第22卷 第4期
1990 年 7 月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 22, No. 4
July, 1990

关于线粘弹性动力学中各种变分原理[1)]

罗 恩
(中山大学应用力学与工程系)

提要 本文提出一条简单而统一的新途径，系统地建立了线粘弹性动力学中各种简化 Gurtin 型变分原理. 文中首先给出一个很有用的以卷积表示的积分关系式，然后从该式出发，系统地导出成互补关系的五类变量、四类变量、三类变量、二类变量及一类变量简化 Gurtin 型变分原理，并清楚地阐明它们之间的内在联系. 而且，还发现当前在国际上有广泛影响的力学变分原理方面的名著[1]及文[2]中，所给出的四个变分原理的泛函式均有误. 本文除给出这四个正确的泛函式外，还建立了一些新的更一般广义变分原理.

关键词 变分原理，线粘弹性动力学，Boltzmann 模型，卷积，混合问题

1. 线粘弹性动力学的基本方程及条件

速度位移关系 $v_i = \dot{u}_i$ (1.1)

动量速度关系 $p_i = \rho v_i$ (1.2)

运动方程 $\sigma_{ij,j} + f_i = \dot{p}_i$ 或 $\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i$ (1.3a,b)

应变位移关系 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ (1.4)

应力应变关系[3,4]

Boltzmann 松弛律 $\sigma_{ij} = \varepsilon_{kl}(x,0)G_{ijkl} + G_{ijkl} * \dot{\varepsilon}_{kl}$ (1.5a)

Boltzmann 蠕变律 $\varepsilon_{ij} = \sigma_{kl}(x,0)J_{ijkl} + J_{ijkl} * \dot{\sigma}_{kl}$ (1.5b)

力的边界条件 $T_i \equiv \sigma_{ij}n_j = \bar{T}_i$ 在 $\partial V_T \times [0,\infty)$ 上 (1.6)

位移边界条件 $u_i = \bar{u}_i$ 在 $\partial V_u \times [0,\infty)$ 上 (1.7)

初始条件 $u_i(x,0) = \tilde{u}_{0i}(x)$，$p_i(x,0) = \tilde{p}_{0i}(x)$ 在 $\bar{V}$ 上 (1.8a,b) 式中 $G_{ijkl}(x,t)$ 和 $J_{ijkl}(x,t)$ 分别为松弛函数和蠕变函数，$\bar{T}_i$，$\bar{u}_i$，$\tilde{u}_{0i}$ 和 $\tilde{p}_{0i}$ 为已知函数，$*$ 表示卷积.

2. 变形体动力学中一个积分关系式

可以证明，对于互不相关的任意应力场 σ_{ij}、位移场 u_i 和动量场 p_i，下列以卷积表示的积分关系式

$$\int_V (p_i * \dot{u}_i + \sigma_{ij} * u_{i,j})dV + \int_V (\sigma_{ij,j} - \dot{p}_i) * u_i dV$$
$$- \int_{\partial V} T_i * u_i ds + \int_V [p_i(x,t)u_i(x,0)$$

1) 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1988 年 3 月 29 日收到第一稿，1989 年 11 月 4 日收到修改稿.

$$-p_i(x,0)u_i(x,t)]dV=0 \tag{2.1}$$

恒成立.

(2.1) 式是本文给出的一个很重要的关系式，在力学上它反映了一种守恒关系．这个关系式不仅在建立线粘弹性动力学中各种简化 Gurtin 型变分原理时，而且在论述这些变分原理之间的内在关系时，都是非常有用的.

