

# 圆板在物体撞击下的非线性动力响应

邓梁波 叶天麒

(西北工业大学飞机系,西安)

**摘要** 本文在 Von Kármán 大位移的意义上,利用虚位移原理和伽辽金方法建立了圆板在物体撞击下的非线性动力响应的控制微分方程。在研究响应问题时,考虑了冲击载荷与圆板位移响应之间的耦合影响。文中使用时间增量法和奇异摄动理论求解问题的控制方程,获得了固支圆板非线性动力响应的近似解,并且求解了具体算例,绘出了圆板位移、应力的响应曲线以及冲击力随时间的变化曲线。

**关键词** 动力响应,冲击,圆板

## 一、引言

在物体撞击下结构的非线性动力响应问题是需要研究的重要课题。这类问题比较复杂,包括了几何非线性、材料非线性、耦合非线性以及时间效应。研究这类问题对工业生产是很有实际意义的,因为在动力工程,仪表工业,航空、航天工业,制造工业以及许多其他领域中都可碰到这类问题。关于在物体撞击下构件的线性动力响应问题的研究结果,Goldsmith 在其著作<sup>[1]</sup>中作了详细的介绍。近来,许多学者研究了这方面的问题<sup>[2-6]</sup>。而研究在物体撞击下结构大位移动力响应问题的文献比较少。文[8]以能量原理为基础,采用 Kartorovich 近似方法分析了非弹性薄圆板大位移响应问题,冲击载荷是给定的,即没有考虑载荷与位移之间的耦合影响。鉴于上述情况,本文在 Von Kármán 大位移的意义上,利用虚位移原理和伽辽金方法建立了薄圆板在物体撞击下的非线性动力响应的控制微分方程,其冲击载荷用 Hertz 接触力定律来确定,因而考虑了载荷与圆板位移响应之间的耦合影响。然后,应用时间增量法将冲击载荷分段线性化。最后,用奇异摄动理论求解非线性微分方程,获得了圆板位移、应力和冲击力的近似解。文中求解了具体算例,绘出了位移、应力响应曲线及冲击力随时间的变化曲线。

## 二、控制方程

首先,我们做如下假设:(a)金属球形物体撞击圆板中心,且冲击力可以看成是作用在圆板中心的集中载荷;(b)所研究的是 Von Kármán 意义下的大位移动力响应;(c)直法线假设,即 Kirchoff 假设仍然成立;(d)与横向振动相比,可以忽略纵向振动(即忽略  $\frac{d^2u}{dt^2}$ )。

大位移情况下,圆板的静力平衡方程为<sup>[9]</sup>

本文于1988年10月5日收到第一稿,1989年12月20日收到修改稿。

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) = \phi + \frac{h}{r} \frac{d\phi}{dr} \frac{dw}{dr} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr} (\nabla^2 \phi) = -\frac{E_2}{2r} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \quad (2)$$

式中  $\phi$  是应力函数,  $\psi$  是载荷函数, 它们与应力、载荷的关系如下:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}, \quad \sigma_\phi = \frac{d^2\phi}{dr^2}, \quad \psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr \quad (3)$$

对于动力问题, 忽略圆板的纵向振动后, 大位移情况下圆板的动力控制方程为

$$D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) = \psi + \frac{h}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \phi) = -\frac{E_2}{2r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \quad (5)$$

式中

$$\psi = \frac{1}{r} \int_0^r \left( q - \rho_2 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) r dr = \phi - \frac{1}{r} \int_0^r \rho_2 h w r dr \quad (6)$$

(2)和(5)式中下标“2”表示圆板, 以下相同。

下面, 我们应用虚位移原理来建立圆板动力响应的控制方程。为此, 将圆板振动时的惯性力看成是分布载荷。因此, 外载荷  $q$  和惯性力  $\rho_2 h w$  在虚位移上所做之功为

$$\delta W = \int_0^a (q - \rho_2 h w) \delta w 2\pi r dr,$$

式中  $a$  系圆板半径。将(6)式代入上式, 便得

$$\delta W = \int_0^a \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \delta w 2\pi dr.$$

