

## 二流体系统中界面孤立波的分裂\*

朱 勇 戴世强

(上海工业大学、上海应用数学和力学研究所)

**摘要** 本文讨论了二流体系统界面上内孤立波的分裂。发现上下层流体密度比对分裂成两个内孤立波的条件没有影响,此时只要孤立波从较深的流体运动到较浅的流体就会发生分裂,但分裂成二个以上孤立波的条件受密度比和上游上下层流体厚度比的影响。

**关键词** 分层流体, 孤立波, 分裂

### 一、引 言

在海洋中因温度和盐度随深度而变化,海水密度随深度是变化的。在这种分层流体中存在着小尺度运动的内波。它是联系大中尺度和细微尺度海洋运动体系不可缺少的一环。它对于海洋环境探测、水下导航、潜艇活动、反潜战争、海洋石油开发和水产资源开发分析起着关键性的作用。因此近年来人们对内波的产生、演化和消衰机理的研究很重视<sup>[1-3]</sup>。

一个孤立波从一个常深度流体传播到另一个较小的常深度时,会分裂成几个不同大小的孤立波加上一个振动的尾波。这种孤立波的分裂(Fission of Solitary Wave)现象首先由 Madsen 和 Mei<sup>[4]</sup> 在 1969 年通过数值计算发现。他们同时给出了实验验证结果。后来 Tappert 和 Zabusky, Johnson 及 Ono 先后独立地给出了解的证明和推广,得到了陆架地区水深和分裂后孤立波个数之间的关系(参看文献[5])。周显初<sup>[6,7]</sup> 把他们的结果推广到任意截面渠道,而且研究了流动对孤立波分裂的影响。但以上研究限于对单层流体表面孤立波。对内孤立波分裂的研究还很少见:最近周显初<sup>[8]</sup> 对弱分层流体中内孤立波的分裂作了讨论。考虑到有些海域中,如我国大部分近海水域,海水分层近似为强分层,而且海洋表面可认为固定<sup>[9]</sup>,因此本文讨论两流体界面孤立波的分裂所采用的模型是两层不可溶混不可压无粘流体,它们限制在两固壁间作无旋流动,其中上壁水平,而下壁沿流动方向有缓慢变化段。我们利用文[10]中建立的基本方程,导出了该模型下波运动的控制方程,分析内孤立波的分裂。

### 二、控制方程的导出

考虑图 1 所示的模型,两层不可溶混的不可压无粘流体限制在两固壁间作无旋流动,其中上壁水平,下壁在  $x_0, x_1$  段及  $x_2, x_3$  段保持平直,且  $x_2, x_3$  段足够长,  $x_1, x_2$  段沿  $x$  向缓慢变

本文于 1988 年 1 月 30 日收到, 1988 年 10 月 18 日收到修改稿。

\* 国家自然科学基金资助的课题。

化, 设分界面方程为  $z = \zeta(x, t)$  取特征长度为上层流体厚度  $h_2$ , 特征速度为  $\sqrt{gh_2}$ , 特征时间为  $\sqrt{h_2/g}$ , 引入小参数  $\varepsilon = O(a/h_2)$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $a$  为波幅, 记深度比为  $r = h_1/h_2$ , 而且

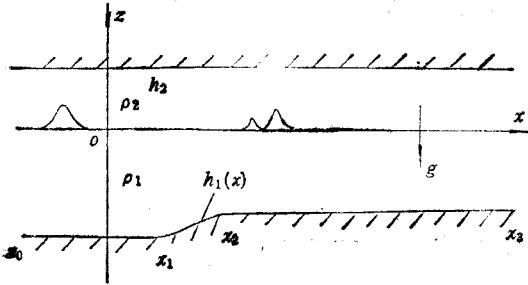


图 1

$$r = \begin{cases} r_1 & \text{在 } x_0x_1 \text{ 段} \\ F(\varepsilon^{3/2}x) & \text{在 } x_1x_2 \text{ 段} \\ r_E & \text{在 } x_2x_3 \text{ 段} \end{cases} \quad (2.1)$$

