第22卷 第1期 力 学 学 报 Vol. 22, No. 1
1990年1月 ACTA MECHANICA SINICA Jan., 1990

非局部弹性体中的反平面线力问题*

王 锐

（中国矿业学院北京研究生部）

提要 本文把经典弹性体中的线力问题推广到非局部弹性体中，得到非局部介质中反平面线力和它的应力场的解析表达式．应力场无经典的奇异性．非局部线力是高斯型分布不再是经典的 δ 函数．给出非局部线力满足的推广的线力定义．

关键词 非局部，线力，奇异性．

近十几年来，非局部场论的应用取得了许多进展[1-5]．但非局部介质中存在体力的问题尚罕见算例．点力沿直线均匀分布构成线力[6]．本文计算非局部介质中反平面线力问题．由计算结果讨论非局部介质中集中力的性质．

各向同性非局部线弹性固体静态场方程为

$$t_{Kl,K}+F_l=0, \tag{1}$$

$$t_{Kl}(\boldsymbol{x})=\int_v \alpha(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)\sigma_{Kl}(\boldsymbol{x}')dV(\boldsymbol{x}'), \tag{2}$$

$$\sigma_{Kl}(\boldsymbol{x}')=\lambda e_{rr}(\boldsymbol{x}')\delta_{Kl}+2\mu e_{Kl}(\boldsymbol{x}'), \tag{3}$$

$$e_{Kl}(\boldsymbol{x}')=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_K(\boldsymbol{x}')}{\partial x_l'}+\frac{\partial u_l(\boldsymbol{x}')}{\partial x_K'}\right]. \tag{4}$$

其中 t_{Kl}、F_l 是非局部应力张量和非局部体力，σ_{Kl}、e_{Kl}、u_K 是经典的应力、应变和位移场．$\alpha(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)$ 是一个随距离 $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|$ 衰减的连续函数．把(2)式代入(1)式得

$$\int_v \frac{\partial \alpha}{\partial x_K}\sigma_{Kl}dv+F_l=0. \tag{5}$$

使用

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_K}\sigma_{Kl}=-\frac{\partial(\alpha\sigma_{Kl})}{\partial x_K'}+\alpha\frac{\partial \sigma_{Kl}}{\partial x_K'}, \tag{6}$$

和 Green-Gauss 定理，(5)式给

$$-\oint_{\partial v}\alpha\sigma_{Kl}dS_K+\int_v \alpha\sigma_{Kl,K}dv+F_l=0, \tag{7}$$

∂v 表示体积 v 的表面．对无限大介质即忽略表面张力上式第一项等于零．使用经典的平衡条件

$$\sigma_{Kl,K}+f_l=0, \tag{8}$$

f_l 是经典的体力．方程(7)给

$$F_l=\int_v \alpha(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)f_l(\boldsymbol{x}')dv(\boldsymbol{x}'). \tag{9}$$

* 国家自然科学基金资助的课题．

本文于1987年10月5日收到．

这就是在相同位移场下经典的体力和非局部体力的关系. 非局部应力由 (2) 式决定. Eringen 给出的一个函数 α 的形式是[1]

$$\alpha(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)=\pi^{-3/2}\left(\frac{K}{a}\right)^3\exp[-K^2|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^2/a^2], \tag{10}$$

其中K是一个常数，a是材料内部特征长度(如原子间距). 函数 α 刻划非局部效应，并有性质

$$\int_v \alpha(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)dv(\boldsymbol{x}')=1. \tag{11}$$

如果 $a\to 0$, 则 $\alpha\to\delta(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)$ (Dirac delta 函数)，方程(10)，(2)和(1)返回到经典的情况.

在直角坐标系，沿 z 轴分布，每单位长度上强度为 f_z 的线力的应力场为

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(r',\theta')&=-\frac{f_z}{2\pi r'}\cos\theta',\\ \sigma_{yz}(r',\theta')&=-\frac{f_z}{2\pi r'}\sin\theta'.\end{aligned} \tag{12}$$

把上式代入(2)式，经一些三角函数变换和使用

$$|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|=[r'^2+r^2-2rr'\cos(\theta'-\theta)+(z'-z)^2]^{1/2}, \tag{13}$$

