第22卷 第4期 力 学 学 报 Vol. 22, No. 4
1990年7月 ACTA MECHANICA SINICA July, 1990

具有非局部体力矩的非局部弹性理论[1)]

高 键 戴 天 民
（山东工业大学力学教研室） （辽宁大学数力系，沈阳）

提要 本文基于非局部连续统场论的公理系统，建立了具有非局部体力矩作用的非局部弹性理论．我们证明了，在非局部弹性固体中存在着非局部体力矩，非局部体力矩引起了应力的非对称和非局部体力矩是由材料中的共价键产生的．

关键词 非局部，体力矩，非对称，弹性理论

一、引 言

W. Voigt 最早提出的非对称应力的设想是：物体的一部分对其邻近部分的作用，可能引起体力偶和面力偶，由此体力偶和面力偶引起应力的非对称性．从 Cosserat 连续统理论到 Mindlin 和 Eringen 等人建立的非对称弹性理论均是面力偶理论，部分地实现了 Voigt 的猜想．从物体中取出一微元体，周围介质对其作用的结果化简为作用于微元体各面中心的集中力 $\boldsymbol{F}_i$ 和面力偶 $\boldsymbol{M}_i$，是 $\boldsymbol{M}_i$ 引起应力的非对称性．由不同的变形几何学的分析，得到的不同的变形几何量与偶应力张量的对应关系构成了各种非对称弹性理论．有些非对称应力的力学问题，至今没有得到很好的解释，例如，裂纹尖端区的“弯结”和阻力偶等问题． Voigt 最初设想，不仅有面力偶，而且存在体力偶影响应力的非对称性．至今，人们所研究的体力偶都是由外加场的作用所产生的，诸如，在电磁场中的金属材料．Eringen 曾提出一种体力偶产生的机理，是由微元体中质量分布的不均匀性产生，产生的机理是原子之间长程效应[1]．Eringen 曾指出，非局部场论可能是非对称的[2]，但是，他却将应力对称的条件强加于非局部弹性理论．Kunin 也指出，我们现在处理应力对称性还是采用了经典弹性力学的方法，还没有考虑到非局部理论的特点[3]．

本文基于非局部连续统场论的基本理论，进一步研究非对称弹性固体理论．

二、非局部场论的守恒定律

人们采用分析方法建立了经典连续介质力学，将考察到总体运动所遵循的守恒定律人为地假定适用于物体中任意小的微单元体的运动，而将其它部分对微元体的作用仅简化为表面作用．而非局部连续场论从原子晶格间相互作用的长程效应出发，描述物体的运动，考虑总体效应和局部效应的差异．因此，局部性公理不再适用，而是具有晶格长程

1）本文是国家自然科学基金资助项目．
本文于1989年4月22日收到．

效应为特征的有限邻域公理。采用总体化的公理系统建立非局部连续介质力学理论[2]。

物体在运动的每一瞬时占据欧氏空间为 V，其表面为 S。在每一瞬时，运动的物体都应满足总体的守恒定律。

i) 质量守恒定律：

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dv = 0 \tag{1}$$

ii) 动量守恒定律：

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \boldsymbol{V} dv - \int_V \rho \boldsymbol{f} dv - \int_S \bar{\boldsymbol{t}}^k da_k = 0 \tag{2}$$

iii) 动量矩守恒定律：

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})dv - \int_S \boldsymbol{r}\times\bar{\boldsymbol{t}}^k da_k - \int_V \rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}-\boldsymbol{c})dv = 0 \tag{3}$$

iv) 能量守恒定律：

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+U\right)dv = \int_S \bar{\boldsymbol{t}}_n\cdot\boldsymbol{v}dS + \int_V\left(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\rho dv \tag{4}$$