3. 各种简化 Gurtin 型变分原理

(1) 五类变量广义变分原理

当 σ_{ij} 与 ε_{ij} 是互不相关的任意函数时，可以得到下列关系式

$$\sigma_{ij}*\varepsilon_{ij}=\overset{*}{U}(\varepsilon_{ij})+\overset{*}{V}(\sigma_{ij})+\overset{*}{A}(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}) \tag{3.1}$$

式中 $$\overset{*}{U}(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}[\varepsilon_{kl}(x,0)G_{ijkl}+G_{ijkl}*\dot{\varepsilon}_{kl}]*\varepsilon_{ij} \tag{3.1a}$$

$$\overset{*}{V}(\sigma_{ij})=\frac{1}{2}[\sigma_{kl}(x,0)J_{ijkl}+J_{ijkl}*\dot{\sigma}_{kl}]*\sigma_{ij} \tag{3.1b}$$

$$\overset{*}{A}(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}[\varepsilon_{ij}-\sigma_{kl}(x,0)J_{ijkl}-J_{ijkl}*\dot{\sigma}_{kl}]*[\sigma_{ij}-\varepsilon_{mn}(x,0)G_{ijmn}-G_{ijmn}*\dot{\varepsilon}_{mn}] \tag{3.1c}$$

只有当 σ_{ij} 与 ε_{ij} 满足应力应变关系 (1.5a, b) 时，才有

$$\sigma_{ij}*\varepsilon_{ij}=\overset{*}{U}(\varepsilon_{ij})+\overset{*}{V}(\sigma_{ij}) \tag{3.1d}$$

于是，(2.1)式第一个积分中的被积函数 $\sigma_{ij}*u_{i,j}$ 可变换为

$$\sigma_{ij}*u_{i,j}=\overset{*}{U}(\varepsilon_{ij})-\sigma_{ij}*\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]+\overset{*}{V}(\sigma_{ij})+\overset{*}{A}(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}) \tag{3.2}$$

当 p_i 与 v_i 是互不相关的任意函数时，可以得到下列关系式

$$p_i*v_i=\overset{*}{K}(v_i)+\overset{*}{K}{}^*(p_i)-\overset{*}{B}(p_i,v_i) \tag{3.3}$$

式中 $$\overset{*}{K}(v_i)=\frac{1}{2}\rho v_i*v_i,\quad \overset{*}{K}{}^*(p_i)=\frac{1}{2\rho}p_i*p_i \tag{3.3a, b}$$

$$\overset{*}{B}(p_i,v_i)=\frac{1}{2\rho}(\rho v_i-p_i)*(\rho v_i-p_i) \tag{3.3c}$$

只有当 p_i 与 v_i 满足动量速度关系(1.2)时，才有

$$p_i*v_i=\overset{*}{K}(v_i)+\overset{*}{K}{}^*(p_i) \tag{3.3d}$$

于是，(2.1)式第一个积分中的被积函数 $p_i*\dot{u}_i$ 可变换为

$$p_i*\dot{u}_i=\overset{*}{K}(v_i)-p_i*(v_i-\dot{u}_i)+\overset{*}{K}{}^*(p_i)-\overset{*}{B}(p_i,v_i) \tag{3.4}$$

而(2.1)式中的第二、三、四项积分可变换为

$$\int_V(\sigma_{ij,j}-\dot{p}_i)*u_idV-\int_{\partial V}T_i*u_ids+\int_V[p_i(x,t)u_i(x,0)-p_i(x,0)u_i(x,t)]dV=\int_V(\sigma_{ij,j}+f_i-\dot{p}_i)*u_idV+\Gamma_{IB}-\int_Vf_i*u_idV+\Pi_{IB} \tag{3.5}$$

式中

$$\Pi_{lB}=-\int_{\partial V_T}\bar{T}_i*u_i ds-\int_{\partial V_u}(u_i-\bar{u}_i)*T_i ds-\int_V \tilde{p}_{0i}(x)u_i(x,t)dV$$
$$+\int_V[u_i(x,0)-\tilde{u}_{0i}(x)]p_i(x,t)dV \tag{3.5a}$$

$$\Gamma_{lB}=-\int_{\partial V_u}\tilde{u}_i*T_i ds-\int_{\partial V_T}(T_i-\bar{T}_i)*u_i ds$$
$$+\int_V\tilde{u}_{0i}(x)p_i(x,t)dV-\int_V[p_i(x,0)-\tilde{p}_{0i}(x)]u_i(x,t)dV \tag{3.5b}$$

将(3.2),(3.4)和(3.5)式代入(2.1)式中,经整理后可得

$$\Pi_{V5}(p_i,v_i,u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})+\Gamma_{V5}(p_i,v_i,u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=0 \tag{3.6}$$