忽略表面张力的影响, 假定两层流体密度比满足  $\sigma = \rho_2/\rho_1 < 1$ , 即该系统是静稳定的,  $W_2, W_1$  分别为上、下层流体沿固壁的速度, 则有如下基本方程组<sup>[10,11]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left\{ W_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [n(z+r)^{n-1} r_x \Phi_n + (z+r)^n \Phi_{n,x}] \right\} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} n(z+r)^{n-1} \Phi_n = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left[ W_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n \Psi_{n,x} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} n(z-1)^{n-1} \Psi_n = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial t} + \Sigma_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta + \frac{1}{2} W_1^2 + \frac{1}{2} \Sigma_2 \right) - \sigma \left[ \frac{\partial W_2}{\partial t} + \Sigma_3 \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta + \frac{1}{2} W_2^2 + \frac{1}{2} \Sigma_4 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中

$$\Sigma_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n(z+r)^{n-1} r_x \Phi_n + (z+r)^n \Phi_{n,x} \right]$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n(z+r)^{n-1} r_x \Phi_n + (z+r)^n \Phi_{n,x} \right]^2 + 2W_1 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n(z+r)^{n-1} r_x \Phi_n \right. \\ \left. + (z+r)^n \Phi_{n,x} \right] + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n(z+r)^{n-1} \Phi_n \right]^2 \end{aligned}$$

$$\Sigma_3 = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (z-1)^n \Psi_{n,x} \right]$$

$$\begin{aligned} \Sigma_4 = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (z-1)^n \Psi_{n,x} \right]^2 + 2W_2 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (z-1)^n \Psi_{n,x} \right] \\ + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n(z-1)^{n-1} \Psi_n \right]^2 \end{aligned}$$

这里  $\Psi_0, \Phi_0$  分别为上、下固壁处的速度势函数。

假定  $U_r = a\lambda^2/h_2 = O(1)$ , 其中  $\lambda$  为波长, 利用 Boussinesq 浅水波假定, 作变换

$$\xi = \varepsilon^{1/2} \left( \int \frac{dx}{c(x)} - t \right), \quad X = \varepsilon^{3/2} x \quad (2.5)$$

其中

$$c(x) = \sqrt{\frac{(1-\sigma)r}{1+\sigma r}} \quad (2.6)$$

令列向量

$$U(\xi, X) = (\zeta, W_1, W_2)^T \quad (2.7)$$

将  $U$  按  $\varepsilon$  的幂次展开

$$U = \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \dots \\ = \varepsilon (\zeta^{(1)}, W_1^{(1)}, W_2^{(1)})^T + \varepsilon^2 (\zeta^{(2)}, W_1^{(2)}, W_2^{(2)})^T + \dots \quad (2.8)$$

将(2.5)、(2.8)式代入(2.2)–(2.4)式, 整理后取到  $\varepsilon^{3/2}$  量级, 得到

$$M_0 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.9)$$

其中

$$M_0 = \begin{pmatrix} -c & 0 & -1 \\ -c & r & 0 \\ 1-\sigma & -c & \sigma c \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$M_0$  的左、右本征矢  $L$ 、 $R$  为

$$L = (1, 1/r\sigma, 1/\sigma c) \quad (2.11)$$

$$R = (1, c/r, -c)^T \quad (2.12)$$

利用在无穷远处流体静止的条件可求得(2.9)式的解为

$$U^{(1)} = \zeta^{(1)}(\xi, X) R \quad (2.13)$$

取到  $\varepsilon^{5/2}$  的量级, 并利用(2.12)、(2.13)式, 我们得到

$$S_1 \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial X} + S_2 \zeta^{(1)} \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \xi} + S_3 \frac{\partial^3 \zeta^{(1)}}{\partial \xi^3} + S_4 \zeta^{(1)} + \frac{M_0}{c} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.14)$$

其中

$$S_1 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 1-\sigma \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{2}{r} \\ c \left( \frac{1}{r^2} - \sigma \right) \end{pmatrix} \\ S_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6c^2} \\ -\frac{r^2}{6c^2} \\ \frac{r+\sigma}{2c} \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial X} \\ r \frac{\partial(c/r)}{\partial X} + \frac{\beta c}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中, 在  $x_0 x_1$  段和  $x_2 x_3$  段  $\beta = 0$ , 在  $x_1 x_2$  段  $\beta = F'(X)$ ,  $F'(X)$  为  $F$  对  $X$  的导数。用左本征矢  $L$  左乘上式, 整理后可得

$$\zeta_X^{(1)} + \alpha_1 \zeta^{(1)} \zeta_\xi^{(1)} + \alpha_2 \zeta_{\xi\xi}^{(1)} + \alpha_3 \zeta^{(1)} = 0 \quad (2.15)$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{3c(1-r^2\sigma)}{2r^2(1-\sigma)}$$

$$\alpha_2 = \frac{r+\sigma}{6c(1-\sigma)}$$

$$\alpha_3 = \frac{c \left[ r^2\sigma \frac{\partial c}{\partial X} + r^2 \frac{\partial(c/r)}{\partial X} + \beta c \right]}{2r^2(1-\sigma)}$$

