

多孔介质中流体不稳定界面的分枝现象*

张 慧 生
(复旦大学应用力学系)

提要 本文通过理论分析和数值实验发现多孔介质中流体不稳定界面的分枝主要取决于无量纲参数 C_1 和 S 的值。对 C_1 取值范围内任一给定的值,存在 S 的一个临界值 S_1 , 使当 $1 < S < S_1$ 时,平面界面受任一小扰动后都不会发展成分枝,当 $S > S_1$ 时,平面界面受小扰动后就有可能发展成分枝。 S_1 随 C_1 的减小而增大。存在 C_1 的一个临界值 C_1^* , 对取值范围内任一给定的 $C_1 > C_1^*$, 还存在 S 的另外两个临界值 S_2 和 S_3 , 使当 $S_2 < S < S_3$ 时,平面界面受任一小扰动后都会因出现分枝而不能发展成成长指形。 S_2 随 C_1 的减小而增大, S_3 随 C_1 的减小而减小。在 $C_1 > C_1^*$ 情形,当 $S_1 < S < S_2$ 或 $S > S_3$ 时,或在 $C_1 < C_1^*$ 情形当 $S > S_1$ 时,界面是否会发展成分枝则还与扰动形式有关。此外,本文还通过任意界面的线性稳定性分析和频谱分析得到了界面发生分枝的必要条件。

关键词 分枝,流体不稳定界面,多孔介质

一、引 言

1958年 Saffman 和 Taylor 在关于 Hele-Shaw 流的经典实验中观察到流体不稳定界面最终总会发展成成长指形^[1]。但 Nittmann 等人和 Park 等人在关于 Hele-Shaw 流的实验中,我们在关于多孔介质流的计算中, DeGregoria 等人在关于 Hele-Shaw 流的计算中都发现:在一定的条件下指形界面会发生分枝^[2-6]。本文试图用理论分析和数值实验的方法从流动的自身条件去研究多孔介质中流体不稳定界面的分枝规律。

二、支配方程及其数值解法

设多孔介质中两种不可压缩不可混合流体的二维流动满足 Darcy 定律,在水平方向满足周期边界条件,在无穷远处速度均匀且沿垂直方向,那末当坐标系以无穷远处速度运动时,若适当选择各量的参考值,则流体界面的运动服从如下的无量纲方程^[4]

$$\mu(e, t) = C_1 \phi(e, t) + C_2 y(e, t) + C_3 \gamma(e, t) \quad (2.1)$$

$$\phi(e, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} A(e, e', t) \Delta \mu de' \quad (2.2)$$

$$\psi(e, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} B(e, e', t) \Delta \mu de' \quad (2.3)$$

$$\partial x(e, t) / \partial t = (\phi_e x_e + \psi_e y_e) / (x_e^2 + y_e^2) \quad (2.4)$$

本文 1988 年 5 月 3 日收到, 1990 年 1 月 27 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目。本文曾被 17 届 ICTAM 录取为宣读论文。在此基础上, 本文又有新的发展。

$$\partial y(e, t) / \partial t = (\phi_e y_e - \phi_e x_e) / (x_e^2 + y_e^2) \quad (2.5)$$

(2.2)和(2.3)中积分核 $A(e, e', t)$ 和 $B(e, e', t)$ 的表达式为

$$A(e, e', t) = (x_e' \operatorname{sh} \Delta y - y_e' \sin \Delta x) / D \quad (2.6)$$

$$B(e, e', t) = (x_e' \sin \Delta x + y_e' \operatorname{sh} \Delta y) / D \quad (2.7)$$

以上各式中, e 为界面的 Lagrange 坐标, $z(e, t) = x(e, t) + iy(e, t)$ 为界面表达式, x 和 y 分别为水平坐标和垂直坐标(向上为正), ϕ 和 ψ 分别为势函数和流函数,

$$\gamma(e, t) = (x_e y_{ee} - y_e x_{ee}) / (x_e^2 + y_e^2)^{3/2} \quad (2.8)$$

为界面曲率, $\mu(e, t)$ 为分布在界面上的偶极子密度, $\Delta x = x(e', t) - x(e, t)$, $\Delta y = y(e', t) - y(e, t)$, $\Delta \mu = \mu(e', t) - \mu(e, t)$, $D = \operatorname{ch} \Delta y - \cos \Delta x$, 而 x_e 表示 $\partial x(e, t) / \partial e$, x_e' 表示 $\partial x(e', t) / \partial e$, x_{ee} 表示 $\partial^2 x(e, t) / \partial e^2$ 等. 无量纲参数 C_1 、 C_2 和 C_3 的定义是

$$C_1 = 2(\sigma_2 - \sigma_1) / (\sigma_2 + \sigma_1) \quad (2.9)$$

$$C_2 = C_1 V + 2\sigma_1 \sigma_2 (\rho_1 - \rho_2) / (\sigma_2 + \sigma_1) \quad (2.10)$$

$$C_3 = 2\sigma_1 \sigma_2 T / (\sigma_2 + \sigma_1) \quad (2.11)$$

这里 ρ 和 V 分别是流体的密度和无穷远处速度, T 为界面张力, $\sigma = \delta / \eta$, 而 η 和 δ 分别是流体的动力粘度和它对介质的渗透系数, 以上均为无量化后的量. 下标 1 和 2 分别表示界面上、下的流体变量. 本文假设 σ_1 、 σ_2 、 ρ_1 、 ρ_2 均为常数, 但允许 $\sigma_1 \approx \sigma_2$, $\rho_1 \approx \rho_2$. 由(2.9)–(2.11)知, 当忽略界面张力时 $C_3 = 0$, 否则 C_3 恒正; C_1 的取值范围是 $-2 \leq C_1 \leq 2$, $C_1 = 2(-2)$ 对应于下(上)面流体粘度为零的极端情况.