如果我们将(1)—(4)式进行局部化处理，即：将各面积分项经 Green-Gauss 定理转换为体积分，在积分号外的微分转换到积分号内；再由拖带坐标系中的特有性质，我们得到局部形式的守恒定律：

i) 质量守恒定律：

$$\hat{\rho} = \dot{\rho} + \rho v^m\|_m, \quad \int_V \hat{\rho} dv = 0 \tag{5}$$

ii) 动量守恒定律：

$$\rho\dot{\boldsymbol{v}} + \hat{\rho}\boldsymbol{v} - \rho\boldsymbol{f} - \boldsymbol{t}^k\|_k = \rho\hat{\boldsymbol{F}}, \quad \int_V \rho\hat{\boldsymbol{F}} dv = 0 \tag{6}$$

iii) 动量矩守恒定律：

$$\rho\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{g}_k\times\bar{\boldsymbol{t}}^k - \rho\boldsymbol{c} = \rho\hat{\boldsymbol{L}}, \quad \int_V \rho\hat{\boldsymbol{L}} dv = 0 \tag{7}$$

iv) 能量守恒定律：

$$\rho\dot{U} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-U\right) - \rho\hat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{t}^k\cdot\boldsymbol{v}_{,k} + \frac{1}{2}(\rho\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{t}^k - \rho\hat{\boldsymbol{L}})\cdot\nabla\times\boldsymbol{v} + \rho\hat{h},$$

$$\int_V \rho\hat{h} dv = 0 \tag{8}$$

式中：$\hat{\rho}$ 是非局部质量剩余，$\hat{\boldsymbol{F}}$ 是非局部体力剩余，$\hat{\boldsymbol{L}}$ 是非局部体力矩剩余，$\hat{h}$ 是非局部能量剩余．上述计算过程比较繁，详细过程请参阅文献[4]．

从(7)式中我们可以看到，影响应力对称的因素有：外加体力矩 $\boldsymbol{c}$，非局部体力矩剩余 $\hat{\boldsymbol{L}}$（简称非局部体力矩）；非局部体力剩余 $\hat{\boldsymbol{F}}$（或简称为非局部体力）．Eringen 在专著中特别强调：在局部和非局部连续统之间的最大差异就是在后者中存在着体积场和表面场剩余。确定这些剩余是非局部连续统物理学的一个重要组成部分[2]。这些剩余实质上

描述了物体作为一个有机整体的联系;内部构造的特征。同时,它们又必须满足总体的守恒律,即:它们的总体效应为零。

当给物体迭加一刚性运动时,内能是不变的,由(8)式可知:$\hat{\rho}=0$。亦即得到:如果不考虑物体内的化学反应和微粒子运动,则非局部质量剩余消失。

以前,人们还无法处理影响应力对称的非局部剩余量,只好假设:$\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}}$,则当外加偶应力场 $\boldsymbol{c}=0$ 时,应力对称。实质上上述假设一般是不成立。

我们首先考虑物体处于小变形条件下,并用直角坐标系描述,此时:

$$\boldsymbol{t}^k\cdot\boldsymbol{v}_{,k}=\overset{s}{t}_{kl}\dot{e}_{kl}+\overset{a}{t}_{kl}\dot{\omega}_{kl}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=e_{klm}v_{l,k}\boldsymbol{e}_m=e_{klm}\dot{\omega}_{kl}\boldsymbol{e}_m=\dot{\theta}_m\boldsymbol{e}_m=\boldsymbol{\nu}$$

$$\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{t}^k\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{t}^k\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}=2\overset{a}{t}_{kl}\dot{\omega}_{kl}$$

其中:$\boldsymbol{e}_i$ 是直角坐标系的单位基矢,及:

$$e_{kl}=\frac{1}{2}(u_{k,l}+u_{l,k}),\quad \omega_{kl}=\frac{1}{2}(u_{l,k}-u_{k,l})$$

$$\overset{s}{t}_{kl}=\frac{1}{2}(t_{kl}+t_{lk}),\quad \overset{a}{t}_{kl}=\frac{1}{2}(t_{kl}-t_{lk})$$

则(8)式可以简写为:

$$\rho\dot{U}=\overset{s}{t}_{kl}\cdot\dot{e}_{kl}-\rho\hat{F}_k\cdot v_k+\rho(e_{klm}x_k\hat{F}_l-\hat{L}_m)\dot{\theta}_m+\rho\hat{h} \tag{9}$$

或写作:

$$\rho\dot{U}=\boldsymbol{t}^s\cdot\dot{\boldsymbol{e}}-\rho\hat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{v}+\rho(\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}}-\boldsymbol{L})\boldsymbol{\nu}+\rho\hat{h} \tag{10}$$