式中动量场 p_i、速度场 v_i、位移场 u_i、应变场 ε_{ij} 和应力场 σ_{ij} 是五类独立变量，而泛函 Π_{V5} 和 Γ_{V5} 分别为

$$\Pi_{V5}(p_i,v_i,u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=\int_V\Big\{\overset{*}{K}(v_i)-p_i*(v_i-\dot{u}_i)$$
$$+\overset{*}{U}(\varepsilon_{ij})-\sigma_{ij}*\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]-f_i*u_i\Big\}dV+\Pi_{lB} \tag{3.7a}$$

$$\Gamma_{V5}(p_i,v_i,u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=\int_V\{\overset{*}{K}{}^*(p_i)-\overset{*}{B}(p_i,v_i)+\overset{*}{V}(\sigma_{ij})$$
$$+\overset{*}{A}(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij})+(\sigma_{ij,j}+f_i-\dot{p}_i)*u_i\}dV+\Gamma_{lB} \tag{3.7b}$$

因篇幅所限,下述各定理的证明均略去,其证明方法见文[5].

定理 1 当且仅当 p_i, v_i, u_i, ε_{ij},σ_{ij} 是混合问题(1.1),(1.2) (1.3a), (1.4),(1.5a),(1.6),(1.7),(1.8a,b) 的解,则必定满足下列变分式

$$\delta\Pi_{V5}=0 \text{ 或 } \delta\Gamma_{V5}=0 \tag{3.8}$$

Π_{V5} 和 Γ_{V5} 分别为五类变量简化 Gurtin 型 (H-W) 广义变分原理的势能和余能形式的泛函,而 H-W 表示胡海昌-鹫津类的意思. 对于任意无关的 $p_i,v_i,u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij}$, Π_{V5} 和 Γ_{V5} 之间存在互补关系(3.6).

(2) 四类变量广义变分原理

当 p_i 与 v_i 满足(1.2)式时,(3.6)式就变成为

$$\Pi_{V4}(p_i,u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})+\Gamma_{V4}(p_i,u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=0 \tag{3.9}$$

而泛函 Π_{V4} 和 Γ_{V4} 分别为

$$\Pi_{V4}(p_i,u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=\int_V\Big\{p_i*\dot{u}_i-\overset{*}{K}{}^*(p_i)+\overset{*}{U}(\varepsilon_{ij})-\sigma_{ij}*$$
$$\times\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]-f_i*u_i\Big\}dV+\Pi_{lB} \tag{3.10a}$$

$$\Gamma_{V4}(p_i,u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=\int_V\{\overset{*}{K}{}^*(p_i)+\overset{*}{V}(\sigma_{ij})+\overset{*}{A}(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij})$$
$$+(\sigma_{ij,j}+f_i-\dot{p}_i)*u_i\}dV+\Gamma_{lB} \tag{3.10b}$$

定理 2 当且仅当 p_i, u_i, ε_{ij}, σ_{ij} 是混合问题 (1.3a),(1.4), (1.5a), (1.6),(1.7),(1.8a,b) 及下式

$$p_i/\rho=\dot{u}_i \tag{3.11}$$

的解,则必定满足下列变分式

$$\delta\Pi_{V4}=0 \text{ 或 } \delta\Gamma_{V4}=0 \tag{3.12}$$

Π_{4V} 和 Γ_{V4} 分别为四类变量简化 Gurtin 型（H-W）广义变分原理的势能和余能形式的泛函，对于任意无关的 p_i, u_i, ε_{ij}, σ_{ij}，两者间存在互补关系(3.9)。

（3）三类变量广义变分原理

1）当 p_i, v_i, u_i 满足(1.1)和(1.2)式时，(3.6)式就变为

$$\Pi_{V3}(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})+\Gamma_{V3}(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=0 \tag{3.13}$$

而泛函 Π_{V3} 和 Γ_{V3} 分别为

$$\Pi_{V3}(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=\int_V\Big\{\overset{*}{K}(\dot u_i)+\hat U(\varepsilon_{ij})-\sigma_{ij}*\Big[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\Big]-f_i*u_i\Big\}dV+\Pi_{IB} \tag{3.14a}$$

$$\Gamma_{V3}(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=\int_V\{\overset{*}{K}(\dot u_i)+\overset{*}{V}(\sigma_{ij})+\tilde A(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij})+(\sigma_{ij,j}+f_i-\rho\ddot u_i)*u_i\}dV+\Gamma_{IB} \tag{3.14b}$$