本文用差分法解支配方程, 用对充分光滑周期被积函数有很高精度的等间距梯形公式数值求积. 引进记号

$$z_j^n = z(j\Delta e, n\Delta t), \quad A_{j,k}^n = A(j\Delta e, k\Delta e, n\Delta t), \dots \\ (j, k = 0, 1, \dots, J; n = 0, 1, \dots) \quad (2.12)$$

这里 J 为网格等分数, $\Delta e = 2\pi/J$ 为网格间距, Δt 为时间步长. 本文的目的是对任意给定的界面初始位置 z_j^0 , 计算它在以后各时刻的位置 z_j^n . t 从 $n\Delta t$ 到 $(n+1)\Delta t$ 的推进由两部分组成. 首先对已算出的 $z_j^n (j = 0, 1, \dots, J)$, 由(2.1)–(2.3)的离散形式

$$\mu_j^n = C_1 \phi_j^n + C_2 y_j^n + C_3 \gamma_j^n \quad (2.13)$$

$$\phi_j^n = \frac{1}{2J} \sum_{0 \leq k \leq J-1, k \neq j} A_{j,k}^n (\mu_k^n - \mu_j^n) \quad (2.14)$$

$$\phi_j^n = \frac{1}{2J} \sum_{0 \leq k \leq J-1, k \neq j} B_{j,k}^n (\mu_k^n - \mu_j^n) + \frac{1}{4\pi} (\mu_{j+1}^n - \mu_{j-1}^n) \quad (2.15)$$

解出 μ_j^n 、 ϕ_j^n 和 ψ_j^n 来, 其中导数在网格点上的值 $(x_e)_j^n$ 、 $(x_{ee})_j^n$ 等, 分别用具有二阶精度的中心差商 $(x_{j+1}^n - x_{j-1}^n) / 2\Delta e$, $(x_{j+1}^n + x_{j-1}^n - 2x_j^n) / \Delta e^2$ 等来代替. 因(2.15)不与(2.13)和(2.14)耦合, 故可先从(2.13)和(2.14)解出 μ_j^n 和 ϕ_j^n 来, 再代入(2.15)得 ψ_j^n . 由于积分核的特殊性质^[7], 用 Gauss-Seidel 迭代法解(2.13)–(2.14), 一般只要 2–6 次迭代就能达到机器精度, 故比直接法更有效.

第二部分是(2.14)、(2.15)所对应的差分方程求出 z_j^{n+1} 来. 由于本工作的目的是研究界面运动的发展趋势, 为程序简单起见, 本文采用一阶显格式. 记(2.4)、(2.5)的右端

分别为 $F(e, t)$ 和 $G(e, t)$, 则一阶显格式为

$$(x_i^{n+1} - x_i^n)/\Delta t = F_i^n, (y_i^{n+1} - y_i^n)/\Delta t = G_i^n \quad (2.16)$$

由于一阶显格式的最大稳定时间步长正比于 Δe 的立方^[8], 故即使用一阶显格式, t 方向的精度也足以保证. 计算中为避免因界面上标记点过分集中而引起数值混乱, 本文采用速度加权平均和标记点重新分布技术^[9]. 为减小因标记点重新分布带来的误差, 仅当标记点间距的最大值与最小值之比大于 8 时才采用这一技术.

三、界面的线性化稳定性分析

对方程(2.1)–(2.8)进行一阶变分, 可得周期为 2π 的小扰动 $(\tilde{x}(e, t), \tilde{y}(e, t))$ 所满足的线性化发展方程. 特别地, 平面界面的小扰动满足

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mu}(e, t) &= C_2 \tilde{y}(e, t) + C_3 \tilde{y}_{ec}(e, t) \\ \tilde{\phi}(e, t) &= 0, \quad \tilde{\psi}(e, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\tilde{\mu}(e', t) - \tilde{\mu}(e, t)) \cot \frac{e' - e}{2} de' \\ \partial \tilde{x}(e, t) / \partial t &= 0, \quad \partial \tilde{y}(e, t) / \partial t = -\tilde{\phi}_e(e, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

故对平面界面的小扰动来说, 其水平分量的变化与其垂直分量的变化相比可以忽略, 因此只要分析其垂直分量的变化就够了. 现分析波数为 m 的扰动模态的增长情况. 把 $\tilde{y}(e, t) = a(t) \cos(me) + b(t) \sin(me)$ 代入(3.1), 得

