

非牛顿流体经波纹管流动的阻力特性*

朱 坚 亭 许 元 泽

(中国科学院化学研究所, 100080)

摘要 本文对 Carreau 流体经波纹管的蠕动流的阻力特性用差分方法作了数值求解. 先施行坐标变换, 提出一种保证周期性条件的混合迭代法, 能较快得到问题的收敛解. 流体的物质参数以及流动区域的几何参数对流动阻力特性的影响作了讨论, 同时指出了直径均匀的毛管模型作为渗流模型的不足之处.

关键词 Carreau 流体, 混合迭代法, 波纹管, 渗流模型, 阻力特性

1. 引言

聚合物驱油是化学驱油的唯一工业化方法. 因此, 非牛顿流体的多孔介质流动吸引了众多的研究者. 由于多孔介质内部几何结构的复杂性, 许多研究工作都对多孔介质的几何结构做了一些模型化, 使之能体现实际多孔介质结构的本质特性, 同时模型介质本身又不复杂, 可以进行流体力学分析. 毛管模型是广泛采用的典型代表, 将流体在多孔介质内部的流动假定为是以局部孔隙速度沿着许多毛管进行的, 最简单的毛管模型是由一束笔直、平行、同一直径的毛管构成, 此模型具有简单、使用方便等特点. 但必须指出, 最简单的直径均匀的毛管模型没有考虑真实多孔介质内部流道的收缩和扩张. Durst 等^[1]认为必须考虑在通道收缩和扩张中拉伸流动的贡献, 即使对于牛顿流体, 拉伸流的贡献也是不可忽略的. 对于非牛顿流体, 拉伸流的贡献更是举足轻重, 对于具有弹性的流体尤为如此.

波纹毛管模型抓住了拉伸、剪切并存的相继收敛和扩张的周期过程, 同时又具有几何上的简单性, 是进行理论分析的较好模型. 较早对此模型的流动进行理论分析大多采用摄动法. Deiber & Schowalter^[2] 曾对正弦变化毛管模型利用差分方法对 Maxwell 流体的流动, 提出一种所谓的几何迭代法进行了求解. 最近 Phan-Thien & Khan^[3] 用边界元法对 Oldroyd-B 流体的流动作了求解.

本文对通过坐标变换以后的方程用差分方法, 提出一种能保持空间周期性条件的迭代, 能较快得到问题的收敛解, 并讨论了各种物性参数和几何参数对阻力特性的影响.

2. 问题的数学提法

所考虑的流动区域如图 1 所示, $r = r_0(x)$ 为固壁的形状曲线.

本文于 1989 年 4 月 14 日收到, 1989 年 11 月 17 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助课题

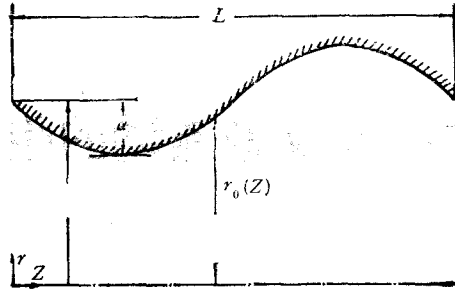


图 1 流动区域示意图

引进以下形式的无量纲数:

$$r = r'/R, z = z'/R, v = v'/U$$

$$\lambda = \lambda'U/R, \tau = \tau'R/\eta_0U, \rho = \rho'R/\eta_0U$$

其中 U 为特征速度(流动平均速度), R 为特征长度(管道的平均半径), λ' 为流体特征时间。对于多孔介质流动的典型条件,我们假定惯性项忽略不计。选用一种典型的剪切变稀流体模型, Carreau 模型作为本构方程

$$\tau = 2\eta(\text{II})D \quad (1)$$

$$\eta(\text{II}) = \theta + (1 - \theta)(1 + \lambda^2\text{II})^{(n-1)/2} \quad (2)$$