从而我们得到:转动对内能也具有贡献,并由此引起应力非对称性。

三、非局部-非对称弹性固体的本构关系

根据因果关系公理,非局部介质中一点的力学状态是由物体的所有点在过去时间 $t'\leqslant t$ 的运动的泛函。如果我们研究的不是具有记忆过去的物质,只考虑在 t 时刻的运动,根据理性力学的观点,运动的一阶近似是运动的梯度;则由 Stokes 分解定理:位移梯度可以分解为应变张量 e_{ij} 和反对称张量 ω_{ij}。而 ω_{ij} 描述的是微单元的微小转动。因此,我们取原因有序集:

$$\boldsymbol{F}=\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{r}\},\quad \boldsymbol{F}'=\{\boldsymbol{e}',\boldsymbol{\theta}',\boldsymbol{r}'\} \tag{11}$$

或记作:

$$\boldsymbol{F}=\{e_{ij},\theta_i,x_i\},\quad \boldsymbol{F}'=\{e'_{ij},\theta'_i,x'_i\}$$

式中:$\boldsymbol{e}'=\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}',t)$,$\boldsymbol{\theta}'=\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{r}',t)$,$\boldsymbol{r}'$ 代表了物体中除 $\boldsymbol{r}$ 之外所有物体点的空间位置矢量。为了书写简便起见,以下均采用矢量表达式,而未采用分量表达式。

假定内能的本构泛函:

$$U=U(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}') \tag{12}$$

则由同一性公理,应力 $\boldsymbol{t}$,非局部体力 $\hat{\boldsymbol{F}}$,非局部体力矩 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 具有同样形式的泛函。

引入 Hilbert 内积空间 $\boldsymbol{H}$。设 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 为两组不同的有序集,则内积为:

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)_H = \int_V H(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{r}')dv(\boldsymbol{r}')$$

及范数：

$$\|\boldsymbol{F}\| = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F})_H^{1/2}$$

这里 $H(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ 是 Hilbert 空间的特征函数．在应用于非局部场论中，$H(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ 可以取作非局部衰减函数，是根据原子晶格之间相互作用的特征而确定．于是本构泛函 U 可以看作是一个映射 $U: \boldsymbol{H}\to R$，（R为实数域）．假设 U 是 Fréchet 可微，亦即：

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}'\|\to 0} |U(\boldsymbol{F}'+\boldsymbol{h}') - U(\boldsymbol{F}') - \delta U(\boldsymbol{F}'/\boldsymbol{h}')| = 0;\quad \boldsymbol{F}', \boldsymbol{h}' \in \boldsymbol{H}$$

并且，$\delta U(\boldsymbol{F}'/\boldsymbol{h}')$ 是 $\boldsymbol{h}'$ 的线性连续泛函．由 Fréchet-Riesz 表示定理[2]，必存在唯一的元素 $\delta U/\delta\boldsymbol{F}' \in \boldsymbol{H}$，且有：

$$\delta U(\boldsymbol{F}'/\boldsymbol{h}') = (\delta U/\delta\boldsymbol{F}', \boldsymbol{h}')_H = \int_V \frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{F}'}(\boldsymbol{F}', \boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}')dv(\boldsymbol{r}')$$

则我们对内能 U 求时间导数，此时：$\boldsymbol{h}' = \boldsymbol{F}'(t+\Delta t) - \boldsymbol{F}'(t)$，则：

$$\rho\dot{U} = \rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}}\dot{\boldsymbol{F}} + \rho\delta U(\boldsymbol{F}'/\dot{\boldsymbol{F}}', \boldsymbol{F}) = \rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}}\dot{\boldsymbol{F}} + \int_V \rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{F}'}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r}')dv(\boldsymbol{r}') \tag{13}$$

为方便起见，改写上式：

$$\left.\begin{aligned}\rho\dot{U} &= \rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}}\cdot\dot{\boldsymbol{F}} + \int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{F}'}\right)^*\dot{\boldsymbol{F}}dv(\boldsymbol{r}') + D\\ D &= \int_V\left(\left[\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{F}'}\right)\dot{\boldsymbol{F}}' - \left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{F}'}\right)^*\dot{\boldsymbol{F}}\right]dv(\boldsymbol{r}')\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中："*"表示斜逆，即交换两个对等自变量的位置．例如：

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')^* = G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$$

