第22卷 第3期　　力　学　学　报　　Vol. 22, No. 3
1990 年 5 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　May, 1990

两种材料组成弹性体的界面裂纹问题

黄克服　　王敏中
（北京大学力学系）

提要　本文研究了两种材料的半空间组成的弹性体在交界面上含半无限平面裂纹时的裂纹尖端应力场与应力强度因子．应用弹性力学位移场的通解以及 Kontorovitch-Lebedev 积分变换求解出了在裂纹面上作用有对称法向载荷时的裂纹尖端应力场以及应力强度因子的具体形式．

关键词　应力强度因子，弹性通解，积分变换，复合材料，线弹性断裂力学

1. 引言

本文考虑由两种材料的半空间组成的弹性体在交界面上含裂纹时的弹性力学应力场及裂纹尖端的应力奇异性．

在半无限平面裂纹的研究结果中，Kassir & Sih 在文[1]中给出了在裂纹面上作用有对称法向载荷与反对称切向载荷时的弹性力学解，得到了裂纹尖端应力场及应力强度因子；Uflyand 在文[2]中也考虑了这个问题，给出了在裂纹面上作用有反对称法向载荷与对称切向载荷时的解，但没有彻底地得到应力强度因子．他们的方法是利用弹性力学的 Papkovich-Neuber 通解以及 Kontorovitch-Lebedev 积分变换[1,2,3,6]来求解．后来 Meade & Keer 在文[4]中重新研究了这个问题，他们利用 *P-N* 通解的一种变形形式，把问题化归为求解一个 *Abel* 积分方程，较简明地得到了该问题的裂纹尖端应力场及应力强度因子．

对于两种材料组成的弹性体含裂纹问题的研究，已知得到了平面及平板含界面裂纹问题与内部含圆形裂纹问题的轴对称解，但没有界面含半无限平面裂纹问题的解（见文献[1][2]）．求解这些问题的方法有复变函数方法，积分变换方法等等．

本文试图用弹性通解与积分变换方法来求解两种材料的弹性体在界面上含半无限平面裂纹问题的解，并且对于在裂纹面上作用有对称法向载荷的情形求出了其裂纹尖端应力场与应力强度因子．在我们得到的结果中，裂纹尖端的应力场是振荡的，形式为 $r^{-\frac{1}{2}+i\varepsilon}$，这里 r 是空间点到裂纹尖端的距离，ε 是表征两层不同材料性质的常数，依赖于两层材料的弹性常数．这个性质与文[1,5]中所指出的性质是一致的．

2. 两种不同材料组成的弹性体含裂纹问题

如图 1，我们考虑由上、下两种不同弹性材料的半空间组成的弹性体在交界面上含半无限平面裂纹，在裂纹面上作用有对称法向集中载荷时的应力场．上、下半空间的弹性常

本文于 1989 年 5 月 6 日收到来稿，于 1989 年 9 月 2 日收到修改稿．

数分别记为 $\mu_1, \nu_1; \mu_2, \nu_2$。

由文献[8]，弹性力学中 Papkovich-Neuber 通解的一种变形形式为：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial z} - \nabla L_0 + \left(\alpha - \frac{1+\alpha}{4(1-\nu)}\right) \\ \times \boldsymbol{k}\nabla\cdot\boldsymbol{L} - \frac{1+\alpha}{4(1-\nu)} z\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{L}) \\ \nabla^2 L_0 = 0 \quad \nabla^2\boldsymbol{L} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

这里 $\boldsymbol{u}$ 表示位移场，∇ 是 Hamilton 算子，∇^2 是 Laplace 算子，$\boldsymbol{k}$ 是 z 方向单位矢量，α 为任意常数。

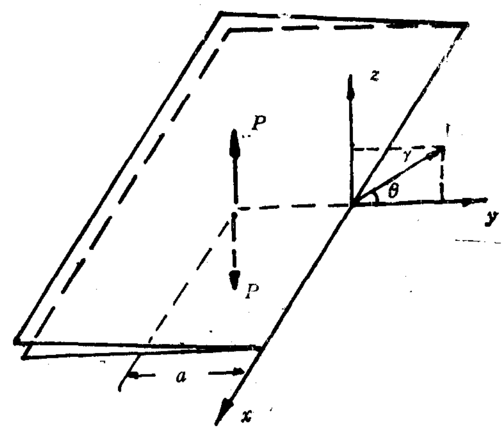

图 1

由于材料不同，因此在上、下半空间分别定义各自的调和函数 $\boldsymbol{L}$, L_0; $\boldsymbol{k}$, K_0。按照(2.1)式上、下半空间的位移场 $\boldsymbol{u}^+$ 与 $\boldsymbol{u}^-$ 可分别用 $\boldsymbol{L}$, L_0 及 $\boldsymbol{K}$, K_0 表示出来。而本文问题在 $z=0$ 处的连续条件为：