$$\tilde{y}(e, t) = \tilde{y}(e, 0) \exp(\lambda t) \quad (3.2)$$

其中 $\lambda = \lambda(m)$ 是波数为 m 的增长因子

$$\lambda(m) = C_3 m(S - m^2)/2 \quad (3.3)$$

它只依赖于 C_2 和 C_3 , 而与 C_1 无关. 这里

$$S = C_2/C_3 \quad (3.4)$$

为无量纲界面常数. $\lambda(m) < 0$ 对应于不增长模态, $\lambda(m) > 0$ 对应于以指数速度增长的模态. 由(3.3)知, 存在 S 的一系列临界值 1, 7, 19, \dots , $m^3 - (m-1)^3, \dots$. 当 $S \leq 1$ 时, (3.1) 的一切正规模态解均不增长; 当 $1 < S < 7$ 时, 波数为 1 的正规模态解增长最快; 当 $7 < S < 19$ 时, 波数为 2 的正规模态解增长最快; \dots . 由于初始扰动的随机性, (3.1) 的初始条件中会含有各种波数的分量, 又因本问题的各 Fourier 分量的发展都是独立的, 故经过较长时间的发展后, 解的最终形态主要由增长最快的正规模态分量所决定, 因此 $S \leq 1$ 对应于稳定界面情形, $S > 1$ 对应于不稳定界面情形. 当然以上仅是线性化分析的结果, 它们不一定与实际情况完全相符. 本文的目的是希望能从线性化分析的结果中取得启发, 用来指导数值实验, 以期求得关于界面分枝的一些规律. 在[10]中我们通过数值实验证实了区分平面界面稳定和不稳定的 S 的临界值确实是 1. 下节我们将通过数值实验研究在 $S > 1$ 范围内界面的分枝规律.

对任意界面的线性化发展方程来说, 由于不同波数 Fourier 分量间的交互作用使得它们的变化不独立, 故得不到形如(3.2)那样简单的增长关系, 一般只能用数值方法求得其近似增长关系. 若用标记点的离散扰动

$$w = [\tilde{x}_0(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_{J-1}(t); \tilde{y}_0(t), \tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_{J-1}(t)]^T \quad (3.5)$$

代替连续扰动 $(\tilde{x}(e, t), \tilde{y}(e, t))$, 这里上标 T 表示矩阵的转置, 则由任意界面的线性化发

展方程的离散形式可得

$$dw/dt = Cw \quad (3.6)$$

这里 C 是一个依赖于 t 时刻界面形状的常数阵。设 C 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$, 对应初等因子的次数分别为 n_1, n_2, \dots, n_q ($n_1 + n_2 + \dots + n_q = 2J$), 则存在非异阵 P , 使 $P^{-1}CP$ 为 Jordan 标准形。当 λ_1 为单根且满足

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) > \operatorname{Re}(\lambda_j), \quad (j = 2, \dots, q) \quad (3.7)$$

时, 离散扰动的解可表示为

$$w(t) = r^{(1)} \exp(\lambda_1 t) p^{(1)} + \sum_{j=2}^q \exp(\lambda_j t) \sum_{k=0}^{n_j-1} p_k^{(j)} \sum_{s=k}^{n_j-1} \frac{r_s^{(j)}}{s!} t^{n_j-1-s} \quad (3.8)$$

这里 $p^{(1)}$ 是 P 的第 1 列, 它是 C 对应于 λ_1 的特征向量, $p_k^{(j)}$ ($k = 0, \dots, n_j-1; j = 2, \dots, q$) 是 P 的其余各列:

$$P = [p^{(1)}; p_0^{(2)}, \dots, p_{n_2-1}^{(2)}; \dots; p_0^{(q)}, \dots, p_{n_q-1}^{(q)}] \quad (3.9)$$

$r^{(1)}$ 为向量 $r = P^{-1}w(0)$ 的第 1 个分量, $r_k^{(j)}$ ($k = 0, \dots, n_j-1; j = 2, \dots, q$) 为 r 的其余各分量。由于初始扰动的随机性, 一般 $r^{(1)} \neq 0$, 故离散化发展方程解的发展情况主要决定于 C 的实部最大特征值所对应的特征向量(连续情形, 线化发展方程解的发展情况主要决定于实部最大特征值所对应的特征函数)。

四、数值实验结果

本数值实验的第一个目的是证明对 C_1 取值范围内任一给定的值, 存在 S 的一个临界值 S_1 , 使当 $1 < S < S_1$ 时, 平面界面受任一小扰动后都能发展成成长指形而不会发生分枝, 当 $S > S_1$ 时, 平面界面受小扰动后就可能形成分枝而不能发展成成长指形。为此应对给定的 C_1, C_2 值, 求出各种小扰动下 C_3 临界值及相应的 $S = C_2/C_3$ 的临界值, 再求出这些 S 临界值的最小值 S_1 , 然后再让 C_2 变化, 证明 S_1 与 C_2 无关。由于数值实验无法对一切小扰动进行计算, 故希望能找出一种有代表性的小扰动, 若平面界面受这一小扰动后能发展成成长指形, 则它受任一小扰动后都能发展成成长指形。由线化分析和[10]中的数值实验结果知, 波数为 1 的 Fourier 分量有利于使界面发展成成长指形, 波数大于 1 的 Fourier 分量易促使界面形成分枝, 故初始扰动应取为

$$\tilde{y}(e, 0) = \alpha_1 [1 - \cos(e)] + \alpha_2 [1 - \cos(me)] \quad (4.1)$$

这里 α_1 和 α_2 为小正数。对 $\alpha_1 \leq 0.2, \alpha_2 \leq 0.2$ (对小扰动来说这一取值范围已足够) 的一切 α_1 和 α_2 , 通过数值实验发现 $\alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2$ 具有代表性。对 $C_1 = C_2 = 2, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2, m = 2$ 情形, C_3 的临界值在 0.50 与 0.51 之间, 对应的 S 临界值约为 $2/0.50 = 4$ 。图 1 和图 2 分别描述了 $C_3 = 0.6$ 和 $C_3 = 0.4$ 时界面的发展情况。两种情形的 S 值分别低于和高于临界值 4。可以看到, 对于中部有凹陷的同一扰动, 前者界面最终发展成成长指形, 后者界面最终形成两枝, 显示了两种完全不同的发展情况。