将(14)式代入(10)式，可以得到：

$$\begin{aligned}&\left[\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}} + \int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{r}'}\right)^*dv(\boldsymbol{r}') + \rho\hat{\boldsymbol{F}}\right]\cdot\dot{\boldsymbol{r}}\\ &+\left[\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{e}} + \int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{e}'}\right)^*dv(\boldsymbol{r}') - \boldsymbol{t}^s\right]:\dot{\boldsymbol{e}}\\ &+\left[\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}} + \int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{\theta}}\right)^*dv(\boldsymbol{r}') - \rho\boldsymbol{J}\right]:\boldsymbol{\theta}\\ &+ D - \rho\hat{h} = 0\end{aligned} \tag{15}$$

其中：

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\nu},$$

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}} - \hat{\boldsymbol{L}}$$

则上式是关于 $\dot{\boldsymbol{F}}$ 的线性方程，对于任意运动状态都成立的充要条件：

$$\left.\begin{aligned}&\rho\hat{h} = D\\ &-\rho\hat{\boldsymbol{F}} = \rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}} + \int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{r}'}\right)^*dv(\boldsymbol{r}')\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\rho\hat{\boldsymbol{J}}&=\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{\theta}'}\right)^*dv(\boldsymbol{r}')\\ \boldsymbol{t}^s&=\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{e}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{e}'}\right)^*dv(\boldsymbol{r}')\end{aligned}\right|\tag{16}$$

从而我们非局部-非对称弹性固体的本构关系。

我们知道，本构泛函应满足伽俐略不变性。即：给物体迭加一刚体运动时，与物体相关联（associated with body）的物理量 ρ，U，$\boldsymbol{t}$，$\hat{\boldsymbol{J}}$，$\boldsymbol{e}$ 和 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 等都是不变的。当然，内能的变化率也是不变的[6]。

首先，令：$\boldsymbol{r}_*=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{V}_0t$，（$\boldsymbol{V}_0$ 是一常速度矢量），在内能变化率表达式中，用

$$\boldsymbol{r}_*\xrightarrow{\text{替代}}\boldsymbol{r}$$

则由伽俐略不变性，得到：

$$\dot{U}[\boldsymbol{e},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{r}_*;\boldsymbol{e}',\boldsymbol{\theta}',\boldsymbol{r}'_*]=\dot{U}[\boldsymbol{e},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}',\boldsymbol{\theta}',\boldsymbol{r}']\tag{17}$$

注意到，在平移运动中，应变和转角都是不变的。将(17)式展开，消去相同项，可得：

$$\boldsymbol{V}_0\left[\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}+\int_V\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{r}'}dv(\boldsymbol{r}')\right]=0\tag{18}$$

由于 $\boldsymbol{V}_0$ 是一常矢量，若使上式成立，当且仅当：

$$\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}+\int_V\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{r}'}dv(\boldsymbol{r}')=0\tag{18*}$$

并注意到：

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}+\int_V\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{r}'}dv(\boldsymbol{r}')\\&=\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{r}'}\right)^*dv(\boldsymbol{r}')+\int_V\left[\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{r}'}-\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{r}'}\right)^*\right]dv(\boldsymbol{r}')=0\end{aligned}\tag{19}$$

由 $(16)_2$ 式可知：

$$\rho\hat{\boldsymbol{F}}=\int_V\left[\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{r}'}-\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{r}'}\right)^*\right]dv(\boldsymbol{r}')\tag{20}$$

由于被积函数关于 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 的反对称性，则有：

$$\int_V\rho\hat{\boldsymbol{F}}dv=0\tag{21}$$

其次，对于刚体转动，令：

$$\boldsymbol{r}_*=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\phi},\quad\dot{\boldsymbol{r}}_*=\dot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r}$$

式中：$\dfrac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}=\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{\omega}_0$ 是常矢量。

在内能和内能变化率中，用：

$$\boldsymbol{r}_*\xrightarrow{\text{替代}}\boldsymbol{r},\quad\dot{\boldsymbol{r}}_*\xrightarrow{\text{替代}}\dot{\boldsymbol{r}}$$

由伽俐略不变性可知：

$$\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}}+\int_V\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{F}'}dv(\boldsymbol{r}')=\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}_*}+\int_V\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{F}'_*}dv(\boldsymbol{r}')\tag{22}$$