其中 τ 和 D 分别为无量纲偏应力张量和无量纲形变速率张量, $\eta(\text{II})$ 为以零剪切粘度 η_0 归一化以后的粘度函数, II 为 D 的第二不变量。

通常将应力 τ 分成两部分。

$$\tau = 2D + \tau^{(e)} \quad (3)$$

其中 $\tau^{(e)} = 2(\eta - 1)D$ 相当于由流体非牛顿性引起的应力附加项。

为了使壁面处理更加简单,我们考虑施行坐标变换,径向坐标 r 以壁面曲线 $r_0(z)$ 归一化,即引进新的坐标 $y = r/r_0(z)$, 同时引进流函数 ϕ 及涡量 Q ,则在新坐标 (z, y) 下,流函数及涡量方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1 + y^2 r_0'^2}{r_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{2y r_0'}{r_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \\ + \frac{y(2r_0'' - r_0 r_0''') - 1/y}{r_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} = y r_0 Q \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \frac{1 + y^2 r_0'^2}{r_0^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \frac{2y r_0'}{r_0} \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} \\ + \frac{y(2r_0'' - r_0 r_0''') + 1/y}{r_0^2} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{Q}{y^2 r_0^2} = h \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式中 h 为与附加应力 $\tau^{(e)}$ 及壁面形状等有关的函数,其形式不在此列出。

我们考虑流动区域固壁的形状变化在空间上具有重复性(周期性)的情况。在此情况下,因为我们考虑的是充分发展流动,流动区域几何形状的周期性变化导致物理量也具有周期性变化。在 (z, y) 坐标下,边界条件为

$$\text{中心线上, } \phi = 0, Q = 0 \quad (6)$$

$$\text{固壁上, } \phi = -0.5, Q_w = \frac{1 + r_0'^2}{r_0^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Big|_{y=1} \quad (7)$$

$$\text{周期性条件: } \phi(0, y) = \phi(L, y), Q(0, y) = Q(L, y) \quad (8)$$

$$\text{先考虑 } r_0(z) \text{ 为按正弦曲线变化的特殊场合, 即 } r_0(z) = 1 - \alpha \sin(2\pi z/L) \quad (9)$$

其中 α 表示管道的波纹度, L 为波长。

3. 方程求解的数值格式

对坐标变换以后的平面 $z-y$, 我们采用矩形网格划分, z 方向的步长 Δz , y 方向的步长 Δy . z 方向的节点序号记为 $i(1 \leq i \leq N_z)$, y 方向的记为 $j(1 \leq j \leq N_y)$. 采用中心差分。

$$\begin{aligned} A\phi_{i,j} = & A_1\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i+1,j} - A_1\phi_{i+1,j-1} + A_2\phi_{i,i+1} + A_3\phi_{i,i-1} \\ & - A_1\phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j} + A_1\phi_{i-1,j-1} - y r_0 \Delta z^2 Q_{i,j} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} BQ_{i,j} = & A_1Q_{i+1,j+1} + Q_{i+1,j} - A_1Q_{i+1,j-1} + B_2Q_{i,j+1} + B_3Q_{i,j-1} \\ & - A_1Q_{i-1,j+1} + Q_{i-1,j} + A_1Q_{i-1,j-1} + B_1\Delta z^2 \end{aligned} \quad (11)$$

上面两式中, $A, A_i(i=1, 2, 3), B, B_i(i=2, 3)$ 为流动区域参数、坐标以及网格的函数, B_1 还与 r_0' 有关。这些表达式不在此枚举。

使用具有二阶精度的壁面涡量条件:

$$Q_w = \frac{1 + r_0'^2}{r_0^3} \frac{1}{2\Delta y^2} (8\phi_{i,N_y-1} - \phi_{i,N_y-2} - 7\phi_{i,N_y}) + o(\Delta y^2) \quad (12)$$