1) $z=0$, $y>0$ 时，上、下半空间固连，即。

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{u}^+ = \boldsymbol{u}^- \\ &\sigma_{xz}^+ = \sigma_{xz}^-, \ \sigma_{yz}^+ = \sigma_{yz}^-, \ \sigma_{zz}^+ = \sigma_{zz}^- \end{aligned} \quad (z=0,\ y>0) \right\} \tag{2.2}$$

2) $z=0$, $y<0$ 时，为裂纹面条件：

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xz}^+ = \sigma_{xz}^- = \sigma_{yz}^+ = \sigma_{yz}^- = 0 \\ &\sigma_{zz}^+ = \sigma_{zz}^- = -P\delta(x)\delta(y+a) \end{aligned} \quad (z=0,\ y<0)\right\} \tag{2.3}$$

其中 P 是集中力的大小，δ 为 Dirac-δ 函数。这两个条件可以改写为如下两个条件：

$$\sigma_{xz}^+ = \sigma_{xz}^-, \ \sigma_{yz}^+ = \sigma_{yz}^-, \ \sigma_{zz}^+ = \sigma_{zz}^- \quad (z=0) \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{u}^+ = \boldsymbol{u}^- \quad (z=0,\ y>0) \\ &\sigma_{xz}^+ = \sigma_{yz}^+ = 0, \ \sigma_{zz}^+ = -P\delta(x)\delta(y+a) \quad (z=0,\ y<0) \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

下面的任务就是寻求满足连接条件(2.4)与(2.5)的弹性力学位移场。

2.1　条件(2.4)式的满足：

在如下的条件成立时，(2.4)式自动满足：

$$\alpha^+ = 1+2\beta, \ \alpha^- = 1-2\beta, \ \beta = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2 - 3\nu_1 - 3\nu_2 + 4\nu_1\nu_2} \tag{2.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu_2 K_1 = \mu_1 \bar{L}_1, \ \mu_2 \bar{K}_2 = \mu_1 \bar{L}_2 \\ &\mu_2 K_3 = \frac{\mu_1}{1-2\nu_1}[(1-2\nu_2)(3-4\nu_1)\bar{L}_3 - 2(2-3\nu_1-3\nu_2+4\nu_1\nu_2)]\bar{L}_0 \quad (z<0) \\ &\mu_2 K_0 = \mu_1[2(1-2\nu_2)\bar{L}_3 - (3-4\nu_2)\bar{L}_0] \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

这里 $\bar{L}_1(x, y, z) = L_1(x, y, -z)$，其余类似。

2.2　条件(2.5)的满足

将以上得到的(2.6)与(2.7)式代入到条件(2.5)中，可以得到上半空间调和函数 $\boldsymbol{L}$ 与 L_0 在 $z=0$ 处的边条件如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)L_{1,3}+2(1-2\nu_2)\frac{\mu_1}{\mu_2}L_{3,1}-\left[1+\frac{\mu_1}{\mu_2}(3-4\nu_2)\right]L_{0,1}=0\\
&\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)L_{2,3}+2(1-2\nu_2)\frac{\mu_1}{\mu_2}L_{3,2}-\left[1+\frac{\mu_1}{\mu_2}(3-4\nu_2)\right]L_{0,2}=0\quad(z=0,y>0)\\
&\left[1+\frac{\mu_1}{\mu_2}(3-4\nu_2)\right](L_{3,3}-L_{0,3})+\frac{1}{2-3\nu_1-3\nu_2+4\nu_1\nu_2}\Big[(1-\nu_1-3\nu_2\\
&\quad+4\nu_1\nu_2)-\frac{\mu_1}{\mu_2}(1-3\nu_1-\nu_2+4\nu_1\nu_2)\Big]\nabla\cdot\boldsymbol{L}=0
\end{aligned}\right\}\tag{2.8}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&L_{1,33}+\frac{2(1-2\nu_1)(1-2\nu_2)}{2-3\nu_1-3\nu_2+4\nu_1\nu_2}L_{3,31}-2L_{0,31}-\frac{\nu_1+\nu_2-4\nu_1\nu_2}{2-3\nu_1-3\nu_2+4\nu_1\nu_2}\\
&\quad\times(L_{1,11}+L_{2,12})=0\\
&L_{2,33}+\frac{2(1-2\nu_1)(1-2\nu_2)}{2-3\nu_1-3\nu_2+4\nu_1\nu_2}L_{3,32}-2L_{0,32}-\frac{\nu_1+\nu_2-4\nu_1\nu_2}{2-3\nu_1-3\nu_2+4\nu_1\nu_2}\\
&\quad\times(L_{1,12}+L_{2,22})=0\qquad\qquad(z=0,\ y<0)\\
&\frac{4(1-\nu_1)(1-2\nu_2)}{2-3\nu_1-3\nu_2+4\nu_1\nu_2}L_{3,33}-2L_{0,33}+\frac{2(\nu_1-\nu_2)}{2-3\nu_1-3\nu_2+4\nu_1\nu_2}\\
&\quad\times(L_{1,13}+L_{2,23})=-\frac{P}{\mu_1}\delta(x)\delta(y+a)
\end{aligned}\right\}\tag{2.9}
$$

