

用伪应力函数法求解幂硬化材料柱体的扭转问题

王子昆 庄蔚

(西安交通大学工程力学系)

摘要 本文引用伪应力函数使得幂硬化材料的任意形状等截面柱体和变直径圆截面柱体扭转问题的定解方程具有弹性柱体扭转问题的相应形式,从而可用类似于求解弹性柱体扭转的方法或直接利用已知的弹性解答求解对应的幂硬化材料柱体的扭转问题,本文用这种方法求得了幂硬化材料椭圆截面柱体及含球形空腔的圆轴扭转问题的解析解。

关键词 伪应力函数;幂硬化材料;柱体扭转

1. 引言

在塑性力学中对理想弹塑性材料柱体的扭转问题已有了较充分的研究,但对强化材料除圆轴和圆锥体的扭转问题已被求解外,对于任意形状截面的柱体,无论是用增量理论还是全量理论都没有求得扭转问题的分析解^[1]。文献[2]指出,对强化材料的柱体扭转问题,虽然在截面上可使用相同的方程而没有确定弹塑性边界的麻烦,但最后得到的微分方程则比较复杂。正是由于这个原因,尽管 Prager 早在 1947 年就对强化材料导出了柱体扭转问题的基本方程^[3],但后来除用数值法求解过几个问题外还未见有人作进一步的研究。本文以 Ильюшин 小弹塑性形变理论为基础,通过引进伪应力函数给出了幂硬化材料等截面柱体及变圆截面柱体扭转问题有效而简便的求解方法。

2. 任意形状等截面直杆的扭转

设材料的硬化规律为

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^n \quad (1)$$

若采用弹性力学中等截面柱体扭转问题的假设,则待求应力分量 τ_{xx} 、 τ_{yy} 满足的基本方程为

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} = c \quad (3)$$

$$\tau_{xx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xx}, \quad \tau_{yy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{yy} \quad (4)$$

式(3)中 c 为常数,等效应力 σ_i 及等效应变 ε_i 的表达式为

本文于 1989 年 4 月 10 日收到,于 1989 年 11 月 1 日收到修改稿。

$$\sigma_i = \sqrt{3} (\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}} (\gamma_{xx}^2 + \gamma_{yy}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

引用应力函数 $\psi(x, y)$, 使

$$\tau_{xx} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yy} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

把上式代入(4)、解得 γ_{xx}, γ_{yy} 后再代入(3), 同时注意到式(1), 可得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_i^{1-n} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_i^{1-n} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = c \quad (8)$$

若令

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon_i^{1-n} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \varepsilon_i^{1-n} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (9)$$

则(8)式成为

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = c \quad (10)$$

在柱体截面边界上有 $\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0$, 由(9)式解出 $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$ 并代入上式, 便可得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0$$

即在截面边界上有

$$\Phi = \text{const} \quad (11)$$

由后面的(13)式可见应力分量仅与 Φ 对坐标变量的导数有关, 故对单连通截面在边界上可取

$$\Phi = 0 \quad (12)$$

由(10)、(11)式可见幂硬化材料等截面柱体扭转问题函数 Φ 所满足的方程及边界条件与弹性柱体扭转问题应力函数满足的方程和边界条件形式一致, 故 Φ 被称为伪应力函数。将 σ_i 用应力函数 ψ 表示, 利用(1)式得

$$\varepsilon_i^{1-n} = \left(\frac{\sigma_i}{A} \right)^{\frac{1-n}{n}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{A} \right)^{\frac{1-n}{n}} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}}$$

将上式代入(9)式经简单运算得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{A} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2n}} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{A} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2n}} \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned} \quad (13)$$

可见得到伪应力函数 Φ 后即可由上式求得 $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$, 并由(7)式求得应力分量。(13)式

中等号右端的正负号将根据柱体截面上扭矩的方向确定, 而式(10)中的常数 c 可由条件

$$M = \iint_R (\tau_{yx} - \tau_{xy}) dx dy \quad (14)$$

求得, M 表示外加扭矩, R 表示柱体截面。

作为解例, 设有内外半径分别为 k 及 a 的幂硬化材料厚壁圆筒, 受扭矩 M 作用。据(11)和(12)式取 Φ 为

$$\Phi = m(x^2 + y^2 - a^2) \quad (m \text{ 为待定常数})$$

把上式代入式(10), 得 $m = \frac{c}{4}$, 经运算求得此问题的解答为

$$\tau = (\tau_{yx}^2 + \tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(n+3)M}{2\pi(a^{n+3} - k^{n+3})} r^n \quad (15)$$

