $Re = 15000$ ) 同 SL 公式的对照 (其中 SL 公式为:  $\zeta_p/\zeta_3 = 0.229p + 0.624(1 - 0.472p/3)$ )  
Fig.4 Relative scaling exponents of this paper ( $Re = 15000$ ) vs SL theory (SL theory:  $\zeta_p/\zeta_3 = 0.229p + 0.624(1 - 0.472p/3)$ )

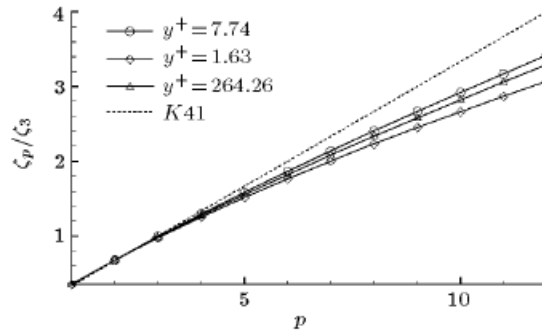


图 5  $Re = 15000$  流场不同位置处的标度指数  
Fig.5 Relative scaling exponents at difference location of the fluid field  $Re = 15000$

## 2 结 论

通过对不同 Reynolds 数二维槽道湍流的统计分析, 得出以下结论:

- 1) 在二维槽道湍流中心线附近存在标度律和扩展自相似性.
- 2) 二维槽道湍流中的标度指数是奇异的.
- 3) 二维槽道湍流标度指数的奇异性并不因 Reynolds 数的升高而减小. 同时本文给出的数值结果和 SL 公式的预测结果吻合很好, 这也支持了 SL 模型.

致谢 感谢国家攀登 A 和国家博士后基金为本文的研究提供经费支持, 感谢科学与工程计算国家重点实验室为本文的计算提供支持.

## 参 考 文 献

- 1 Kolmogorov AN. Local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid at very high Reynolds numbers. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1941, 31: 538~540
- 2 余振苏, 苏卫东. 湍流中的层次结构理论和标度率. 力学进展, 1999, 29(3): 289~303 (She Zhensu, Su Weidong. Hierarchical structures and scalings in turbulence. *Advances in Mechanics*, 1999, 29(3): 289~303 (in Chinese))
- 3 She ZS, Leveque E. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys Rev Lett*, 1994, 72(3): 336~339
- 4 Benzi R, Ciliberto S, Tripicciono R, et al. Succis. Extended self-similarity in turbulence flows. *Phys Rev E*, 1993, 48(1): 29~32
- 5 Qian J. Inertial range and the finite Reynolds number effect of turbulence. *Phys Rev E*, 1997, 55(1): 337~342
- 6 Qian J. Normal and anomalous scaling of turbulence. *Phys Rev E*, 1998, 58(6): 7325~7329
- 7 Javier Jimenez. Transition to turbulence in two-dimensional poiseuille flow. *J Fluid Mech*, 1990, 218: 265~297
- 8 李新亮, 马延文, 傅德薰. 不可压 N-S 方程数值模拟方法研究及二维槽道流动的非线性行为分析. 力学学报, 2001, 33(5): 577~587 (Li Xinliang, Ma Yanwen, Fu Dexun. High efficient method for incompressible N-S equations and analysis of two-dimensional turbulent channel flow. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(5): 577~587 (in Chinese))
- 9 Lindborg E, Alvelius E. The kinetic energy spectrum of the two-dimensional enstrophy turbulence cascade. *Physical of Fluids*, 2000, 12(5): 945~947
- 10 Chaves M, Gama S. Time evolution of the eddy viscosity in two-dimensional Navier-Stokes flow. *Physical Review E*, 2000, 61(2): 2118~2120
- 11 Lindborg E. Can the atmospheric kinetic energy spectrum be explained by two-dimensional turbulence? *J Fluid Mech*, 1999, 388: 259~288

## SCALING LAW IN TWO-DIMENSIONAL TURBULENT CHANNEL FLOW<sup>1)</sup>

Li Xinliang   Ma Yanwen\*   Fu Dexun<sup>†</sup>

(SMC Center, Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

\*(LHD, Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China)

<sup>†</sup>(LNM, Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China)

**Abstract** The scaling laws of velocity structure functions in two-dimensional fully developed incompressible turbulent channel flow with variable Reynolds numbers are studied. According to this paper, Scaling laws and Extended self-similarity exist in the turbulent channel flow. According to this paper, scaling exponent varies as Reynolds number changed, but the anomaly of scaling exponent does not decrease as the rising of Reynolds number. So, scaling exponent of fully developed two-dimensional turbulent channel flow must be anomalous. The scaling exponent of this paper agrees well with the predicted value by SL theory, which means both results are believable.

**Key words** two-dimensional turbulent channel flow, scaling law, anomalous

---

Received 20 February 2000, revised 28 February 2002.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (59876002) and NKBRSF (G1999032805).