其中 $L_{0,1}$ 表示 $\partial L_0/\partial x$，其余类似．为求解该边值问题，我们引入如下积分变换：

$$
F(x,r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty[c_1(s,t)\cosh(\theta t)+c_2(s,t)\sinh(\theta t)]K_{it}(sr)e^{-isx}dsdt \tag{2.10}
$$

这里 $K_{it}(sr)$ 是 MacDonold 函数． 实际上该变换是对 x 作 Fourier 变换，对 r 作 Kontorovitch-Lebedev 变换[3]．

把 (y,z) 坐标换为 (r,θ) 后，经过积分变换求解，最后可得到裂纹尖端应力场如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_{xz}(r,0,x)=O(r^{\frac{1}{2}})\\
&\sigma_{yz}(r,0,x)=\frac{1}{\sqrt{2r}}\left[-K_{\rm I}\sin\left(\varepsilon\ln\frac{r}{a}\right)+K_{\rm II}\cos\left(\varepsilon\ln\frac{r}{a}\right)\right]+O(r^{\frac{1}{2}})\\
&\sigma_{zz}(r,0,x)=\frac{1}{\sqrt{2r}}\left[K_{\rm I}\cos\left(\varepsilon\ln\frac{r}{a}\right)+K_{\rm II}\sin\left(\varepsilon\ln\frac{r}{a}\right)\right]+O(r^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}\right\}\tag{2.11}
$$

其中：

$$
K_{\rm I}+iK_{\rm II}=\frac{P\sqrt{2\pi a}\cosh(\varepsilon\pi)}{\pi^2(a^2+x^2)}\frac{\Gamma(1-i\varepsilon)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\varepsilon\right)}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{i\varepsilon}\tag{2.12}
$$

这里 Γ 表示复变量的 Γ 函数，ε 是材料参数，$\varepsilon=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{\mu_1(3-4\nu_2)+\mu_2}{\mu_1+\mu_2(3-4\nu_1)}$．

3. 结果讨论

1. 本文是对两层不同性能的介质求解的．当两种材料弹性常数相同时，$\varepsilon=0$，应力强度因子为 $K_{\rm I}+iK_{\rm II}=\dfrac{\sqrt{2a}P}{\pi^2(a^2+x^2)}$．这个结果与文[1,4]中所给的结果是一致的．

2）相应的平面问题的结果可以由本文结论导出．当在 x 方向作用有均匀线力时，应

用叠加原理，其应力强度因子为 $K_{\rm I}+iK_{\rm II}=\frac{\sqrt{2a}P}{\pi a}\cosh(\varepsilon\pi)$。这个结果与文[7]中结论是一样的。

3）裂纹尖端应力场在 $r\to 0$ 时具有形式为 $r^{-\frac{1}{2}+i\varepsilon}$ 的振荡奇异性，这与文献[1,5,7]中所指出的是一致的。

参考文献

[1] Kassir, M. K. & Sih, G. C. Three-dimensional crack problems. Noordhoff International, Leyden (1975).
[2] Uflyand, Ya, S. Survey of Articles on the applications of integral transforms in the theory of elasticity. North Carolina State Univ. Appl. Mech. Res. Group. No. PSR 24/6 (1965).
[3] Lebedev, N. N. Special functions and their applications, Academic Press (1965).
[4] Meade, K. P. & Keer, L. M. *J. of Elasticity* 14(1984) 3—14.
[5] Sih, G. C. & Chen, E. P. Cracks in composite materials. Mattinus Nijhoff (1981).
[6] Sneddon, I. N. The Use of Integral Transforms. McGraw-Hill (1972).
[7] Rice, J. R. & Sih, G. C. *J. of Appl. Mech*, 32(1965) 418—423.
[8] 武际可、王敏中　弹性力学引论，北京大学出版社(1981).

THE INTERFACE CRACK PROBLEM OF THE BI-MATERIAL ELASTIC BODY

Huang Kefu　Wang Minzhong
(Department of Mechanics, Peking University)

Abstract In the paper, the stress singularity and stress intensity factors of bimaterial elastic body with a semi-infinite plane crack in the interface of two materials are considered. Using the general solutions of displacement field in elasticity and the kontorovitch-lebedev integral transformation, we have obtained the exact forms of the stress sigularity and intensity factors at the crack tip when a pair of symmetric normal concentrated forces are applied on the surface of the crack.

Key words stress intensity factor, the general solution of elasticity, integral transformation, composite material, linear elastic fracture mechanics