接下来对同一情形 $C_1 = C_2 = 2, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2$, 取 $m = 3$ 进行数值实验。图 3、4、5 分别描述了 $C_3 = 0.3, 0.2, 0.1$ 时界面的发展情况。可以看到, 对同一种扰动, 前一种界面最终发展成成长指形, 后两种界面分别发展成两枝和三枝, 其中最后一种界面中间一枝基部处的颈缩不断发展的结果使头部分离而去。故对同一情形 $C_1 = C_2 = 2$, 当 (4.1)

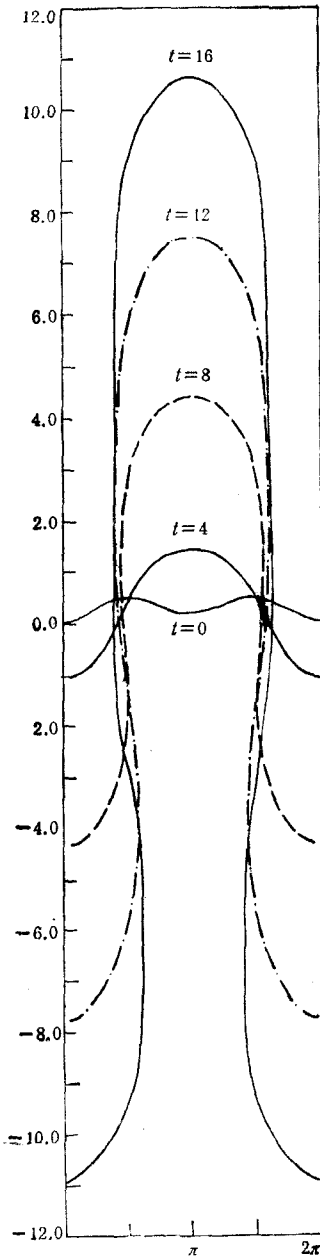


图 1

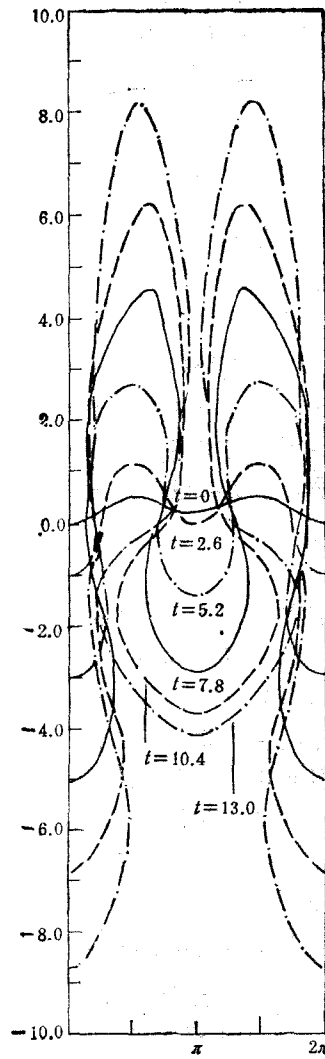


图 2

中的 m 取为 3 时, 对应的 S 临界值大于 $2/0.3 \approx 6.7$, 更大于 $m=2$ 时的临界值 4, 这一趋势与线性化结果一致. 因此初始扰动 (4.1) 中的波数 m 应取为 2 才有代表性. 以下结果都是在 $m=2$, $\alpha_1=0.1$, $\alpha_2=0.2$ 下算得的.

对 $C_1=2, 1, 0, -1, -2$ 及 $C_2=2, 4, 6, 8, 10$ 各种组合情形, 表 1 列出了 C_1 临界值及相应的 S 临界值. 可以看到, 对同一 C_1 值, 界面是否能发展成成长指形仅与 $S=C_2/$