混合迭代法是针对本问题的特殊情况, 为满足空间周期条件而提出的。

离散方程(10)、(11)是一个耦合系统, 需要用迭代法求解, 这样的迭代称为外迭代。对每一次外迭代都必须求解一组线性代数方程组, 如果此方程组也用迭代法求解, 则这种迭代称为内迭代。混合迭代是针对内迭代而提出的, 考虑到 $r_0(0) = r_0(L)$, 且 r_0', r_0'' 都具有同样的周期性, 如果迭代时, 沿轴向用 Jacobi 迭代, 沿径向用 Gauss-Seidal 迭代, 则只要在给定迭代初值时, 给定入、出口处的值相等就能保证在每次迭代以后, 入口处和出口处的物理量值始终保持相等, 亦即永远能保证满足空间周期性条件, 而不必对周期性条件作另外的强制。我们称这样的迭代格式为混合迭代, 其表达式为:

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{[m+1]} = & (A_1\phi_{i+1,j+1}^{[m]} + \phi_{i+1,j}^{[m]} - A_1\phi_{i+1,j-1}^{[m]} + A_2\phi_{i,i+1}^{[m]} + A_3\phi_{i,i-1}^{[m]} \\ & - A_1\phi_{i-1,j+1}^{[m]} + \phi_{i-1,j}^{[m]} + A_1\phi_{i-1,j-1}^{[m]} - r_0 y \Delta z^2 Q_{i,j}^{[m]}) / A \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} Q_{i,j}^{[m+1]} = & (A_1Q_{i+1,j+1}^{[m]} + Q_{i+1,j}^{[m]} - A_1Q_{i+1,j-1}^{[m]} + B_2Q_{i,j+1}^{[m]} + B_3Q_{i,j-1}^{[m]} \\ & - A_1Q_{i-1,j+1}^{[m]} + Q_{i-1,j}^{[m]} + A_1Q_{i-1,j-1}^{[m]} + B_1\Delta z^2) / B \end{aligned} \quad (14)$$

数值试验的结果表明: 用此迭代法可以大大提高收敛速度。但必须指出, 混合迭代格式只有当 r_0, r_0' 以及 r_0'' 都具有周期性时, 才能保证空间周期性条件永远满足。

如果给定一组小数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, 由混合迭代法进行内迭代, 第 $n+1$ 次外迭代以后满足:

$$\max_{i,j} \frac{|\phi_{n+1} - \phi_n|}{|\phi_n|} \leq \varepsilon_1 \quad (15)$$

$$\max_{i,j} \frac{|Q_{n+1} - Q_n|}{|Q_n|} \leq \varepsilon_2 \quad (16)$$

则认为数值解已经收敛,迭代过程停止.

4. 结果及其讨论

数值计算工作在 IBM-PC/XT 微机上进行,对于每一组给定的物性参数,如果固定 $\varepsilon_1 = 5 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 10^{-3}$,则一般需要外迭代 80 次左右能收敛,迭代的次数在很大程度上依赖波数 α , α 越大,所需的迭代次数就越多.

定义阻力因子和雷诺数如下.

$$f = \frac{1}{4} \frac{2R}{L'} \frac{\Delta p'}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (17)$$

$$N_{Re} = 2UK\rho/\eta_0 \quad (18)$$

在求得速度场和应力场以后,我们不难用数值积分求出 $f \cdot N_{Re}$ 的值.在计算中,我们固定 $L = 2$.

图 2 表示 $n = 0.5$, $\alpha = 0.3$ 时的阻力特性 ($f \cdot N_{Re}$) 随特征时间 λ 的变化情况;如果改变 α 值, $f \cdot N_{Re}$ 随 λ 的变化具有与图 2 相同的形态,不同之处在于定量上的差别, α 值越大, $f \cdot N_{Re}$ 也越大,并且曲线发生转折的 λ 值提前.图 3 所示是 $n = 0.5$, $\theta = 0.1$ 时 $f \cdot N_{Re}$ 随波数 α 的变化情况,从图中可以看出阻力特性随 α 的急剧变化,拉伸流动对阻力特性的贡献由此略见端倪.图 4 表示 $n = 0.5$, $\alpha = 0.3$ 时的阻力特性对 θ 的依赖关系,从中我们看到了 $f \cdot N_{Re}$ 对 θ 的几乎线性增长关系.图 5 表示阻力特性随幂律指数 n 的变化规律,从图中可以看出,当 λ 值很小时,阻力特性几乎不随 n 而变化,表现出强烈的牛顿性.