假设在边界上  $\delta w = 0$  ( $w$  已知), 则上式可写为

$$\delta W = - \int_0^a r \psi \delta \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) 2\pi dr. \quad (7)$$

中曲面上的力由于虚位移所做之功为

$$\delta U_1 = -h \int_0^a (\sigma_r \delta \epsilon_r + \sigma_\phi \delta \epsilon_\phi) 2\pi r dr. \quad (8)$$

将大位移情况下的几何方程

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \quad \epsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad (9)$$

代入(8)式中, 同时假设在边界上  $\delta u = 0$  ( $u$  已知), 或者中曲面上的力为零 ( $\sigma_r = 0$ )。然后, 通过分部积分, (8)式就可写成

$$\delta U_1 = 2\pi h \int_0^a \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_r) - \sigma_\phi \right] \delta u dr - 2\pi h \int_0^a r \sigma_r \frac{\partial w}{\partial r} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) dr. \quad (10)$$

板中弯矩所做之功, 可以写成

$$\delta U_2 = - \int_0^a (M_r \delta K_r + M_\phi \delta K_\phi) 2\pi r dr, \quad (11)$$

假设在边界上弯矩等于零 ( $M_r = 0$ ), 或者  $\delta\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0$  ( $\frac{\partial w}{\partial r}$  已知). 再将中面曲率关系式

$$K_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad K_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (12)$$

代入(11)式, 然后, 通过分部积分, 可得

$$\delta U_2 = \int_0^a D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) 2\pi r dr \quad (13)$$

将(7)、(10)和(13)式代入虚位移原理

$$\delta U_1 + \delta U_2 + \delta W = 0 \quad (14)$$

中, 有

$$\int_0^a \left[ D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) - \phi - h\sigma_r \frac{\partial w}{\partial r} \right] \frac{\partial}{\partial r} (\delta w) 2\pi r dr + \int_0^a \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_r) - \sigma_\varphi \right] h 2\pi \delta w dr = 0.$$

由于(3)式应力函数的假设,  $\frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_r) - \sigma_\varphi = 0$  被精确地满足, 因此上式简化为

$$\int_0^a \left[ D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) - \phi - \frac{h}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \frac{\partial}{\partial r} (\delta w) r dr = 0 \quad (15)$$

下面, 我们用伽辽金方法来求解(15)式, 假设

$$w(r, t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) g_i(r) \quad (16)$$

将此式代入(15)式中, 便有

$$\int_0^a X \frac{dg_i}{dr} r dr = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

式中

$$X = D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) - \phi - \frac{h}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (18)$$

根据前面的假设 (a), 圆板的横向位移取为

$$w(r, t) = f(t)g(r) = f(t) \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} + 2 \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} \right) \quad (19)$$

这个位移表达式对于小位移问题是严格成立的. 在这里, 我们只取了(16)式中的第一项作为近似. (19)式满足如下的固支边界条件

$$w|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (20)$$

及中心法线没有转动(对称)的条件  $\frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$ .

将(19)式代入(5)式中, 然后, 积分得

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{4E_2 f(t)}{a} \left( \frac{r^3}{4a^3} \ln^2 \frac{r}{a} - \frac{3}{8} \frac{r^3}{a^3} \ln \frac{r}{a} + \frac{7}{32} \frac{r^3}{a^3} \right) + c_1 \frac{r}{2} + \frac{c_2}{r} \quad (21)$$

假定板在  $r = a$  的周边上是不可动的, 即

$$u|_{r=a} = 0 \text{ 或 } \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{\mu_2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (22)$$

其次, 在  $r = 0$  处, 应力  $\sigma_r$  是有限的。由(3)式中的第一式可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (23)$$