以及：

$$\hat{U}[e,\theta_*,r_*;e',\theta'_*,r'_*]=\hat{U}[e,\theta,r;e',\theta',r'] \tag{23}$$

式中：$F_*=\{e,\theta_*,r_*\}$，$F'_*=\{e',\theta'_*,r'_*\}$，则将(23)式展开，消去两端相同项，可得：

$$\begin{aligned}
&\omega_0\times r\cdot\left\{\rho\frac{\partial U}{\partial r}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta r'}\right)^*dv(r')\right\}+\frac{1}{2}\nabla\times(\omega_0\times r)\\
&\quad\cdot\left\{\rho\frac{\partial U}{\partial\theta}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\theta'}\right)^*dv(r')\right\}\\
&\quad+\int_V\left\{\left(\rho\frac{\delta U}{\delta r'}\right)\cdot\omega_0\times r'-\left(\rho\frac{\delta U}{\delta r'}\right)^*(\omega_0\times r)\right\}dv(r')\\
&\quad+\int_V\frac{1}{2}\left\{\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\theta'}\right)\cdot\nabla'\times(\omega_0\times r')\right.\\
&\quad\left.-\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\theta'}\right)^*\cdot\nabla\times(\omega_0\times r)\right\}dv(r')=0
\end{aligned} \tag{24}$$

并根据矢量分析中的特性，可使(24)式简化为：

$$\begin{aligned}
&r\times\left[\rho\frac{\partial U}{\partial r}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta r'}\right)^*dv(r')\right]+\left[\rho\frac{\partial U}{\partial\theta}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\theta'}\right)^*dv(r')\right]\\
&\quad=-\left\{\int_V\left[r'\times\left(\rho\frac{\delta U}{\delta r'}\right)-r\times\left(\rho\frac{\delta U}{\delta r'}\right)^*\right]dv(r')\right.\\
&\quad\left.+\int_V\left[\rho\frac{\delta U}{\delta\theta'}-\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\theta'}\right)^*\right]dv(r')\right\}
\end{aligned} \tag{25}$$

由(16)和(25)式，可以得到：

$$\begin{aligned}
\rho\hat{L}&=\rho(r\times\hat{F}-\hat{J})\\
&=-r\times\left[\rho\frac{\partial U}{\partial r}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta r'}\right)^*dv(r')\right]-\left[\rho\frac{\partial U}{\partial\theta}\right.\\
&\quad\left.+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\theta'}\right)^*dv(r')\right]=\int_V\left[r'\times\left(\rho\frac{\delta U}{\delta r'}\right)-r\right.\\
&\quad\left.\times\left(\rho\frac{\delta U}{\delta r'}\right)^*\right]dv(r')+\int_V\left[\rho\frac{\delta U}{\delta\theta'}-\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\theta'}\right)^*\right]dv(r')
\end{aligned}$$

由被积函数的反对称性，恒有：

$$\int_V\rho\hat{L}dv=0$$

由(14)，(16)式及函数D的反对称性，得到：

$$\int_V\rho\hat{h}dv=\int_V Ddv=0$$

从而我们得到：非局部物理量$\hat{h}$，$\hat{F}$和$\hat{L}$满足非局部场论守恒律：

$$\int_V\rho\hat{F}dv=0,\quad\int_V\rho\hat{L}dv=0,\quad\int_V\rho\hat{h}dv=0$$

的充分条件是：本构泛函满足伽俐略不变性；亦即，满足(18*)式和(25)式。

上述非局部-非对称弹性理论中，变量和方程的总数均为 29 个，所以，本理论为一确定性理论。

四、非局部-非对称弹性固体的线性理论

假设一中间函数 u，u 是 e'，θ' 的函数，而 e' 和 θ' 是定义于 V 上的，从而 u 可以看作是定义于 V 的复合函数，而 ρU 应是 u 的泛函。在小变形条件下，显然可以假设 ρU 是 u 的线性泛函，当然为 u 的加性泛函 (additive functional)，则由 Friedman 和 Katz 证明的表示定理[7]：

$$\rho U=\int_V K[u(\boldsymbol{r}'),\boldsymbol{e},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}]dv(\boldsymbol{r}')$$

或记作：

$$\rho U=\int_V u[\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\ \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}';\ \boldsymbol{e},\boldsymbol{e}']dv(\boldsymbol{r}') \tag{26}$$