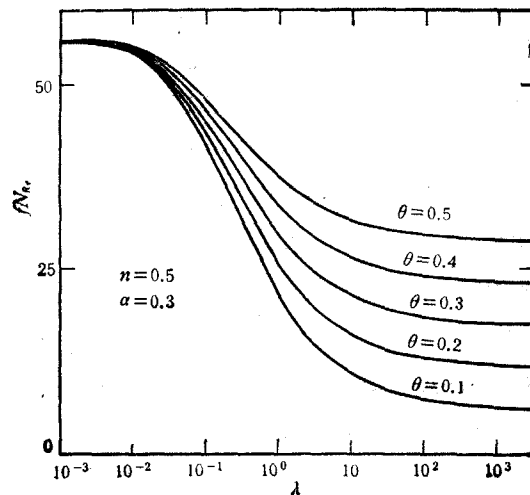


图 2 阻力特性对特征时间 λ 的依赖关系

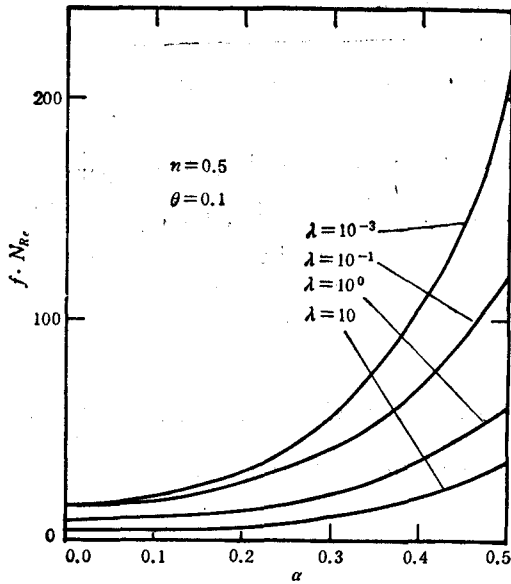


图 3 阻力特性随波纹度 α 的变化

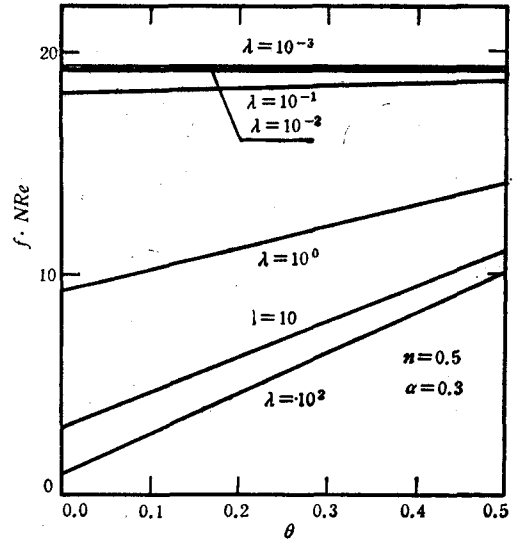
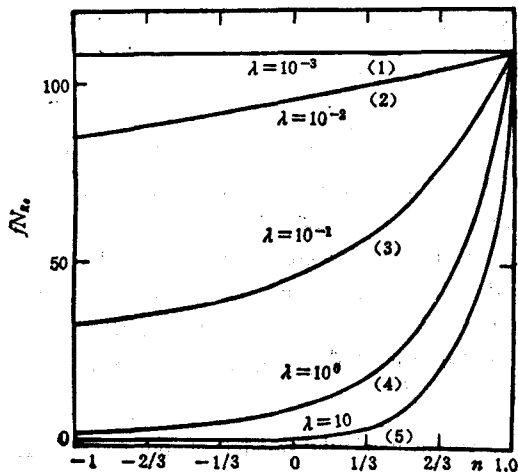