将(21)式代入(22)、(23)两式中, 便得

$$c_1 = \frac{9 - 7\mu_2}{4(1 - \mu_2)} \frac{E_2 f^2}{a^2}, \quad c_2 = 0$$

对集中载荷来说, 载荷函数可表示为

$$\phi = P(t)/2\pi r \quad (24)$$

式中  $P(t)$  是冲击载荷。将(24)式代入(6)式中, 再与(19)、(21)式一起代入(18)式中, 则

$$\begin{aligned} X = D \frac{8f(t)}{a^2 r} - \frac{P(t)}{2\pi r} + \rho_2 h \ddot{f}(t) \left( \frac{r}{2} - \frac{3}{8} \frac{r^3}{a^2} + \frac{r^3}{2a^2} \ln \frac{r}{a} \right) \\ + 4E_2 h \frac{f(t)}{a^3} \left( \frac{r^3}{a^2} \ln^3 \frac{r}{a} - \frac{3}{2} \frac{r^3}{a^2} \ln^2 \frac{r}{a} + \frac{7}{8} \frac{r^3}{a^2} \ln \frac{r}{a} - \frac{9 - 7\mu_2}{8(1 - \mu_2)} \frac{r}{a} \ln \frac{r}{a} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

将  $g(r)$  和(25)式代入(17)式中, 经过积分, 便得

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f(t) + \omega^2 \varepsilon f^3(t) = bP(t) \quad (26)$$

式中

$$\omega = \left[ \frac{10.2865 E_2 h^2}{\rho_2 (1 - \mu_2^2) a^4} \right]^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{3(1 - \mu_2^2)}{2h^2} \left[ \frac{9 - 7\mu_2}{16(1 - \mu_2)} - 0.2906 \right], \quad b = \frac{7.7149}{\pi a^2 \rho_2 h}$$

$\omega$  系圆板线性振动的圆频率。(26)式就是固支圆板非线性动力响应的控制微分方程。

### 三、问题求解

圆板在球形物体撞击下, 其冲击载荷为<sup>[4]</sup>

$$P(t) = \zeta (s(t) - \omega(0, t))^{3/2} \quad (27)$$

式中

$$\zeta = \frac{4\sqrt{R_1}}{3\pi(K_1 + K_2)}, \quad K_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1}, \quad K_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2}$$

下标“1”表示撞击物体;  $s(t)$  系撞击物体的位移;  $\omega(0, t)$  系板在  $r = 0$  (冲击点) 的位移, 其表达式为

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{m_1} \int_0^t \int_0^t P(\tau) d\tau dt \quad (28)$$

$$\omega(0, t) = f(t) \quad (29)$$

式中  $v_0, m_1$  分别系撞击物体的初速度和质量。

圆板的初始条件为

$$\omega(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial \omega(r, 0)}{\partial t} = 0 \quad (30)$$

因此,

$$f(0) = 0, \quad \frac{df(0)}{dt} = 0 \quad (31)$$

由(27)、(28)和(29)三式,可获得求冲击力  $P(t)$  的非线性方程

$$\left(\frac{P(t)}{\zeta}\right)^{2s} = v_0 t - \frac{1}{m_1} \int_0^t dt \int_0^t P(t) dt - f(t) \quad (32)$$

显然,不可能获得(32)式的解析解。因此,使用时间增量法,在任意一时间增量  $\Delta t$  内,可认为冲击力  $P(t)$  是常数,即将冲击载荷分段线性化。对于第几个时间增量  $[t_n, t_{n+1}] = [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ , 方程(32)可写成如下形式

$$\left(\frac{P_n}{\zeta}\right)^{2s} = v_0 n \Delta t - \frac{(\Delta t)^2}{m_1} \sum_{j=1}^n D_{n-j+1} P_j - f_n \quad (33)$$