式中
$$\overset{*}{K}(\dot u_i)=\frac{1}{2}\rho\dot u_i*\dot u_i \tag{3.14c}$$

定理 3　当且仅当 $u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij}$ 是混合问题（1.3b),(1.4),(1.5a),(1.6),(1.7),(1.8a,b）的解，则必定满足下列变分式

$$\delta\Pi_{V3}=0 \text{ 或 } \delta\Gamma_{V3}=0 \tag{3.15}$$

Π_{V3} 和 Γ_{V3} 分别为三类变量简化 Gurtin 型（H-W）广义变分原理的势能和余能形式的泛函，其互补关系(3.13)对任意无关的 u_i, ε_{ij}, σ_{ij} 成立。

2）当 σ_{ij} 与 ε_{ij} 满足（1.5a）式时，(3.9)式可变为

$$\Pi_{VR3}(p_i,u_i,\sigma_{ij})+\Gamma_{VR3}(p_i,u_i,\sigma_{ij})=0 \tag{3.16}$$

而泛函 Π_{VR3} 和 Γ_{VR3} 分别为

$$\Pi_{VR3}(p_i,u_i,\sigma_{ij})=\int_V\Big\{p_i+\dot u_i-\overset{*}{K}{}^*(p_i)+\frac{1}{2}\sigma_{ij}*(u_{i,j}+u_{j,i})-\overset{*}{V}(\sigma_{ij})-f_i*u_i\Big\}dV+\Pi_{IB} \tag{3.17a}$$

$$\Gamma_{VR3}(p_i,u_i,\sigma_{ij})=\int_V\{\overset{*}{K}{}^*(p_i)+\overset{*}{V}(\sigma_{ij})+(\sigma_{ij,j}+f_i-\dot p_i)*u_i+\Gamma_{IB} \tag{3.17b}$$

定理 4　当且仅当 p_i,u_i,σ_{ij} 是混合问题（1.3a),（3.11),（1.6),（1.7),（1.8a,b）及下式

$$\sigma_{kl}(x,0)J_{ijkl}+J_{ijkl}*\dot\sigma_{kl}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{3.18}$$

的解，则必定满足下列变分式

$$\delta\Pi_{VR3}=0 \text{ 或 } \delta\Gamma_{VR3}=0 \tag{3.19}$$

Π_{VR3} 和 Γ_{VR3} 是三类变量简化 Gurtin 型（H-R）广义变分原理的一对互补泛函，其互补关系(3.16)对任意的 p_i,u_i,σ_{ij} 成立。H-R 表示 Hellinger-Reissner 类的意思。

（4）二类变量广义变分原理

当 σ_{ij} 与 ε_{ij} 满足 (1.5a) 式时，(3.13)式就变为

$$\Pi_{VR2}(u_i,\sigma_{ij}) + \Gamma_{VR2}(u_i,\sigma_{ij}) = 0 \tag{3.20}$$

而泛函 Π_{VR2} 和 Γ_{VR2} 分别为

$$\Pi_{VR2}(u_i,\sigma_{ij}) = \int_V \left\{ \overset{*}{K}(\dot{u}_i) + \frac{1}{2}\sigma_{ij} * (u_{i,j} + u_{j,i}) - \overset{*}{V}(\sigma_{ij}) - f_i * u_i \right\} dV + \Pi_{IB} \tag{3.21a}$$

$$\Gamma_{VR2}(u_i,\sigma_{ij}) = \int_V \{ \overset{*}{K}(\dot{u}_i) + \overset{*}{V}(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ij,j} + f_i - \rho\ddot{u}_i) * u_i \} dV + \Gamma_{IB} \tag{3.21b}$$

定理 5　当且仅当 u_i，σ_{ij} 是混合问题 (1.3b)，(3.18)，(1.6)，(1.7)，(1.8a,b) 的解，则必定满足下列变分式

$$\delta\Pi_{VR2} = 0 \text{ 或 } \delta\Gamma_{VR2} = 0 \tag{3.22}$$

Π_{VR2} 和 Γ_{VR2} 是二类变量简化 Gurtin 型 (H-R) 广义变分原理的一对互补泛函，其互补关系(3.20)对任意的 u_i，σ_{ij} 成立.

