第22卷 第2期　　力 学 学 报　　Vol. 22, No. 2
1990年3月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Mar., 1990

复正交矩阵区对角化条件及其对相变问题的应用

朱如曾　孙祉伟　　揭草仙
(中国科学院力学研究所)　(兰　州　大　学)

提要　本文给出 $(2n\times 2n)$ 复正交矩阵正交相似于 (2×2) 正交矩阵直接和的充分必要条件。作为实际例子，并讨论它对二维 Ising 模型相变问题的应用。

关键词　复正交矩阵，相变

一、引　言

在力学、物理学和应用数学中，矩阵通过相似变换实现对角化或区对角化的问题十分重要和普遍。U 矩阵的 U 相似对角化及区对角化问题已有完备讨论。然而在复欧空间的理论[1,2]中十分重要的复正交矩阵的"复正交相似"(简称为"正交相似")区对角化问题则尚需给出严格的充分必要条件。某些文献认为凡 $2n\times 2n$ 复正交矩阵都一定正交相似于 2×2 矩阵的直接和。例如，文献[3]引用了如下的"定理"(下称"命题1")：

命题1　任何一个 $(2n\times 2n)$ 的复正交矩阵 R，都可以通过正交相似变换，变成区对角矩阵[1)]。即总找到矩阵 T，使

$$R=TDT^{-1}\tag{1}$$

其中

$$T\tilde{T}=I\ (\text{单位矩阵})$$

而 D 为区对角化矩阵，即 D 具有形式

$$D=\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\ & & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & & \\ & & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots\end{bmatrix}\tag{2}$$

这里 $\tilde{T}$ 为 T 的转置矩阵。

其实，命题1并不正确，即并不是每个 $(2n\times 2n)$ 复正交矩阵都正交相似于区对角

本文于1988年1月16日收到。

1) 这句话在文学上已对原文作了改动，以适合本文的术语。

化形式，即可按(1)式实行区对角化的．例如如下的 R_2 就是一个反例：

$$R_2=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2i & 2\\ 0 & -2i & -3 & 2i\\ 0 & -2 & 2i & 1\end{bmatrix}$$

这里，$n=2$．直接计算可知 $R_2\tilde{R}_2=I$，即 R_2 是 (4×4) 复正交矩阵，满足命题 1 的条件．但 R_2 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda I-R_2|=(\lambda+1)^4$$

因为

$$(\lambda+I)^2|_{\lambda=R_2}=(R_2+I)^2\neq 0$$
$$(\lambda+I)^3|_{\lambda=R_2}=(R_2+I)^3=0$$

所以，R_2 的最小多项式为 $(\lambda+1)^3$．根据文[4]定理 3 得，R_2 的特征矩阵 $(\lambda I-R_2)$ 的初等因子是 $(\lambda+1)$ 和 $(\lambda+1)^3$，因此 R_2 的 Jordan 标准型是

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

所以，一定存在满秩矩阵 A，使得

$$R_2=ABA^{-1}$$

并且 B 是 R_2 在相似变换下所能化到的最简形式．B 中含有一个一阶 Jordan 块

$$[-1]$$

和一个三阶 Jordan 块

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

此三阶块无法进一步化为二阶与一阶块之直接和的形式，因此更无法在 $T\tilde{T}=I$ 的条件下通过 T 使 R_2 化到两个二阶块之直接和的形式，即 R_2 无法化为(2)式的形式．

既然并不是每一个复正交矩阵都可复正交相似于区对角化矩阵，那末找到复正交矩阵正交相似于区对角化矩阵的充分必要条件就是很有意义的了．本文将致力于此，并给出这种充要条件对二维 Ising 模型相变问题的应用．

二、复正交矩阵与区对角化矩阵正交相似的充分必要条件

引理 1　对行数相同的任意两个复正交矩阵 R 和 G，它们正交相似，即存在复正交矩阵 T，使 $R=TGT^{-1}$ 的充分必要条件是，R 和 G 的特征矩阵的初等因子完全相同．

证明　选定维数与 R 的行数相同的复欧氏空间的标准正交基底，则复正交矩阵 R 和 G 就决定了空间的二个复正交变换，或称等度量变换，应用文[4]定理 4 中关于等度量变换的部分，即可证明本定理．

定理 1　对于 $(2n\times 2n)$ 复正交矩阵 R，存在复正交矩阵 T，使得

$$R = TDT^{-1} \tag{3}$$

并且D具有区对角化形式(2)的充分必要条件是，R的特征根系列完全由互成倒数的数对所组成，并且其特征矩阵 $(\lambda I - R)$ 的初等因子完全是一次的.

证明　先证必要性. 假设R能通过某一复正交矩阵进行相似变换化为D，即R与D满足(3)式，并且其中D具有形式(2). 显然，D一定能用另一满秩矩阵T_1进行相似变换而化成对角矩阵F，即

$$D = T_1 F T_1^{-1} \tag{4}$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & & & & \\ & e^{-i\theta_1} & & & & \\ & & e^{i\theta_2} & & & \\ & & & e^{-i\theta_2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

这里，$\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots$是复数. 将(4)式代入(3)式得

$$R = AFA^{-1}$$

其中

$$A = TT_1$$

所以R的特征根系列就是F的特征根系列：$e^{\pm i\theta_1}, e^{\pm i\theta_2}, \cdots\cdots$. 它确由互为倒数的数对所组成. 此外，既然$R$能通过相似变换对角化，这表明$R$的特征矩阵 $(\lambda I - R)$ 的初等因子确是一次的.