式中右端第二项由(32)式右端第二项所产生,其展开式为<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n D_{n-j+1} P_j &= 2[(n-1)P_1 + (n-2)(P_2 - P_1) + (n-3)(P_3 - P_2 + P_1) + \dots \\ &+ (n-j)(P_j - P_{j-1} + P_{j-2} - P_{j-3} + \dots \mp P_1) + \dots + (P_{n-1} - P_{n-2} \\ &+ P_{n-3} - \dots \pm P_1)] + \frac{1}{3}[P_n - P_{n-1} + P_{n-2} - \dots \pm P_1] \end{aligned} \quad (34)$$

为了求解(33)式,我们假设球形物体与圆板刚接触时,主要是局部变形,而忽略结构的位移。因此,由(33)式可得到

$$P_1 = \zeta(v_0 \Delta t)^{1/2s} \quad (35)$$

在  $t = (n+1)\Delta t$  时的冲击力  $P_{n+1}$  由  $t = n\Delta t$  时的冲击力  $P_n$  按下式获得

$$\left(\frac{P_{n+1}}{\zeta}\right)^{2s} = v_0 n \Delta t - \frac{(\Delta t)^2}{m_1} \sum_{j=1}^n D_{n-j+1} P_j - f_n \quad (36)$$

下面,用(26)式来求解  $f_n$ 。在一般情况下,  $\varepsilon < 1$ 。因此,我们用奇异摄动理论中的变形坐标法求解(26)式,假设

$$f_n = f_{n0} + \varepsilon f_{n1} + \dots \quad (37)$$

$$\tau = (1 + a_{n1}\varepsilon + \dots)t \quad (38)$$

其中  $a_{n1}$  系待定常数。将(37)、(38)两式代入(26)中得

$$(1 + a_{n1}\varepsilon)^2 \left( \frac{d^2 f_{n0}}{d\tau^2} + \varepsilon \frac{d^2 f_{n1}}{d\tau^2} \right) + \omega^2 (f_{n0} + \varepsilon f_{n1}) + \omega^2 \varepsilon^2 f_{n0}^3 = b P_n \quad (39)$$

这里我们只取了  $\varepsilon$  一次幂作为近似。令(39)式中  $\varepsilon$  各次幂前的系数为零,得到关于  $f_{ni}$  ( $i = 0, 1$ ) 的递推方程和初始条件

$$\begin{cases} \frac{d^2 f_{n0}}{d\tau^2} + \omega^2 f_{n0} = b P_n \\ f_{n0}(\tau_n) = f_{n-1,0}(\tau_n) = d_{n0}, \quad \frac{df_{n0}(\tau_n)}{d\tau} = \frac{df_{n-1,0}(\tau_n)}{d\tau} = d_{t_{n0}} \end{cases} \quad \tau \in [\tau_n, \tau_{n+1}] \quad (40)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 f_{n1}}{d\tau^2} + \omega^2 f_{n1} = -2a_{n1} \frac{df_{n0}}{d\tau} - \omega^2 f_{n0}^3 \\ f_{n1}(\tau_n) = f_{n-1,1}(\tau_n) = d_{n1}, \quad \frac{df_{n1}(\tau_n)}{d\tau} = \frac{df_{n-1,1}(\tau_n)}{d\tau} + a_{n-1,1} \frac{df_{n-1,0}(\tau_n)}{d\tau} \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 f_{n1}}{d\tau^2} + \omega^2 f_{n1} = -2a_{n1} \frac{df_{n0}}{d\tau} - \omega^2 f_{n0}^3 \\ f_{n1}(\tau_n) = f_{n-1,1}(\tau_n) = d_{n1}, \quad \frac{df_{n1}(\tau_n)}{d\tau} = \frac{df_{n-1,1}(\tau_n)}{d\tau} + a_{n-1,1} \frac{df_{n-1,0}(\tau_n)}{d\tau} \end{cases} \quad (42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_{n1} \frac{df_{n0}(\tau_n)}{d\tau} = d_{in1} \end{array} \right. \quad (43)$$