由此，我们可以得到：

$$\int_V \frac{\delta(\rho U)}{\delta \boldsymbol{G}'},\ dv(\boldsymbol{r}')=\int_V \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{G}'}dv(\boldsymbol{r}')$$

这里：$\boldsymbol{G}'$ 是 $\boldsymbol{e}'$，$\boldsymbol{\theta}'$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 中任一变量。

同时，ρU 具有伽俐略不变性，亦即应满足(18*)和(25)式。将(26)式代入(18*)式，则得到约束条件：

$$\int_V\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}'}\right)dv(\boldsymbol{r}')=0 \tag{27}$$

当物体是均匀的，当且仅当：

$$u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}';\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}')=u(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}';\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}') \tag{28}$$

使(27)式恒成立。

注意到：

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}\times\rho\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}\times\int_V\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}}dv(\boldsymbol{r}')=-\int_V\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\frac{\partial u}{\partial(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}dv(\boldsymbol{r}')\\
&\int_V\boldsymbol{r}'\times\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{r}'}\right)dv(\boldsymbol{r}')=\int_V\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\frac{\partial u}{\partial(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}dv(\boldsymbol{r}')
\end{aligned}\right\}$$

将(26)，(28)式代入(25)式：

$$\int_V\left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\theta}}+\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right]dv(\boldsymbol{r}')=0 \tag{29}$$

将 u 按二次项展开，并注意到无应变状态时：$\boldsymbol{t}=0$，$U=0$，于是一次项和常数项消失。并假设旋转与应变的偶合项消失，则：

$$u(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}';\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}')=u_\theta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}')+u_e(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|;\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}') \tag{30}$$

其中：

$$\begin{aligned}
u_\theta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}')=&\ u_0(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\cdot\boldsymbol{\theta}'\otimes\boldsymbol{\theta}'+u_1(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\\
&\cdot\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\theta}'+u_2(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\cdot\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\theta}\\
u_e(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|;\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}')=&\ u_3(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\cdot\boldsymbol{e}'\otimes\boldsymbol{e}'+u_4(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\\
&\cdot\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'+u_5(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\cdot\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}
\end{aligned}$$

将(30)式代入(29)式，可得：

$$\int_V \{[u_1 + 2u_2]\theta + [u_1 + 2u_0]\theta'\} dv(\boldsymbol{r}') = 0 \tag{31}$$

亦即有:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + 2u_2 = 0 \\ u_1 + 2u_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

从而得到: $u_0 = u_2 = -\dfrac{1}{2} u_1$, 于是:

$$u_\theta(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = u_0(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) \cdot \boldsymbol{\Theta}' \otimes \boldsymbol{\Theta}' \tag{33}$$

这里: $\boldsymbol{\Theta}' = \boldsymbol{\theta}' - \boldsymbol{\theta}$, 并且有: $u_\theta = u_\theta^*$; 若取: $u_e = u_e^*$, 将得到的 u_θ 和 u_e 代入(20)式, 可得: $\rho \hat{\boldsymbol{F}} = 0$, 以及

$$\begin{aligned} \rho \hat{\boldsymbol{L}} = -\rho \hat{\boldsymbol{J}} &= \int_V \left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\theta}'} - \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right)^*\right] dv(\boldsymbol{r}') \\ &= 4\int_V u_0(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) \cdot \boldsymbol{\Theta}' dv(\boldsymbol{r}') \end{aligned} \tag{34}$$

若将(30)式代入(16)式,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}^* = \int_V \left\{\frac{\partial u_e}{\partial \boldsymbol{e}} + \left(\frac{\partial u_e}{\partial \boldsymbol{e}'}\right)^*\right\} dv(\boldsymbol{r}') &= \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \boldsymbol{e} \\ &+ \int_V \boldsymbol{\Sigma}_2(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) \cdot \boldsymbol{e}' dv(\boldsymbol{r}') \end{aligned} \tag{35}$$

式中:

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = 4\int_V u_3(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) dv(\boldsymbol{r}')$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) = 2u_4(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)$$