作变换  $\zeta^{(1)} = Q/\sqrt{c}$  (2.16)

(2.15)式可化为

$$Q_X + n_1(X)QQ_\xi + n_2(X)Q_{\xi\xi} = 0 \quad (2.17)$$

其中

$$n_1 = \alpha_1/\sqrt{c} \quad n_2 = \alpha_2 \quad (2.18)$$

作变换

$$Q = -\frac{6n_2}{n_1} G \quad \eta = \xi$$

$$\tau = \int_{x_1}^{x_2} n_2 dX \quad (2.19)$$

(2.17)式可化为

$$G_\tau - 6GG_\eta + G_{\eta\eta} + \frac{1}{n_2} \left( \ln \frac{n_2}{n_1} \right)_X G = 0 \quad (2.20)$$

在  $x_0x_1$  段和  $x_2x_3$  段, 系数  $n_1, n_2$  为常数, 上式左端最后一项为零, 方程变为常系数  $KdV$  方程; 在  $x_1x_2$  段, 由于  $n_1, n_2$  是  $X$  的函数, 所以此项不等于零, 它表示变深度的影响。

### 三、内孤立波的分裂

关于  $\eta$  从  $-\infty$  到  $+\infty$  积分式(2.20), 并利用无穷远处条件, 再对  $\tau$  积分可得

$$\frac{[n_2(X)/n_1(X)]}{[n_2(X_1)/n_1(X_1)]} \int_{-\infty}^{+\infty} G d\eta = \text{Const.} \quad (3.1)$$

以  $G$  乘以(2.20)式, 先对  $\eta$  积分, 再对  $\tau$  积分可得

$$\left\{ \frac{[n_2(X)/n_1(X)]}{[n_2(X_1)/n_1(X_1)]} \right\}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G^2 d\eta = \text{Const.} \quad (3.2)$$

设有一孤立波

$$G = -a_1 \text{Sech}^2 b_1 \eta \quad (3.3)$$

在常深度  $x_0x_1$  段中自左向右行进, 经过变深度段  $x_1x_2$  后波形变为

$$G = -a_2 \text{Sech}^2 b_2 \eta \quad (3.4)$$

这不再是通常意义上的孤立波了, 利用(3.1)、(3.2)式可以求得

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= b_1 \\ a_2 &= a_1 [n_1(x_2)/n_2(x_2)] \cdot [n_2(x_1)/n_1(x_1)] \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

将(3.4)式所描述的波作为常深度  $x_2x_3$  段的初始脉冲, 而  $x_2x_3$  段波的演化遵循

$$G_x - 6GG_\eta + G_{\eta\eta\eta} = 0 \quad (3.6)$$

相应的初值为

$$G(\eta, 0) = a_1 \frac{n_1(x_2)n_2(x_1)}{n_2(x_2)n_1(x_1)} \operatorname{Sech}^2 b_1 \eta \quad (3.7)$$

按照反演散射方法, (3.6)、(3.7)式的特征方程为

$$\mathcal{A}_{\eta\eta} + (\lambda + a_2 \operatorname{Sech}^2 b_2 \eta) \mathcal{A} = 0 \quad (3.8)$$

作变换  $Y = \operatorname{th} b_2 \eta$ , (3.6)式化为连带的 Legendre 方程, 再作变换

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} &= (1-y^2)^{s/2} \omega(x) \\ u &= \frac{1}{2}(1-y) \\ E &= \sqrt{-\lambda/b_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

可化成超几何方程

$$u(1-u)\omega'' + (E+1)(1-2u)\omega' - (E-s)(E+s+1)\omega = 0 \quad (3.10)$$

根据解的有界性可确定

$$\lambda = -(s-n)^2 b_2^2 \quad n = 0, 1, \dots, [s] \quad (3.11)$$

其中  $s$  由下式确定

$$a_2/b_2^2 = s(s+1) = 2 \frac{n_1(X_2)n_2(X_1)}{n_2(X_2)n_1(X_1)} \quad (3.12)$$