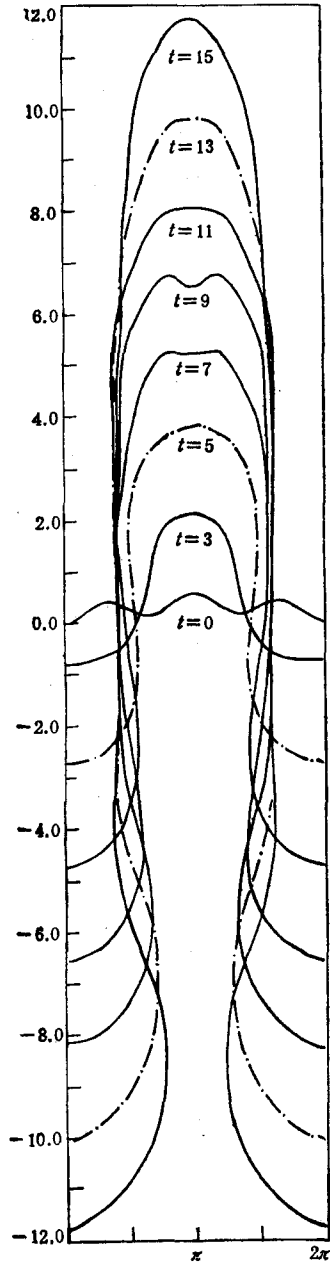


图 3

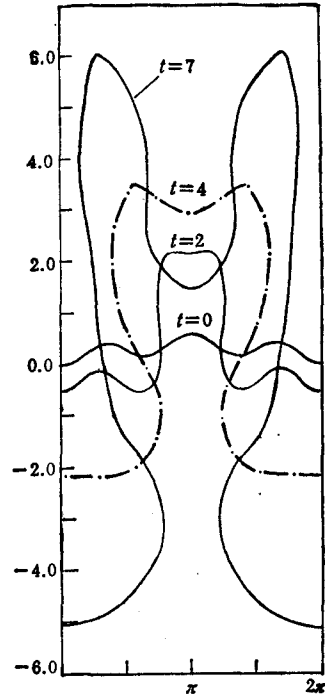


图 4

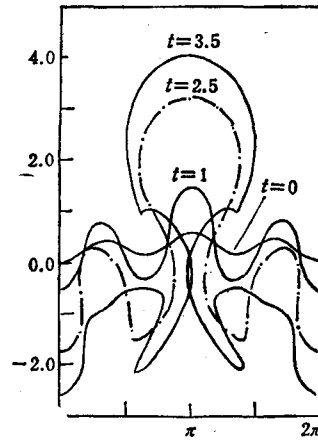


图 5

C_3 的值有关, 且 S 的临界值 S_1 确实存在, 它随 C_1 的减小而增大。

本数值实验的第二个目的是证明对给定的 C_1 值, 存在 S 的另外两个临界值 S_2 和 S_3 ($S_3 > S_2 > S_1$), 使当 $S_2 < S < S_3$ 时, 平面界面受任一小扰动后都会因出现分枝而不能发展成生长指形。由于初始扰动中波数为 1 的 Fourier 分量有利与使界面发展成生长指形, 波数大于 1 的 Fourier 分量易促使界面形成分枝, 因此为第二个目的所用的具有代表性

表 1

| $C_2 \backslash C_1$ | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 |
|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 2 | $.50 < C_3 < .51$ | $.48 < C_3 < .49$ | $.46 < C_3 < .47$ | $.41 < C_3 < .42$ | $.17 < C_3 < .18$ |
| 4 | $1.00 < C_3 < 1.02$ | $.96 < C_3 < .98$ | $.92 < C_3 < .94$ | $.82 < C_3 < .84$ | $.34 < C_3 < .36$ |
| 6 | $1.50 < C_3 < 1.53$ | $1.44 < C_3 < 1.47$ | $1.38 < C_3 < 1.41$ | $1.23 < C_3 < 1.26$ | $.51 < C_3 < .54$ |
| 8 | $2.00 < C_3 < 2.04$ | $1.92 < C_3 < 1.96$ | $1.84 < C_3 < 1.88$ | $1.64 < C_3 < 1.68$ | $.68 < C_3 < .72$ |
| 10 | $2.50 < C_3 < 2.55$ | $2.40 < C_3 < 2.45$ | $2.30 < C_3 < 2.35$ | $2.05 < C_3 < 2.10$ | $.85 < C_3 < .90$ |
| | $3.92 < S < 4.00$ | $4.08 < S < 4.17$ | $4.25 < S < 4.35$ | $4.76 < S < 4.88$ | $11.11 < S < 11.77$ |

表 2

| $C_2 \backslash C_1$ | 2 | | 1.5 | |
|----------------------|--------------------------|------------------------|--------------------------|------------------------|
| 2 | $.29 < C_{3max} < .30$ | $.06 < C_{3min} < .07$ | $.19 < C_{3max} < .20$ | $.08 < C_{3min} < .09$ |
| 4 | $.58 < C_{3max} < .60$ | $.12 < C_{3min} < .14$ | $.39 < C_{3max} < .41$ | $.16 < C_{3min} < .18$ |
| 6 | $.87 < C_{3max} < .90$ | $.18 < C_{3min} < .21$ | $.60 < C_{3max} < .63$ | $.24 < C_{3min} < .27$ |
| 8 | $1.16 < C_{3max} < 1.20$ | $.24 < C_{3min} < .28$ | $.80 < C_{3max} < .84$ | $.32 < C_{3min} < .36$ |
| 10 | $1.45 < C_{3max} < 1.50$ | $.30 < C_{3min} < .35$ | $1.00 < C_{3max} < 1.05$ | $.40 < C_{3min} < .45$ |
| | $6.6 < S_2 < 7.0$ | $28.5 < S_2 < 33.5$ | $9.5 < S_2 < 10.5$ | $22 < S_2 < 25$ |

表 3

| $C_1 = 2$ | $C_1 = 1.5$ | $C_1 = 1$ | $C_1 = 0.9$ |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $.06 < C_3 < .30$ | $.08 < C_3 < .20$ | $.09 < C_3 < .15$ | $.10 < C_3 < .12$ |
| $6.6 < S < 33.4$ | $10 < S < 25$ | $13.3 < S < 22.3$ | $16.6 < S < 20$ |

的小扰动可取为

$$\tilde{y}(e, 0) = 0.1[1 - \cos e] \quad (4.2)$$

若平面界面受此小扰动后能发展成分枝,则它受任一小扰动后也会发展成分枝。对 $C_1 = 2, 1.5, C_2 = 2, 4, 6, 8, 10$ 各种组合情形,表 2 列出了界面能发展成分枝的 C_3 的最大