解(40)、(41)两式得

$$f_{n0}(\tau) = A_{n0} \sin \omega \tau + B_{n0} \cos \omega \tau + C_{n0} \quad (44)$$

式中

$$\tau = (1 + a_{n1}\varepsilon)t, \quad A_{n0} = (d_{n0} - C_{n0}) \sin \omega \tau_n + \frac{d_{in0}}{\omega} \cos \omega \tau_n,$$

$$C_{n0} = \frac{b}{\omega^2} P_n, \quad B_{n0} = (d_{n0} - C_{n0}) \cos \omega \tau_n - \frac{d_{in0}}{\omega} \sin \omega \tau_n.$$

将(44)式代入(42)式中, 便得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_{n1}}{d\tau^2} + \omega^2 f_{n1} = & \left[ 2a_{n1} - \frac{3}{4} (A_{n0}^2 + B_{n0}^2 + 4C_{n0}^2) \right] \omega^2 A_{n0} \sin \omega \tau \\ & + \left[ 2a_{n1} - \frac{3}{4} (A_{n0}^2 + B_{n0}^2 + 4C_{n0}^2) \right] \omega^2 B_{n0} \cos \omega \tau \\ & - \frac{\omega^2}{4} A_{n0} (3B_{n0}^2 - A_{n0}^2) \sin 3\omega \tau - \frac{\omega^2}{4} B_{n0} (B_{n0}^2 - 3A_{n0}^2) \cos 3\omega \tau \\ & - 3\omega^2 A_{n0} B_{n0} C_{n0} \sin 2\omega \tau - \frac{3}{2} \omega^2 C_{n0} (B_{n0}^2 - A_{n0}^2) \cos 2\omega \tau \\ & - \frac{3}{2} \left( A_{n0}^2 + B_{n0}^2 + \frac{2}{3} C_{n0}^2 \right) \omega^2 C_{n0}. \end{aligned} \quad (45)$$

为了不出现长期项,  $\sin \omega \tau$  和  $\cos \omega \tau$  前的系数应等于零, 即

$$a_{n1} = \frac{3}{8} (A_{n0}^2 + B_{n0}^2 + 4C_{n0}^2),$$

将系数  $A_{n0}$ ,  $B_{n0}$  代入上式得

$$a_{n1} = \frac{3}{8} \left[ (d_{n0} - C_{n0})^2 + \frac{d_{in0}^2}{\omega^2} + 4C_{n0}^2 \right]. \quad (46)$$

解线性常微分方程(45), 并利用初始条件(43), 便可得如下形式的解

$$\begin{aligned} f_{n1}(\tau) = & A_{n1} \sin \omega \tau + B_{n1} \cos \omega \tau + D_{n1} \sin 2\omega \tau + D_{n2} \cos 2\omega \tau \\ & + D_{n3} \sin 3\omega \tau + D_{n4} \cos 3\omega \tau + C_{n1}, \end{aligned} \quad (47)$$

式中

$$D_{n1} = A_{n0} B_{n0} C_{n0}, \quad D_{n2} = (B_{n0}^2 - A_{n0}^2) C_{n0} / 2, \quad D_{n3} = A_{n0} (3B_{n0}^2 - A_{n0}^2) / 32,$$

$$D_{n4} = B_{n0} (B_{n0}^2 - 3A_{n0}^2) / 32, \quad C_{n1} = -\frac{3}{2} \left( A_{n0}^2 + B_{n0}^2 + \frac{2}{3} C_{n0}^2 \right) C_{n0},$$

$$\begin{aligned} A_{n1} = & \left( d_{n1} - C_{n1} + \frac{3}{2} D_{n1} \right) \sin \omega \tau_n + \left( \frac{d_{in1}}{\omega} - \frac{3}{2} D_{n1} \right) \cos \omega \tau_n - \frac{D_{n1}}{2} \cos 3\omega \tau_n \\ & + \frac{D_{n2}}{2} \sin 3\omega \tau_n - D_{n3} (2 \cos 2\omega \tau_n + \cos 4\omega \tau_n) + D_{n4} (2 \sin 2\omega \tau_n + \sin 4\omega \tau_n) \end{aligned}$$