因此方程有  $[s] + 1$  个负的离散特征值, 即 (3.7) 式表示的初始波形发展成为  $N$  个孤立波加一个残余波列, 孤立波个数  $N$  满足

$$\frac{N(N-1)}{2} < \frac{n_2(X_1)n_1(X_2)}{n_1(X_1)n_2(X_2)} < \frac{N(N+1)}{2} \quad (3.13)$$

$$\text{设} \quad \frac{n_2(X_1)n_1(X_2)}{n_1(X_1)n_2(X_2)} > k \quad (3.14)$$

即

$$\frac{1 - r_E^2 \sigma}{r_E^2 (r_E + \sigma)} \left( \frac{r_E}{1 + r_E \sigma} \right)^{3/4} / \frac{1 - r_1^2 \sigma}{r_1^2 (r_1 + \sigma)} \left( \frac{r_1}{1 + r_1 \sigma} \right)^{3/4} > k \quad (3.15)$$

当  $k = 1$  时 孤立波数  $N \geq 2$

$k = 3$  时 孤立波数  $N \geq 3$

...

$k = \frac{p(p-1)}{2}$  时 孤立波数  $N \geq p$

(3.15) 式可进一步写成

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{12} a_n r_E^n < 0 & \quad \text{当 } r_1 < \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \text{ 时} \\ \sum_{n=0}^{12} a_n r_E^n > 0 & \quad \text{当 } r_1 > \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

其中

$$a_0 = -1/f,$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 4\sigma/f,$$

$$a_4 = -6\sigma^2/f,$$

$$a_6 = 4\sigma^3 + 3\sigma^5 + 4\sigma^7/f,$$

$$a_8 = 4\sigma + 18\sigma^3 + 12\sigma^5 + \sigma^7 - \sigma^9/f, \quad a_3 = 1 + 12\sigma^2 + 18\sigma^4 + 4\sigma^6$$

$$a_{10} = 3\sigma + 12\sigma^3 + 6\sigma^5,$$

$$a_{11} = 3\sigma^2 + 4\sigma^4$$

$$a_{12} = \sigma^3,$$

$$f = \left[ \frac{1 - r_1^2 \sigma}{(\sigma + r_1) r_1^2} \left( \frac{r_1}{1 + \sigma r_1} \right)^{3N} k \right]^4.$$

当  $\sigma = 0$  时, 对应于单层流体情形, (3.13) 式化成

$$\frac{N(N-1)}{2} < \left( \frac{r_1}{r_E} \right)^{3N} < \frac{N(N+1)}{2} \quad (3.17)$$

取  $r_1 = 1$ , 它与文献[6]的结果一致.

#### 四、结果和讨论

取  $r_1 = 0.5, 1, 2$ ,  $\sigma = 0 \sim 0.98$ ,  $k = 1, 3, 6, 10$  (对应于分裂成  $N \geq 2, N \geq 3, N \geq 4, N \geq 5$  个孤立波), 通过数值求解(3.16)式, 其结果示于图2—4中. 图中曲线

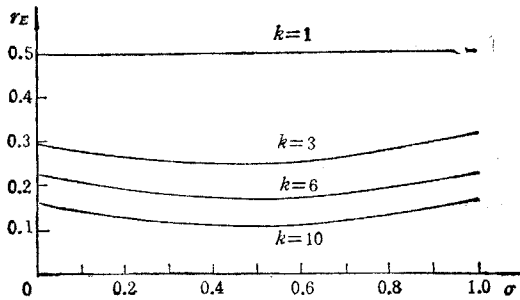


图2 ( $r_1 = 0.5$ )

$k=1$  以下区域为分裂成二个; 二个以上孤立波,  $k=3$  曲线以下的区域为分裂成三个; 三个以上孤立波区,  $k=6$  曲线以下的区域为分裂成四个; 四个以上孤立波区, 余类推.