当 $k=0$ 时由上式得 $\tau = \frac{(n+3)M}{2\pi a^{n+3}} r^n$, 此即幂硬化材料圆轴扭转问题的解答。

作为第二个例子, 现考虑幂硬化材料椭圆截面柱体的扭转, 取

$$\Phi = m\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

由式(10)得待定常数 $m = \frac{a^2 b^2 c}{2(a^2 + b^2)}$, 将 Φ 代入(13)、(14)式, 并令

$$I = \int_0^{2\pi} (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}} d\theta \quad (16)$$

得应力解答为

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -\frac{(n+3)M}{(ab)^{n+2}I} (b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{n-1}{2}} a^2 y \\ \tau_{yy} &= +\frac{(n+3)M}{(ab)^{n+2}I} (b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{n-1}{2}} b^2 x \end{aligned} \quad (17)$$

上式中当 $n=1$ 时即得弹性解答, 当 $n=0$ 时得理想塑性体解答, 对幂硬化材料因 $0 < n < 1$, 积分式(16)对具体的 n, a 及 b 只能数值求解。(17)式表明, 最大剪应力仍发生在

椭圆截面短半轴的两个端点上, 且为 $|\tau_{\max}| = \frac{(n+3)M}{a^2 b^2 I} a^n$ 。

3. 变截面迴转体的扭转

采用和弹性材料变截面迴转体扭转问题的相同假设, 在柱坐标下 $\tau_{r\theta}$ 、 $\tau_{\theta z}$ 满足的基本方程为

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial r} - \frac{1}{r} \gamma_{\theta z} \quad (19)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{r\theta}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{\theta z} \quad (20)$$

令

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (21)$$

将上式代入(20),并注意式(1)有

$$\gamma_{r\theta} = -\frac{3}{A} \varepsilon_i^{1-n} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right), \quad \gamma_{\theta z} = \frac{3}{A} \varepsilon_i^{1-n} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (22)$$

再将上式代入(19)式,经整理后得

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon_i^{1-n} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\varepsilon_i^{1-n} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] - \frac{3}{r} \varepsilon_i^{1-n} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (23)$$

令

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \varepsilon_i^{1-n} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \varepsilon_i^{1-n} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (24)$$

则(23)式成为

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (25)$$

将(24)式中两式两端分别乘以 $\frac{dz}{ds}$ 、 $\frac{dr}{ds}$,注意到在迴转体轴截面的侧边上有 $\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} +$

$\frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{dr}{ds} = 0$,经运算后可得 Φ 满足的边界条件为

$$\Phi = \text{const} \quad (26)$$

Φ 即为伪应力函数。它满足的基本方程(25)及边界条件(26)与弹性材料对应问题应力函数所满足的条件是相同的。

由(24)式反解得

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(\frac{A}{\sqrt{3}} \right)^{1-n} r^{2(1-n)} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(\frac{A}{\sqrt{3}} \right)^{1-n} r^{2(1-n)} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (27)$$

这说明求得 Φ 后可据上式及(21)式求得应力解答。

作为解例现考虑含半径为 a 的球形空腔圆轴的扭转,如图1所示。设一半径为 R 的圆轴含一球心位于轴线上且半径为 a 的球腔,设 $R \gg a$ 。对于弹性材料上述问题应力函数 ϕ' 满足

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \phi'}{\partial r} = 0 \quad (28)$$

$$\phi' = \text{const} \quad (\text{在内外侧面边界上}) \quad (29)$$

这时问题的解答为^[3]

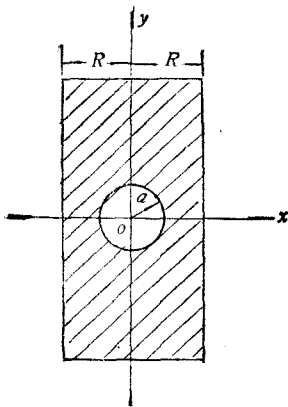


图 1

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta}^c &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi^c}{\partial z} = -\frac{5Ma^5}{2\pi R^4} \frac{zr^2}{(z^2+r^2)^{7/2}} \\ \tau_{\theta z}^c &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi^c}{\partial r} = \frac{2M}{\pi R^4} \left[r - \frac{a^5 r}{(z^2+r^2)^{7/2}} \left(z^2 - \frac{r^2}{4} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

上式中 M 为柱体端面受到的扭矩, 由此可见

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi^c}{\partial z} &= \frac{5Ma^5}{2\pi R^4} \frac{zr^2}{(z^2+r^2)^{7/2}} \\ \frac{\partial \psi^c}{\partial r} &= \frac{2M}{\pi R^4} \left[r^3 - \frac{a^5 r^3}{(z^2+r^2)^{7/2}} \left(z^2 - \frac{r^2}{4} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

将(25)、(26)式与(28)、(29)式加以对照, 对幂硬化材料取

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{5a^5}{2} c \frac{zr^2}{(z^2+r^2)^{7/2}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= 2c \left[r^3 - \frac{a^5 r^3}{(z^2+r^2)^{7/2}} \left(z^2 - \frac{r^2}{4} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