$$B_{n1} = \left( d_{n1} - C_{n1} - \frac{3}{2} D_{n2} \right) \cos \omega \tau_n - \left( \frac{d_{in1}}{\omega} + \frac{3}{2} D_{n1} \right) \sin \omega \tau_n + \frac{D_{n1}}{2} \sin 3\omega \tau_n$$

$$+ \frac{D_{n2}}{2} \cos 3\omega\tau_n + D_{n3}(\sin 4\omega\tau_n - 2\sin 2\omega\tau_n) - D_{n4}(2\cos 2\omega\tau_n - \cos 4\omega\tau_n)$$

圆板的位移、速度响应由(44)、(47)两式可得

$$f_n = A_{n0} \sin \omega\tau + B_{n0} \cos \omega\tau + C_{n0} + \varepsilon(A_{n1} \sin \omega\tau + B_{n1} \cos \omega\tau + D_{n1} \sin 2\omega\tau + D_{n2} \cos 2\omega\tau + D_{n3} \sin 3\omega\tau + D_{n4} \cos 3\omega\tau + C_{n1}) \quad (48)$$

$$\frac{df_n}{dt} = (1 + a_{n1}\varepsilon)\omega[A_{n0} \cos \omega\tau - B_{n0} \sin \omega\tau + \varepsilon(A_{n1} \cos \omega\tau - B_{n1} \sin \omega\tau + 2D_{n1} \cos 2\omega\tau - 2D_{n2} \sin 2\omega\tau + 3D_{n3} \cos 3\omega\tau - 3D_{n4} \sin 3\omega\tau)] \quad (49)$$

将求出的  $f_n$  代入(36)式中,可求出  $P_{n+1}$ , 由  $P_{n+1}$  又可求出  $f_{n+1}$ , 如此重复计算,就可获得每个时刻的冲击载荷、圆板的位移及速度响应。在计算时,注意  $f_0 = \dot{f}_0 = 0$ 。

圆板沿厚度的最大弯曲应力是

$$\sigma_{r,h} = -\frac{2E_2 h f(t)}{(1 - \mu_2^2) a^2} \left(1 + \ln \frac{r}{a} + \mu_2 \ln \frac{r}{a}\right) \quad (50)$$

$$\sigma_{\varphi,h} = -\frac{2E_2 h f(t)}{(1 - \mu_2^2) a^2} \left(\mu_2 + \ln \frac{r}{a} + \mu_2 \ln \frac{r}{a}\right) \quad (51)$$

当  $r = 0$  时,这两个应力值都趋于无穷大。然而,实际上冲击力是分布在  $r = c$  的很小的圆面积上,  $c$  与冲击力  $P(t)$  的关系为<sup>[1]</sup>

$$c = \left[\frac{3\pi P(t)}{4} (K_1 + K_2) R_1\right]^{\frac{1}{3}}, \quad (52)$$

因此,在圆板中心处 ( $r = 0$ ), 应力可近似为<sup>[9]</sup>

$$\sigma_{r,h}^0 = \sigma_{\varphi,h}^0 = -\frac{2E_2 h f(t)}{(1 - \mu_2^2) a^2} \left(1 + \ln \frac{c}{a} + \mu_2 \ln \frac{c}{a}\right) + \frac{3}{2} \frac{P(t)}{\pi h^2} \quad (53)$$