图 4 阻力特性随 θ 的依赖关系



阻力特性随幂律指数 n 的变化

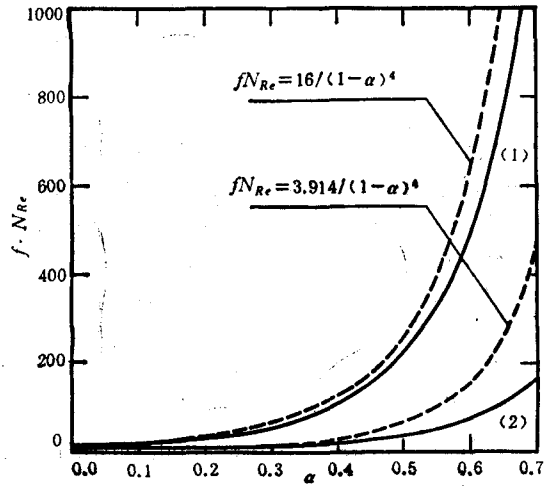


图 6 阻力特性与经验公式

$$f \cdot N_{Re} = (f \cdot N_{Re})_{\alpha=0} / (1 - \alpha)^4$$

比较 (1) 牛顿流体 $(f \cdot N_{Re})_{\alpha=0} = 16$ (2) Carreau 流体 $n = 0.5$, $\lambda = 10$ $\theta = 0.1$ $(f \cdot N_{Re})_{\alpha=0} = 3.914$

我们已经看到,波纹度对阻力特性的巨大影响。对 Oldroyd-B 流体, Phan-Thien & Khan^[5] 建议由经验公式 $f \cdot N_{Re} = (f \cdot N_{Re})_{\alpha=0} / (1 - \alpha)^4$ 来表征 α 的影响,图 6 表示

了本文结果与此经验公式的比较。我们认为,其偏差主要来源于 Oldroyd-B 流体的弹性以及在推导经验公式时关于流体几乎沿中心轴附近流过波纹管的假定。

5. 小结

我们以混合迭代法求解了 Carreau 流体经波纹管蠕动流的阻力特性,用此迭代法能较快得到问题的收敛解。流体的剪切变稀使流动阻力特性下降,其变化形态与粘度本身相似,而拉伸流动的结果使流动阻力特性明显上升,即使对非弹性流体,拉伸对流动阻力特性也有重大影响。经典的均匀直径的毛管模型没有考虑到真实多孔介质内部的拉伸流动,过低地估计了多孔介质流动的阻力特性,其偏差不仅来自于实际流道的迂曲性,也来源于实际流道的收缩和扩张。

参 考 文 献

- [1] Durst, F., Haas, R. & Interthal, W., *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 22(1987), 169.
- [2] Deiber J. A., Schowalter, W. R., *AIChE. J.*, 27(1987), 912.
- [3] Phan-Thien, N., Khan, M. M. K., *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 24(1987), 203.

FLOW RESISTANCE OF A CARREAU FLUID THROUGH CORRUGATED TUBE

Zhu Jianting Xu Yuanze

(*Institute of Chemistry, Academia Sinica*)

Abstract In this paper, we used finite difference method to simulate the creeping flow of a Carreau fluid through sinusoidally corrugated tube for various geometrical and material parameters. The governing equations after coordinate transformation were solved. An iteration scheme was put forward to ensure the spatial periodicity condition. The reasonably rapid convergence can be reached as compared with other iteration schemes. The influences of geometrical and rheological parameters on flow resistance were discussed, and the inadequacy of classical capillary model with uniform radius for flow through porous media was presented.

Key words Carreau fluid, mixed iteration, corrugated tube, model of porous media, flow resistance