即可使(25)、(26)式得到满足, 其中 c 为待定常数。于是幂硬化材料圆轴含球形空腔时扭转问题的应力分量据(32)式由(27)、(21)式求得为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\left(\frac{A}{\sqrt{3}}\right)^{1-n} \left\{ \left[2 - \frac{a^5(4z^2-r^2)}{2(z^2+r^2)^{7/2}} \right]^2 + \frac{25a^{10}z^2r^2}{4(z^2+r^2)^7} \right\}^{\frac{n-1}{2}} \\ &\quad \cdot c^n r^n \cdot \frac{5a^5 zr}{2(z^2+r^2)^{7/2}} \\ \tau_{\theta z} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{A}{\sqrt{3}}\right)^{1-n} \left\{ \left[2 - \frac{a^5(4z^2-r^2)}{2(z^2+r^2)^{7/2}} \right]^2 + \frac{25a^{10}z^2r^2}{4(z^2+r^2)^7} \right\}^{\frac{n-1}{2}} \\ &\quad \cdot 2c^n r^n \left[1 - \frac{a^5}{(z^2+r^2)^{7/2}} \left(z - \frac{r^2}{4} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

其中 c^n 由 $M = \int_0^{2\pi} \int_a^R \tau_{\theta z} r^2 dr d\theta$ 决定, 在远离空腔处求得 c^n 为

$$c^n = \frac{(n+3)M}{2\pi \left(\frac{A}{\sqrt{3}}\right)^{1-n} 2^n R^{n+3}}$$

把上式代入(33)式, 最后得

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\frac{M(n+3)}{2^{n+1}\pi R^{n+3}} \left\{ \left[2 - \frac{a^5(4z^2-r^2)}{2(z^2+r^2)^{7/2}} \right]^2 + \frac{25a^{10}z^2r^2}{4(z^2+r^2)^7} \right\}^{\frac{n-1}{2}} \\ &\quad \cdot \frac{5a^5 zr}{2(z^2+r^2)^{7/2}} r^n \\ \tau_{\theta z} &= \frac{M(n+3)}{2^n \pi R^{n+3}} \left\{ \left[2 - \frac{a^5(4z^2-r^2)}{2(z^2+r^2)^{7/2}} \right]^2 + \frac{25a^{10}z^2r^2}{4(z^2+r^2)^7} \right\}^{\frac{n-1}{2}} \\ &\quad \cdot \left[1 - \frac{a^5}{(z^2+r^2)^{7/2}} \left(z - \frac{r^2}{4} \right) \right] r^n \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

当 $a=0$ 时, 由上式同样可得幂硬化材料圆轴扭转问题的解答。

在 $z^2+r^2=a^2$ 的球腔表面处, 对(34)式经运算表明, 最大的 $\tau_{\theta z}$ 发生在 $z=0$, $r=a$ 处, 即

$$(\tau_{\theta z})_{r=0} = \frac{M(n+3)}{2\pi R^{n+3}} \cdot 1.25^n a^n$$

故应力集中系数 $K = 1.25^n$, 对于弹性柱体由(30)式可知在同一位置上应力集中系数 $K^e = 1.25$, 因而在这种情况下有 $K = (K^e)^n$, 这说明对幂硬化材料圆柱体在扭转变形时球腔引起的应力集中要比线弹性体的小。

4. 结束语

通过引进伪应力函数, 使得幂硬化材料柱体扭转问题的定解方程由复杂的非线性形式转化为线性的, 正如以上所述解例所表明的, 用这种方法使得一些难度较大的问题可以简便地求解, 事实上用这种方法还可以得到若干重要问题的解答。

参 考 文 献

- [1] 王仁、熊祝华、黄文彬, 塑性力学基础, 科学出版社(1982), 224—240.
- [2] R. 希尔, 塑性数学理论, 王仁等译, 科学出版社(1966), 94—107.
- [3] Lekhnitskii, S. G., Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Mir Publishers, Moscow (1981), 363—369.

THE TORSIONAL ANALYTIC SOLUTION OF PRISMATIC CYLINDERS IN THE POWER EXPONENTIAL HARDENING MODEL

Wang Zikun Zhuang Wei

(Xian Jiaotong University)

Abstract A method utilizing pseudo-stress function to solve torsional problems of prismatic cylinders in the power exponential hardening model is proposed. By the method, the torsional equations of cylinders possessed sections of arbitrary shape or circular sections of variable diameter, could be solved just like that of linear-elastic cylinders, or solved by directly using the elastic solutions which have been known. Examples of an elliptical section shaft and a circular cylinder possessed a globular cavity in the power exponential hardening model are illustrated.

Key words pseudo-stress function, power exponential hardening model, torsion of prismatic cylinders