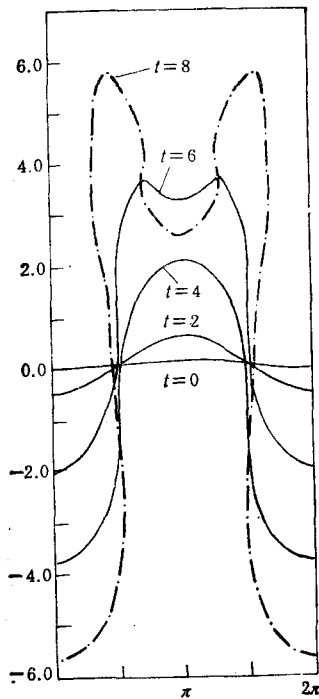


图 6

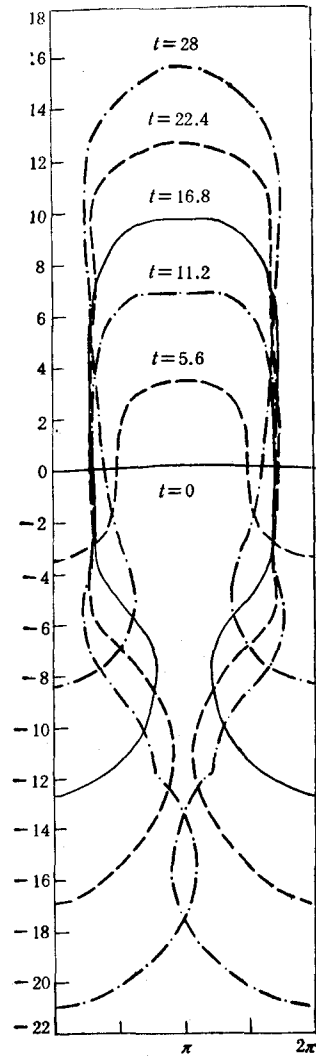


图 7

值和最小值及相应的 S_2 值和 S_3 值。可以看到,对给定的 C_1 值,界面能否发展成分枝仅依赖于 C_2 与 C_3 的比值 S ,且 S 的另外两个临界值 S_2 和 S_3 确实存在。

当 $C_2 = 2$ 时,对不同的 C_1 值,表 3 列出了界面能发展成分枝的 C_3 的取值范围及相应的 S 的取值范围。可以看到, S_2 随 C_1 的减小而增大, S_3 随 C_1 的减小而减小。当 $C_1 \leq 0.8$ 时,对一切 C_3 值,界面都不会发生分枝。因此存在 C_1 的一个临界值 $C_1^*(0.8 < C_1^* < 0.9)$,仅对取值范围内任一给定的 $C_1 > C_1^*$,才存在 S 的上述两个临界值 S_2 和 S_3 。

对 $C_1 = C_2 = 2, C_3 = 0.2$ 情形,图 6 描述了界面的发展情况。这时的 $S = 10$,在对应的 $S_2 \approx 7$ 与 $S_3 \approx 30$ 之间。可以看到,界面最终发展成两枝。

对 $C_1 = 1.5, C_2 = 2$ 情形,图 7、8、9 分别描述了 $C_3 = 0.2、0.18、0.15$ 时界面的发展情况。第一种情形的 S 值小于 S_2 但非常接近 S_2 ,后两种情形的 S 值均在对应的 S_2