对于各向同性,均匀的弹性介质, 由不变量理论得到: u_0, $\boldsymbol{\Sigma}_1$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_2$ 是各向同性张量。在直角坐标系下

$$4u_0(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) = \mathrm{Y}(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\delta^{kl} \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \{\lambda_0 \delta^{ij}\delta^{kl} + \mu_0 \delta^{ik}\delta^{jl} + \nu_0 \delta^{il}\delta^{jk}\} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_2(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) = \{&\lambda_1(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\delta^{i'j'}\delta^{k'l'} + \mu_1(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\delta^{i'k'}\delta^{j'l'} \\ &+ \nu_1(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\delta^{i'l'}\delta^{j'k'}\} \boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j \otimes \boldsymbol{e}'_k \otimes \boldsymbol{e}'_l \end{aligned}$$

从而,(34)式和(35)式成为

$$\left.\begin{aligned} &\rho \hat{\boldsymbol{L}} = \int_V \mathrm{Y}(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{r}') dv(\boldsymbol{r}') \\ &\boldsymbol{t}^* = \lambda_0 \boldsymbol{I} tr\boldsymbol{e} + (\mu_0 + \nu_0)\boldsymbol{e} \\ &\quad + \int_V \{\lambda_1(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\boldsymbol{I}' tr\boldsymbol{e}' + [\mu_1(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) + \nu_1(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)]\boldsymbol{e}'\} dv(\boldsymbol{r}') \end{aligned}\right\}$$

式中: $\boldsymbol{I} = \delta^{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{I}' = \delta^{i'j'}\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j$.

综上所述,我们得到非局部-非对称弹性场论的线性理论的方程组(分量形式)

$$\left.\begin{aligned} &\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho f_i + t_{ji,j} \\ &e_{klm} t_{kl} + \rho c_m + \rho L_m = 0 \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}\rho\hat{L}_m &= \int_V Y(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)[\theta'_m-\theta_m]dv(\boldsymbol{r}')\\ t^s_{kl} &= \lambda_0\delta_{kl}e_{mm}+(\mu_0+\nu_0)e_{kl}\\ &\quad+\int_V\{\lambda_1(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\delta_{k'l'}e_{m'm'}+[\mu_1(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\\ &\quad+\nu_1(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)]e_{k'l'}\}dv(\boldsymbol{r}')\\ t_{kl} &= t^s_{kl}+t^a_{kl}\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

五、讨论和结束语

1. 点 $\boldsymbol{r}$ 处的非局部体力矩与其邻域各点同点 $\boldsymbol{r}$ 的旋转角之差相关。当 $c_m=0$ 时，即无外加偶应力场作用，应力的非对称性是由非局部旋转效应产生的。根据非局部衰减原理，可将 θ'_m 在点 $\boldsymbol{r}$ 处展开，

$$\theta'_m=\theta_m+(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{grad}\theta_m+\cdots$$

略去高阶项，则有：

$$\rho\hat{L}_m=\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{grad}\theta_m\tag{37}$$

式中：
$$\boldsymbol{R}=\int_V(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\cdot Y(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)dv(\boldsymbol{r}')\tag{38}$$

当 $c_m=0$ 时，

$$e_{klm}t_{kl}=-\rho\hat{L}_m$$

或写作：

$$\left.\begin{aligned}t^a_{23}&=-2\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{grad}\theta_1\\ t^a_{31}&=-2\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{grad}\theta_2\\ t^a_{12}&=-2\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{grad}\theta_3\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

根据微极弹性理论，力矩平衡方程

$$e_{ijk}t_{jk}+\{(\gamma+\varepsilon)\varphi_{j,i}+(\gamma-\varepsilon)\varphi_{i,j}+\beta\varphi_{k,k}\delta_{ij}\}_{,i}=0\tag{40}$$

式中：φ_i 是微转动角矢量。

由以上两式得到：非局部-非对称弹性理论中，影响应力非对称特性的几何因素是微转动角的一阶导数；而微极弹性场论则是旋转的二阶导数项。因此，研究体力偶理论比面力偶理论的意义更重要。

2. 金属材料是由于原子之间引力的不同结合形式，形成了固体内部的各种键，离子键，共价键和金属键。共价键具有强烈的方向性。有人曾提出一种力学模式：在原子晶格处于平衡状态时，一根弹性棒的两端固支连接两个原子晶格，由此来描述晶格之间相互作用的极化性质[8]。二维方形晶体的力学状态(如图 1 所示)。将模型进行连续化，并略去面力偶的作用，则成为图 2 所示的力学模型。