而其他点的应力由(50)、(51)式给出。

#### 四、数值算例

钢球以  $v_0$  的初速度撞击固支圆板中心, 圆板由铝合金材料制成。钢球和圆板的半径分别为  $R_1 = 50\text{mm}$ ,  $a = 200\text{mm}$ ; 弹性模量分别为  $E_1 = 200\text{KN/mm}^2$ ,  $E_2 = 70\text{KN/mm}^2$ ; 泊松比分别为  $\mu_1 = \mu_2 = 0.33$ ; 质量密度分别为  $\rho_1 = 7.9718 \times 10^{-6}\text{kg/mm}^3$ ,  $\rho_2 = 2.768 \times 10^{-6}\text{kg/mm}^3$ ; 圆板厚度  $h = 30\text{mm}$ 。坐标系如图 1 所示。对于此算例, 本文计算了当钢球初速度为  $v_0 = 0.5, 1, 2\text{m/s}$  时这三种情况下的圆板位移和应力响应以及钢球位移响应和冲击载荷随时间的变化值。

图 2 绘出了钢球和圆板中心  $r = 0$  处的位移响应曲线。当  $v_0 = 2\text{m/s}$  时, 圆板最大位移  $w_{\max} = 8.2\text{mm}$ , 与圆板厚度的比值为  $w_{\max}/h = \frac{1}{3}$ , 由此可见几何非线性的影响是比较大的。从图 2 上的位移响应曲线可以看到, 圆板和圆球的最大总变形  $\sigma_{\max} = \max(\delta - f)$  发生在第二次相撞, 不在第一次相撞时。对于  $v_0 = 2\text{m/s}$ , 二物体第一次相撞到分开, 时间大约是  $t_d = 3.8\text{ms}$ , 对于  $v_0 = 0.5\text{m/s}$ , 时间大约是  $t_d = 6\text{ms}$ 。这说明初速度越低, 相撞一次的时间越长。从图 2 中还可看到, 系统在起始位置作上下振动。