充分性证明：既然R的特征矩阵的初等因子都是一次的，并且R的特征根系列由互为倒数的数对所组成，那末复正交矩阵R的特征矩阵 $(\lambda I - R)$ 的初等因子集合为

$$\mathscr{F} = \{\lambda - e^{i\theta_j},\ \lambda - e^{-i\theta_j}\}, \quad j = 1, 2, \cdots n$$

另一方面，显然复正交矩阵D的特征矩阵的初等因子集合也是$\mathscr{F}$. 由本文引理可知，必存在另一复正交矩阵T，使 $R = TDT^{-1}$. 证毕.

三、对二维 Ising 模型的应用

应用 Onsager 解法来求解二维 Ising 模型的相变问题时[3,5]需要用 $(2n \times 2n)$ 维正交矩阵$R_\pm$的本征值来表示复正交矩阵$M_\pm$的本征值(文(3)公式(16.60)和(16.61)). 为此需证明一定可以将$R_\pm$化为区对角化的形式(2). 文[4]的办法是以上文所述的命题1为依据，认为$R_\pm$因为是 $(2n \times 2n)$ 正交矩阵，必定可以化为形式(2). 本文已用反例证明命题1不正确，故应以本文定理1为基础进行论证：

由文[3] (p.174) $ss' = 1$

将此式和公式 $cc' = \cosh(2\beta - 2\beta') + 1$

代入文[3]的 p. 172 的公式[1)]

1) 已将原书的印刷错误改了过来.

$$\cosh\theta_r = cc' - \cos\left(\frac{\pi r}{n}\right)ss'$$

中去，得

$$\cosh\theta_r = \cosh(2\beta - 2\beta') + 1 - \cos\left(\frac{\pi r}{n}\right) \tag{5}$$

显然此式右边总大于或等于 1.

当 $r \neq 0$ 或 $\beta \neq \beta'$ 时，(5)式右边大于 1，于是(5)式有两个不同的实根 $\pm\theta_r$，对应不同的本征值 $e^{\pm\theta_r}$. 当然，对某些不同的 r，有可能使 $\cos\frac{\pi r}{n}$ 相同而给出相同的 θ_r；此时从 p. 170，ϕ 的表示式

$$\phi = \begin{bmatrix} \lambda\xi \\ \lambda^2\xi \\ \vdots \end{bmatrix}$$

可见，它们对应的本征态都不同，故每一个 r 总对应两个初等因子

$$(\lambda - e^{+\theta_r}) \quad 和 \quad (\lambda - e^{-\theta_r})$$

当

$$r = 0 \quad 且 \quad \beta = \beta'$$

时，方程(5)只给出一个根 $\theta_0 = 0$，对应的本征值为1. 但此时，矩阵 Z_r（由 p.171 最后一行）为

$$Z_r = \begin{bmatrix} cc' - 1 & ics' - isc' \\ isc' - ics' & -1 + cc' \end{bmatrix}$$

（已利用 $ss' = 1$）. 此为厄米矩阵，故虽然本征值是重根，仍可解出二个无关的 ξ，从而对应二个无关的 ϕ，故贡献二个初等因子 $(\lambda - 1)$ 和 $(\lambda - 1)$. 由此已证明 $R_\pm$ 的 $2n$ 个初等因子都是一次的，且本征值系列由互为倒数的数对所组成. 这些符合本文定理 1 所要求的条件，故可应用定理 1 得出 $R_\pm$ 可区对角化.

笔者感谢崔香平教授和黄迎雷同志的有益建议.

参 考 文 献

[1] Л. К. Рашевский, 黎曼几何与张量解析，高等教育出版社，(1955).
[2] S. N. Prasad and G. Herrmann, Int. J. Solids Structures, 8., (1972) 29—39.
[3] 李政道，统计力学，北京师范大学出版社，(1984), 152—181.
[4] А. Н. Малецев, 线性代数基础，高等教育出版社(1957)新一版.
[5] 唐有祺，统计力学及其在物理化学中的应用，科学出版社(1974).

THE PROBLEM OF BLOCK DIAGONALIZATION OF A COMPLEX ORTHOGONAL MATRIX AND ITS APPLICATION TO ISING MODEL PHASE TRANSITION

Zhu Ruzeng　Sun Zhiwei

(Institute of Mechanics, Academia, Sinica, Beijing)

Jie Caoxian

(Lanzhou University)

Abstract The sufficient and necessary conditions for orthogonal similitude of a $(2n\times 2n)$ complex orthogonal matrix to a direct sum of several (2×2) ones is given. As a practical example, its application to the phase transition of 2-dimensions Ising model is discussed.

Key words complex orthogonal matrix, phase transition