由此看到，$M=\Sigma M_i$ 和 M 具有原子晶格的长程作用特征，是非局部物理量，与 M 相对偶的物理量是转动几何量。$\rho\hat{\boldsymbol{L}}$ 亦即描述了 M 的作用。如果将整个物体的 M_i 加起来，显然，总和为零，与此对应的是 $\int_V\overline{\rho\hat{\boldsymbol{L}}dv}=0$。

3. 根据本文的分析，$\boldsymbol{R}=\int_V(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})Y(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)dv(\boldsymbol{r}')$ 描述了共价键的作用和

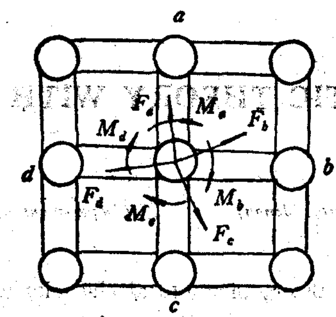

图 1

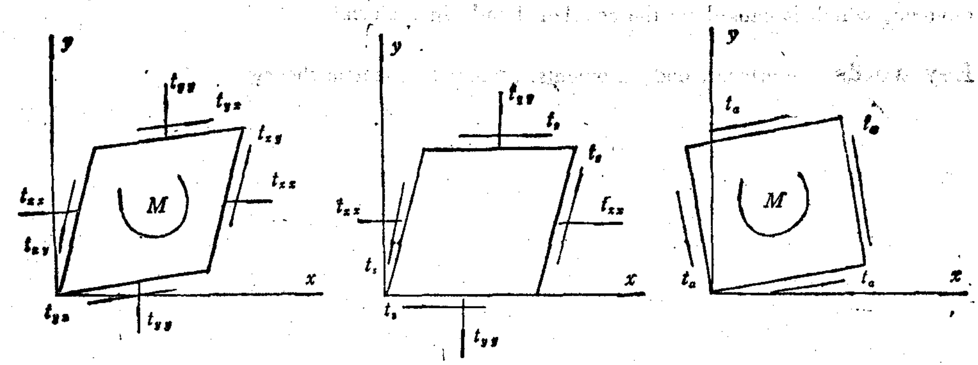

图 2

不同形式。当固体中不存在共价键，则有 $Y(|r'-r|)\to\delta(|r'-r|)$，$\rho\hat{L}=0$，对于上述理论退化为非局部弹性场论的 Eringen-Kröner 模型。

总之，非局部-非对称弹性理论与面力偶的非对称理论具有更重要的意义，这对于非对称弹性和非局部弹性理论的发展无疑是一个重要的进展。本文作者基于陈至达教授建立的非线性几何场论建立了非局部-非对称弹性固体的非线性理论并对其线性理论的应用进行了有益的讨论[4]，在此一并附志之。

参　考　文　献

[1] Eringen, A. C., Theory of micropolar elasticity, Fracture, II (ed. by Liebowitz), Academic Press, New York (1968), 621—729.

[2] Eringen, A. C., Continuum Physica, IV, Academic Press, New York (1976).

[3] Kunin. I. A., Elastic Media with Microstructure, Springer Verlag, Berlin III(1983).

[4] 高键，中国矿业大学博士论文(1988 年 6 月).

[5] Eringen, A. C., Continuum Physica, I, Academic Press, New York (1976).

[6] Mason. J. M., Variational, Incremental and Energy Methods in Solids Mechanics and Shell Theory, Amsterdam, Oxford, New York (1980).

[7] Friedman, N. and Katz., *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, 21(1966).

[8] Caunay, J. D., Theory of specific heats and lattice vibrntions, Solids State Physics, 2 (Seitz and Turn bull, ed) (1956).

NONLOCAL ELASTIC THEORY WITH BODY MOMENTS

Gao Jian
(*Shan Dong Polytechnic University, Jinan*)

Dai Tianmin
(*Department of Mathematic, Liaoning University*)

Abstract In this article, a theory of nonlocal elasticity with body moments is developed on the basis of axiom system of nonlocal continuum field theory. It is shown that there is the nonlocal body moment in the nonlocal elastic solid and the stress asymmetry is the result of the body moment, which is caused by the covalent bonds in material.

Key words nonlocal, body moments, asymmetry, elastic theory