得到

$$\begin{aligned}t_{xz}=&-\frac{f_z}{2}\pi^{-5/2}\left(\frac{K}{a}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-(K/a)^2\cdot(z'-z)^2]dz'\\ &\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\exp\{-(K/a)^2[r'^2+r^2-2rr'\cos(\theta'-\theta)]\}\\ &\cdot[\cos(\theta'-\theta)\cos\theta-\sin(\theta'-\theta)\sin\theta]dr'd\theta',\\ t_{yz}=&-\frac{f_z}{2}\pi^{-5/2}\left(\frac{K}{a}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-(K/a)^2(z'-z)^2]dz'\\ &\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\exp\{-(K/a)^2[r'^2+r^2-2rr'\cos(\theta'-\theta)]\}\\ &\cdot[\sin(\theta'-\theta)\cos\theta+\cos(\theta'-\theta)\sin\theta]dr'd\theta'.\end{aligned} \tag{14}$$

利用文献[7]中(3.937.1)，(3.937.2).(6.618.4)式，经计算得到线力的非局部应力场

$$\begin{aligned}t_{xz}&=-\frac{f_z}{2\pi r}(1-e^{-K^2r^2/a^2})\cos\theta,\\ t_{yz}&=-\frac{f_z}{2\pi r}(1-e^{-K^2r^2/a^2})\sin\theta.\end{aligned} \tag{15}$$

可以看到非局部应力场在 $r=0$ 是非奇异的. 如果 $a\to 0$, 应力场返回到经典的情况. 由(9)式非局部线力是

$$F_z=\int_v \alpha(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|)f_z\delta(x')\delta(y')dv(\boldsymbol{x}')=\frac{1}{\pi}\left(\frac{K}{a}\right)^2 f_z e^{-K^2r^2/a^2}. \tag{16}$$

这是高斯型函数，不再是 δ 函数. 可以验证(16)和(15)满足平衡方程(1). 这样我们就得到了非局部介质中的反平面线力源和它的应力场. 问题的位移场同经典的是相同的. 下面做讨论.

(1) 非局部线力是沿中心线的一种高斯型分布. 其单位长度上总强度与经典线力相等

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_z dxdy = f_z \tag{17}$$

它满足线力的定义在非局部介质中的推广

$$\oint_c (t_{xz}dy - t_{yz}dx) = -\iint_s F_z dxdy, \tag{18}$$

$$\oint_c (t_{xz}dx + t_{yz}dy) = 0,$$

其中 c 是面积 s 的围线.

(2) (9), (16), (18)和(1)式说明非局部线力是经典线力的一种推广. 与经典 δ 函数模型集中力对应的非局部集中力由于非局部效应一般不再有奇异性. 在非局部介质中满足应力边界条件的应力是 t_{Kl} 而不是 σ_{Kl}, 因此如果是在边界上给定集中力的边值问题,上述分析表明在非局部介质中用局部定义的 δ 函数模型来描述集中力已不再合适.例如,最近 Nowinski[8]用非局部理论解半空间边界受集中力线载荷, 采用 δ 函数形式的应力边界条件,得到的应力场仍有同经典结果一样的奇异性. 所以作者建议应采用非奇异的随离开作用点的距离迅速衰减的函数模型来描述非局部介质的集中力边界条件. 这样理论上才是合理的. 作者对 Nowinski 的解作了边界条件的修改后也已经得到了非奇异的应力场.

(3) 对非局部平面线力问题有与上述完全类似的结论. 具体结果近期将在 Acta Mechanica 上发表.

参 考 文 献

[1] Eringen, A. C., J. Phys. D. Appl. Phys., 10(1977), 671—674.
[2] Kovács, I., Vörös, G., Physica, 96B(1979), 111—115.
[3] 戴天民,力学进展,13,4(1983),432—445.
[4] Eringen, A. C., J. Appl. Phys. 54(1983), 4703—4710.
[5] 虞吉林,郑哲敏,力学学报,16,5(1984),485—494.
[6] Dundurs, J., J. Appl. Mech. 32(1965), 671—674.
[7] Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Table of integrals, series and products. Academic press, New York (1980).
[8] Nowinski, J. L., Acta Mechanica 58(1986), 59—66.

ANTIPLANE LINE FORCE IN NONLOCAL ELASTICITY

Wang Rui

(Beijing Graduate School, China Institute of Mining and Technology)

Abstract The classical line force problem is generalized to the case of nonlocal elasticity. The analytical expressions of both the antiplane line force and its stress field, have been obtained. None of the classical singularities exist in the stresses. Because of the nonlocal effect, the antiplane nonlocal line force has a Gaussian distribution quile different from the distribution of the classical line force and it satisfies the generalized line force definition.

Key Words nonlocal, line force, singularity.