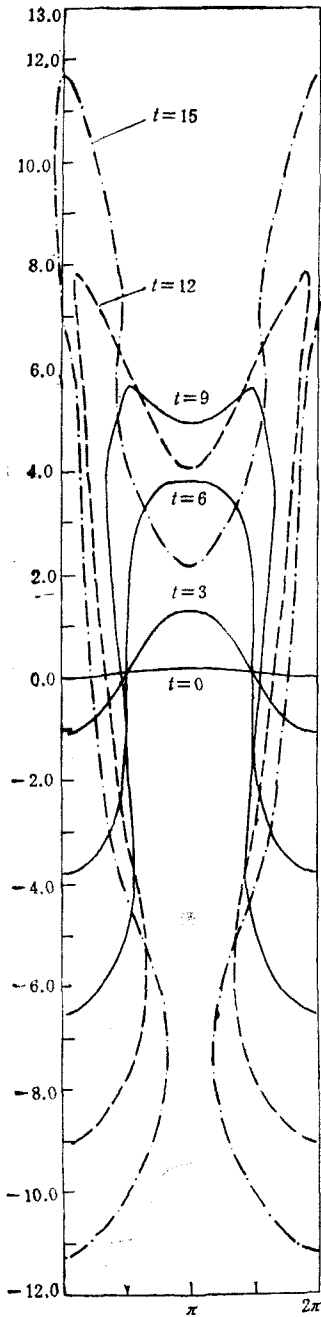


图 8

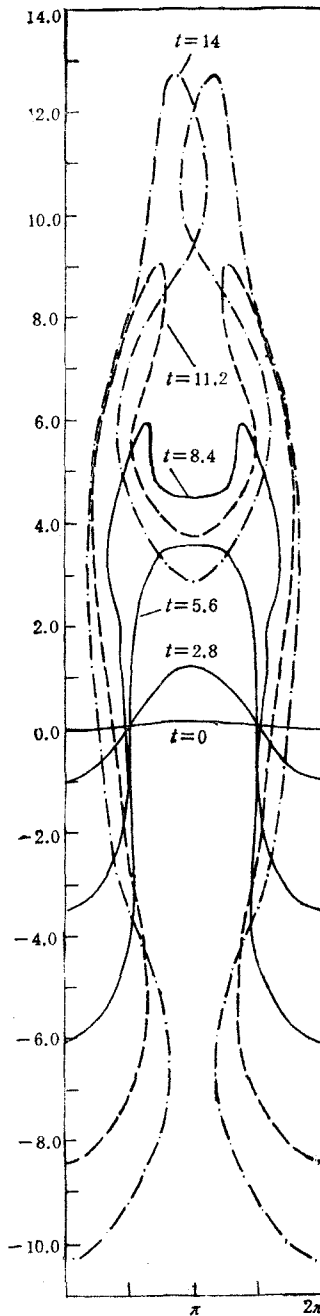


图 9

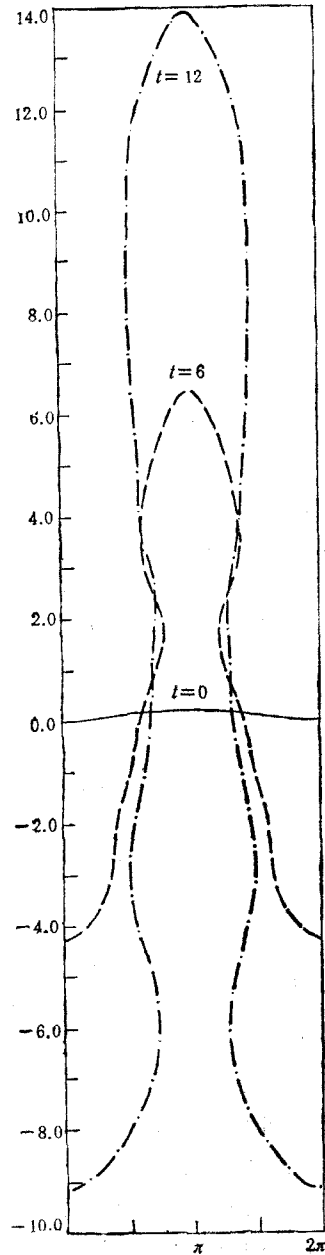


图 10

与 S_3 之间。可以看到, 第一种情形的界面最终发展成手指形, 且其基部颈缩的发展最后使其前部分离而去; 后两种情形的界面最后都发展成两枝, 但第二种情形的两个分枝后来与左右两侧界面的分枝连在一起, 使界面左右两侧的被驱动流体形成独立流团, 而第三种情形的两个分枝的端部后来互相连在一起, 使界面顶部凹陷处的被驱动流体形成一个独

表 4

| t | λ_1 | λ_2 | t | λ_1 | λ_2 | t | λ_1 | λ_2 |
|-----|-------------|-------------|-----|-------------|-----------------------|-----|-------------|-------------|
| 0 | 0.82438 | 0.82321 | 7 | 0.76781 | 0.58806 | 14 | 0.56024 | 0.24017 |
| 1 | 0.81347 | 0.61016 | 8 | 0.75761 | 0.51357 | 15 | 0.54531 | 0.20662 |
| 2 | 0.79675 | 0.63697 | 9 | 0.74626 | $0.43216 \pm 0.0812i$ | 16 | 0.59804 | 0.45181 |
| 3 | 0.82986 | 0.52739 | 10 | 0.70914 | 0.34247 | 17 | 0.51465 | 0.46810 |
| 4 | 0.90139 | 0.76568 | 11 | 0.70334 | 0.39953 | 18 | 0.40817 | 0.33276 |
| 5 | 0.86154 | 0.82767 | 12 | 0.65340 | 0.33400 | 19 | 0.90953 | 0.56773 |
| 6 | 0.79549 | 0.63880 | 13 | 0.61074 | 0.27950 | 20 | 0.96910 | 0.67823 |

表 5

| $m \backslash t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|-------|---------|---------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 4.00 | 0.00236 | 0.0111 | $3.69_{10} - 6$ | $1.43_{10} - 5$ | $2.0_{10} - 6$ |
| 1 | 4.00 | 0.0657 | 0.00719 | 0.00142 | 0.00308 | $2.00_{10} - 5$ |
| 2 | 3.97 | 0.426 | 0.286 | 0.0138 | 0.0319 | 0.00727 |
| 3 | 3.52 | 1.14 | 1.44 | 0.441 | 0.128 | 0.0790 |
| 4 | 2.57 | 1.83 | 2.18 | 0.990 | 0.498 | 0.118 |
| 5 | 2.28 | 1.84 | 2.42 | 0.918 | 0.663 | 0.159 |
| 6 | 1.55 | 1.52 | 1.48 | 1.38 | 1.53 | 1.36 |
| 7 | 1.34 | 1.56 | 1.48 | 1.41 | 1.42 | 1.34 |
| 8 | 1.09 | 1.42 | 1.43 | 1.42 | 1.39 | 1.33 |
| 9 | 0.925 | 1.30 | 1.39 | 1.42 | 1.40 | 1.35 |
| 10 | 0.883 | 1.27 | 1.40 | 1.45 | 1.42 | 1.36 |

立的流团。

图 10 描述了 $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 0.01$ 时界面的发展情况。这时的 $S = 200$, 远大于对应的 $S_3 \approx 20$ 。可以看到, 界面顶端未出现分枝, 但在发展的后阶段, 在指形侧面出现了两处颈缩。