从这三个图中看到, 只要满足  $r_E < r_1$  的条件, 孤立波就会分裂, 它与密度比  $\sigma$  无关系, 它所要求的条件与单层流体的情形相同; 但是分裂成三个和三个

以上孤立波的条件受密度比  $\sigma$  和  $x_0 x_1$  段深度比  $r_1$  的影响, 从图2看到  $r_1 = 0.5$  时  $r_E \sim \sigma$  变化曲线先减后增, 而图3 ( $r_1 = 1$ ) 的  $r_E \sim \sigma$  变化曲线是单增的, 图4 ( $r_1 = 2$ ) 的  $r_E \sim \sigma$  变化曲线却是先增后减的, 因此密度比  $\sigma$  对分裂成三个和三个以上孤立波在不同的上游  $x_0 x_1$  段深度比  $r_1$  时具有不同的作用.

对于  $r_1 = 2$  的情况, 当  $\sigma > 0.25$  时  $r_1 > \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ , 即在  $x_0 x_1$  段孤立波是向

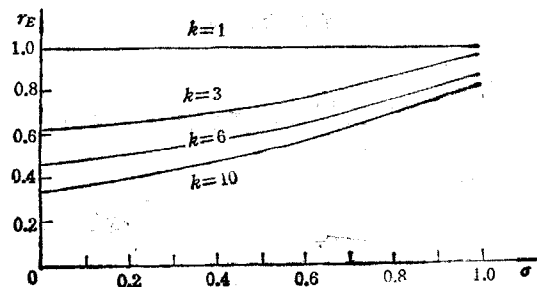
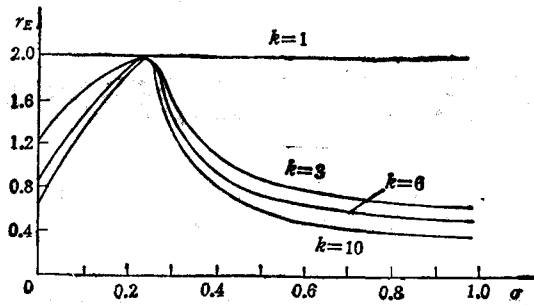


图3 ( $r_1 = 1$ )

下凹的<sup>〔1〕</sup>, 当达到  $x_2 x_3$  段起始位置时, 从图4知  $r_E < \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ , 即波形是向上凸的, 也就是

图 4 ( $r_1 = 2$ )

说只有这样变化的波形才有可能分裂成三个和三个以上的孤立波。

必须指出, 当  $r_1 \approx 1/\sqrt{\sigma}$  时出现临界情形, 本文的分析不再适用, 在文献[11]中曾讨论过这种临界情形的孤立波, 这里不予详述了。另外, 具有自由界面及流体运动时孤立波分裂的问题我们将另文讨论。

### 参 考 文 献

- [1] Yih C.-S., *Stratified Flow*, Academic Press, New York (1980).
- [2] Miles J.W., Solitary waves, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 12(1980), 11—43.
- [3] Garrett C., Munk W., Internal Waves in the Ocean, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 11(1979), 339—369.
- [4] Madsen O.S., Mei C.C., The transformation of a solitary wave over an uneven bottom, *J. Fluid Mech.*, 39(1969), 781—791.
- [5] 梅强中(戴世强、周显初整理), 水波动力学, 科学出版社(1984).
- [6] 周显初, 缓变任意截面渠道中的非线性周期波以及孤立波的分裂, 中国科学, A 辑 3(1983), 238—246.
- [7] 周显初, 流动对孤立波分裂的影响, 中国科学 A 辑, 2(1986), 171—181.
- [8] 周显初, 分层流体中孤立波的分裂, 中国科学 A 辑 10(1987), 1071—1080.
- [9] 束星北等, 用单站测量确定近海内潮波的方向和速度, 海洋学报, 7(1985), 665—673.
- [10] 朱勇, 戴世强, 缓变深度分层流体中的准周期波和准孤立波, 应用数学和力学, 3(1989).
- [11] 戴世强, 两层流体界面上的孤立波, 应用数学和力学, 3(1982), 721—731.

## FISSION OF INTERFACIAL SOLITARY WAVES IN A TWO-LAYER FLUID SYSTEM

Zhu Yong Dai Shiqiang

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics)

**Abstract** In this paper, the fission of interfacial solitary waves in a two-layer fluid system is investigated. It is found that the density ratio of the upper and lower fluids has no effect on the fission conditions of forming two solitary waves. It means that the fission may occur provided that solitary wave travels from deeper fluid to shallower fluid. But the fission conditions of forming more than two solitary waves are related to the density ratio and upstream depth ratio of the upper and lower fluids.

**Key words** Stratified Fluid, Solitary Waves, Fission.