当 u_i 与 σ_{ij} 满足 (1.3b) 及(1.6)式时，泛函 Γ_{VR2} 变为

$$\Gamma'_{VR2}(u_i,\ \sigma_{ij}) = \int_V [\overset{*}{K}(\dot{u}_i) + V(\sigma_{ij})] dV - \int_{\partial V_u} \bar{u}_i * T_i ds$$
$$+ \int_V \tilde{u}_{0i}(x)\rho\dot{u}_i(x,\ t) - \int_V [\rho\dot{u}_i(x,0) - \tilde{p}_{0i}(x)] u_i(x,t) dV \tag{3.23}$$

(5) 一类变量变分原理

若 u_i 和 ε_{ij} 满足(1.4)和(1.7)式时，泛函 Π_{V3} 就变为

$$\Pi_{V1}(u_i) = \int_V \left\{ \overset{*}{K}(\dot{u}_i) + \frac{1}{2}[G_{ijkl}u_{k,l}(x,\ 0) + G_{ijkl} * \dot{u}_{k,l}] * u_{i,j} \right.$$
$$\left. - f_i * u_i \right\} dv - \int_{\partial v_T} \bar{T}_i * u_i ds - \int_v \tilde{p}_{0i}(x) u_i(x,t) dv$$
$$+ \int_v [u_i(x,0) - \tilde{u}_{0i}(x)] \rho\dot{u}_i(x,t) dv \tag{3.24}$$

4. 结语

Oden 和 Reddy 的名著 [1, pp. 149—152] 及文[2] 中所给出的四个泛函式 $J(\lambda)$，$K(\lambda)$，$K_1(\lambda)$，$J_1(\lambda)$ 均有误，其错误主要发生在对初始条件的处理上. 而其正确的泛函式相应为本文的 Π_{V3}，Π_{VR2}，Γ'_{VR2}，Π_{V1}. 除了这四个泛函式外，上述其余各种简化 Gurtin 型变分原理的泛函都是本文首次给出的. 本文的工作不仅修正了文[1,2]中的错误，而且进一步发展了线粘弹性动力学中简化 Gurtin 型变分原理，使之更一般化和系统化. 这无论在理论研究方面，还是在实际应用方面都是很有意义的.

参　考　文　献

[1] Oden, J. T. and Reddy, J. N., Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer-Verlag, Berlin (1st ed, 1976, 2nd ed, 1983).
[2] Reddy, J. N., Int. J. Solids Struct., 12(1976), 227—235.
[3] Gurtin, M. E. and Sternberg, E., Arch. Rat. Mech. Anal., 11(1962), 291—356.
[4] Fung, Y. C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1965).
[5] Luo En and Cheung, Y. K., *ACTA MECHANICA SINICA*, 4, 4(1988), 337—349.
[6] 罗恩，中国科学(A辑)，9(1987)，936—948.

[7] 罗恩，中山大学学报(自然科学版)，4(1985)，28—38.
[8] 罗恩，科学通报，11(1987)，878.

ON THE VARIATIONAL PRINCIPLES FOR LINEAR THEORY OF DYNAMIC VISCOELASTICITY

Luo En

(Department of Mechanics, Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract A unified new approach is proposed for the systematic derivation of various simplified Gurtin-type variational principles in linear theory of dynamic viscoelasticity. The prime feature of this approach is the use of an important integral relation and generalized Legendre transformations given by the author. With this approach, it is possible not only to derive the complementary functionals for the five-field, four-field, threefield, two-field and one-field simplified Gurtin-type variational principles, but also to explain clearly the intrinsic relationship among various principles. Thus, in this paper, the simplified Gurtin-type variational principles are further generalized and systematized.

Key words Gurtin-type variational principle, linear theory, dynamic viscoelasticity