本数值实验的第三个目的是通过任意界面的线性稳定性分析来研究界面发生分枝的一些机制。这部分计算所用的初始扰动为(4.2)。对 $C_1 = C_2 = 2, C_3 = 0.29$ 情形的界面, 表 4 列出了各时刻 C 的实部最大特征值 λ_1 和实部次最大特征值 λ_2 。此界面在 $t \approx 9$

时开始发生分枝。可以看到,各时刻的 λ_1 均为正单根,且除 $t = 0$ 时外,它明显比 λ_2 的实部大。对其他不稳定界面,情形也是如此。把上述不稳定界面在各时刻的 λ_1 所对应的特征向量的后 J 个分量(对应于离散扰动的垂直分量)取出来,按 l_2 模规范化后得向量 ν 。表 5 列出了各时刻向量 ν 的各 Fourier 系数的模。可以看到,在开始一段时间里波数为 1 的模态占主导地位,但随着界面的发展,波数为 1 的模态所占比重越来越小。其他分枝界面也呈现这一规律。由此可得界面发生分枝的必要条件是:界面线化发展方程实部最大特征值对应的特征函数的垂直分量中,波数大于 1 的模态分量越来越发展。

五、结 论

1. 多孔介质中流体不稳定界面的分枝主要取决于无量纲参数 C_1 和 S 的值。对 C_1 取值范围内任一给定的值,存在 S 的一个临界值 S_1 ,当 $1 < S < S_1$ 时,平面界面受任一小扰动后都不会发展成分枝;当 $S > S_1$ 时,平面界面受小扰动后就有可能发展成分枝。 S_1 随 C_1 的减小而增大。

2. 存在 C_1 的一个临界值 C_1^* ,对 C_1 取值范围内任一给定的 $C_1 > C_1^*$,还存在 S 的另外两个临界值 S_2 和 S_3 ,当 $S_2 < S < S_3$ 时,平面界面受任一小扰动后都会因出现分枝而不能发展成成长指形。 S_2 随 C_1 的减小而增大, S_3 随 C_1 的减小而减小。

3. 在 $C_1 > C_1^*$ 情形,当 $S_1 < S < S_2$ 或 $S > S_3$ 时,或在 $C_1 < C_1^*$ 情形,当 $S > S_1$ 时,界面是否会发展成分枝则还与扰动形式有关。

4. 界面发生分枝的必要条件是:界面线化稳定性方程的实部最大特征值对应的特征函数的垂直分量中,波数大于 1 的模态分量越来越发展。

参 考 文 献

- [1] Sattman, P. G. & Taylor, G. I., Proc. R. Soc. Lond. A 245(1958), 312.
- [2] Nittmann, J., Daccord, G. & Stanley, H. E., Nature, 314(1985), 141.
- [3] Park, C.-W. & Homsy, G. M., Phys. Fluids, 28(1985), 1583.
- [4] Zhang, H. & Baker, G. R., Intertacial instability in porous media. Numerical Methods in Fluid Mechanics, edited by Koichi Oshima (1986), Vol. 2, 633—644. Proceed. Int. Sym. on Computational Fluid Dynamics, Tokyo, Sept. 9—12, 1985.
- [5] DeGregoria, A. J. & Schwartz, L. W., Phys. Fluids, 28(1985), 2313.
- [6] DeGregoria, A. J. & Schwartz, L. W., J. Fluid Mech., 164(1986), 383.
- [7] Baker, G. R., Meiron, D. I. & Orszag, S. A., J. Fluid Mech., 123(1982), 477.
- [8] 张慧生,水动力学研究与进展,2,2(1987),110—120.
- [9] 张慧生, G. R. Baker, 力学学报,增刊(1987).
- [10] 张慧生,周亚仙,流体界面稳定性的线化分析及其对界面实际稳定性的预报,将在应用力学学报上发表。

THE BIFURCATION OF UNSTABLE INTERFACE BETWEEN FLUIDS IN POROUS MEDIUM

Zhang Huisheng

(Department of Applied Mechanics, Fudan University)

Abstract In the paper it is found by a theoretical analysis and numerical experiments that the bifurcation of unstable interface between fluids in porous medium can be determined essentially by the values of dimensionless parameters C_1 and S . For any given C_1 , there is a critical value S_1 of S such that when $1 < S < S_1$ the flat interface perturbed by any small disturbance will develop to a long finger without bifurcation. There is a critical value C_1^* of C_1 such that for any given $C_1 > C_1^*$ there are two distinct critical values S_2 and S_3 of S such that when $S_2 < S < S_3$ the flat interface perturbed by any small disturbance will not develop to a long finger because of bifurcation. In the case that $C_1 > C_1^*$, when $S_1 < S < S_2$ or $S > S_3$, or in the case that $C_1 < C_1^*$, when $S > S_1$, whether the bifurcation will occur depends also on the form of the disturbance. When C_1 decreases, S_1 and S_2 increase but S_3 decreases. It is also found by a linearized stability analysis for interface with any shape and a spectral analysis that the necessary condition for bifurcation is that in the vertical component of the eigenfunction corresponding to the eigenvalue with the largest real part for the eigenvalue problem of the linearized interfacial stability equations the normal modes with wave number higher than 1 develop more and more

Key words bifurcation, unstable interface between fluids, porous medium.