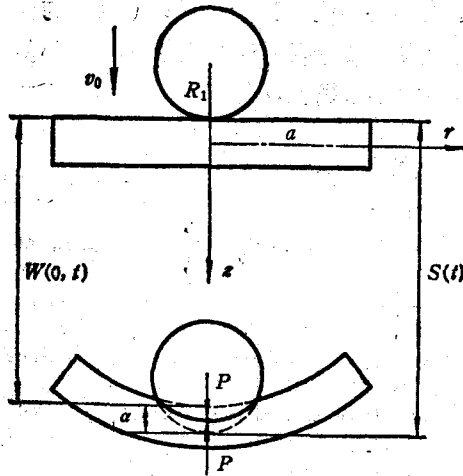


图 1 坐标系和系统变形

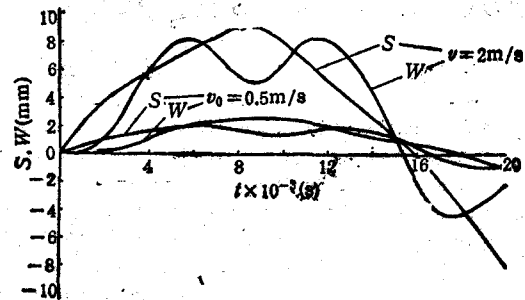


图 2 钢球和圆板位移响应曲线

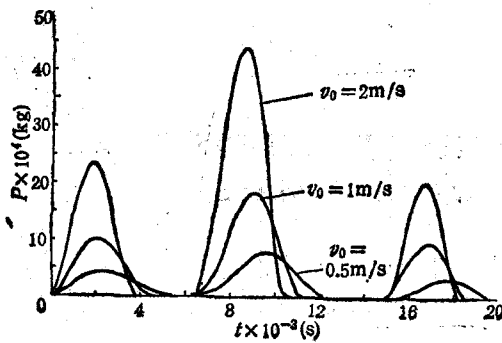


图 3 作用在圆板上的冲击载荷

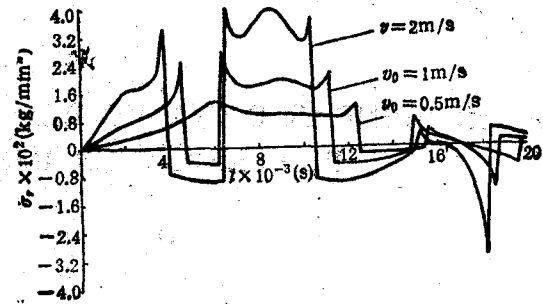


图 4  $r = 0$  处的圆板应力响应曲线

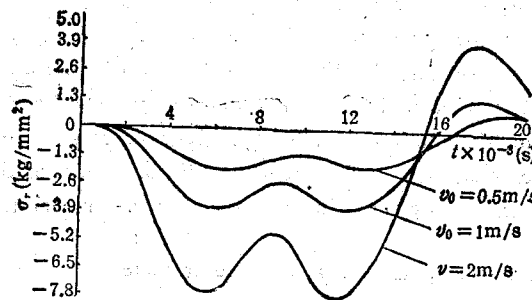


图 5  $r = a/2$  处的圆板径向应力响应曲线

图 3 给出了作用在圆板上的冲击载荷随时间变化的关系曲线。作用在钢球上的冲击载荷与此大小相等,方向相反。此图表明了最大冲击载荷发生在第二次相撞,这也说明了圆板和钢球的最大变形发生在第二次相撞时。图中,冲击载荷等于零意味着钢球与圆板已相互脱开。

图 4 中的曲线是圆板撞击点 ( $r = 0$ ) 处的径向应力响应曲线。曲线剧烈变化的现象



是由于集中载荷所致,从公式(53)中可看到这一点。图 5 给出了在  $r = a/2$  处圆板的径向应力  $\sigma_{r,s}$  的响应曲线。此处的应力响应曲线是光滑的,因为应力仅取决于圆板中心位移  $f(t)$  (见公式(50)),因此,应力曲线类似于圆板中心位移曲线  $f(t)$  (如图 2 所示)。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Goldsmith, W., *Impact*, Edward Arnold Ltd. (1960).
- [ 2 ] Dobyns, A. L., *Analysis of simply-supported orthotropic plates subjected to static and dynamic loads*, AIAA paper 80-0680 (1980).
- [ 3 ] Sun, C. T., and Chattopadhyay, S., *Dynamic response of anisotropic plates under initial stress due to impact of a mass*, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 42(1975), 693.
- [ 4 ] Dobyns, A. L., and Porter, T. R., *A study of the structural integrity of graphite/epoxy composite structure subjected to low velocity impact*, *Poly. Engng. Sci.*, 21(1981), 493-498.
- [ 5 ] Keer, L. M., *Dynamic impact of an elastically supported beam: large area contact*, *Int. J. Engng. Sci.*, 23(1985), 987-997.
- [ 6 ] James, F. D., *Determining the contact force during the transverse impact of plates*, *Exp. Mech.*, 27(1987), 68-72.
- [ 7 ] 赵隆茂,杨桂通,刚粘塑性圆板有限变形动力响应分析,固体力学学报,3(1986),207-215.
- [ 8 ] Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, Sec. Ed., McGraw-Hill Book Company, Inc. (1959).

## NONLINEAR DYNAMIC RESPONSE OF THE CIRCULAR PLATES UNDER IMPACT OF A MASS

Deng Liangbo Ye Tianqi

(Northwestern Polytechnical University, Xian)

**Abstract** In the sense of Von Karman large displacement, the governing equation of nonlinear dynamic response of the clamped circular plates under impact of a mass is established by using the virtual displacement principle and Galerkin's method in this paper. The effect of coupling between the impact load and the displacement of the circular plates is considered. The governing equation is solved by applying the time increment method and the singular perturbation theory, and the asymptotic solutions of nonlinear dynamic response of the clamped circular plates are obtained. The response curves of stresses and displacements of the plates and variation of the impact force with time are presented in the paper for the numerical example.

**Key words** dynamic response, impact, circular plate