

运动等离子体中的电阻撕裂模¹⁾

徐复 姚文秀

(中国科学院力学研究所)

摘要 对于非均匀流动等离子体,本文给出电阻撕裂模的解析解,及不稳定性增长率的表达式。结果表明,流速及非均匀性均使不稳定性增长率增大。此外,还给出了磁岛形状。

关键词 电阻撕裂模、电阻不稳定性、运动等离子体不稳定性。

等离子体中电阻不稳定性的研究始于 Furth, Killeen 和 Rosenbluth^[1]。近十年来,由于在 Tokamak 实验中发现了在中性束注入阶段,甚至在欧姆加热阶段都有等离子体的快速旋转现象,因此,有关旋转对等离子体不稳定性影响的研究,日益增多。在等离子体不稳定性中,电阻撕裂模与 Tokamak 的重要现象——破裂密切相关,有关旋转对电阻撕裂模的影响就显得更加重要^[2]。另外,在空间等离子体中,电阻对解释磁能转换为等离子体动能这一过程中各种现象,十分必要。近年来,也有不少人研究流动等离子体中电阻撕裂模,如文献[3]。

本文假定在未扰状态中,磁场方向与速度方向相同。另外还假定速度分布呈抛物型。结果将给出速度大小与分布的不均匀性对于不稳定性增加率的影响,还将给出磁岛的形状。

一、基本方程

若

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla\psi \times \hat{z} + B_z \cdot \hat{z} \\ \mathbf{u} &= \nabla\varphi \times \hat{z} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial\psi}{\partial y} & B_z &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ u &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} & v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{aligned}$$

则基本方程为^[4]

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\psi = \gamma \nabla^2\psi, \\ \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \right] \cdot \nabla^2\varphi = -\hat{z} [\nabla\psi \times \nabla(\nabla^2\psi)]. \end{cases}$$

1) 本文为国家自然科学基金资助项目。本文于1989年1月26日来稿。

设

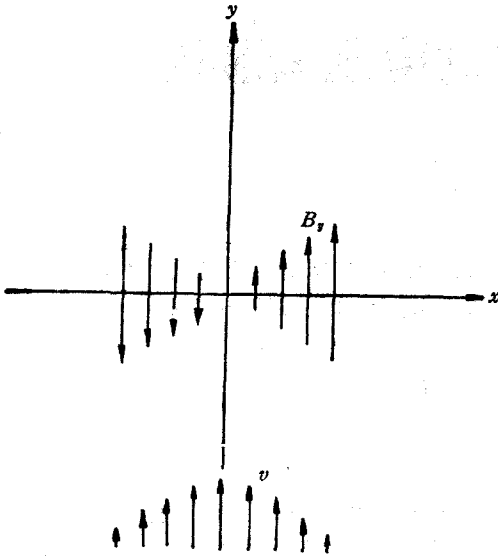


图 1 物理模型

$$\phi(t, x, y) = \phi_0(x) + e^{i\omega t} \cdot \phi_1(x, y)$$

$$\varphi(t, x, y) = \varphi_0(x) + e^{i\omega t} \cdot \varphi_1(x, y)$$

而未扰态为

$$\phi = \phi_0(x); B_x = 0,$$

$$B_y = -\phi_0'(x) = B_0 \cdot F(x)$$

$$\varphi = \varphi_0(x); u = 0,$$

$$v = -\varphi_0'(x) = v_0(1 - \mu x^2)$$

以后取

$$F(x) = \tanh x.$$

另外

$$\phi_1(x, y) = P(x) \cdot \cos ky + Q(x) \sin ky$$

$$\varphi_1(x, y) = N(x) \cos ky + M(x) \sin ky.$$

将 $\phi_0, \phi_1, \varphi_0, \varphi_1$ 代入基本方程, 进行线性化, 并令 $\cos ky, \sin ky$ 的系数相等, 就

可得到含 P, Q, M, N 在内的四个常微分方程.

下面进行无量纲化, 若

$$-L \leq x \leq L$$

令

$$\bar{x} = x/L, \bar{y} = y/L, \bar{K} = KL$$

$$\tau_A = \frac{\sqrt{\rho}}{KB_0}, \tau_R = \frac{L^2}{\eta}, \quad s = \frac{\tau_R}{\tau_A}$$

$$H = \frac{v_0 \cdot \sqrt{\rho}}{B_0}$$

及

$$(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{\phi}, \bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) = \frac{1}{LB_0} (P, Q, \phi, \phi_0, \phi_1)$$

$$(\bar{M}, \bar{N}, \bar{\varphi}, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1) = \frac{K}{L\gamma} (M, N, \varphi, \varphi_0, \varphi_1)$$

其中, 字母上带一横的, 如 \bar{P} , 是无量纲量, 不带横的, 是有量纲量, 但 H 是无量纲的, τ_A , τ_R 和 τ 是有量纲的.

去掉无量纲量上面的横, 就得到以下一组常微分方程:

$$P - \tanh x \cdot M + \frac{H}{\gamma\tau_A} (1 - \mu x^2) Q = \frac{1}{\gamma\tau_R} (P'' - K^2 P)$$

$$Q + \tanh x \cdot N - \frac{H}{\gamma\tau_A} (1 - \mu x^2) P = \frac{1}{\gamma\tau_R} (Q'' - K^2 Q)$$

$$\begin{aligned} & \tau^2 \tau_A^2 (M'' - K^2 M) - H \cdot \gamma \tau_A (1 - \mu x^2) (N'' - K^2 N) - 2\mu \cdot H \cdot \gamma \tau_A \cdot N \\ & = (\tanh x)'' \cdot P - \tanh x \cdot (P'' - K^2 P) \end{aligned}$$

$$\gamma^2 \tau_A^2 (N'' - K^2 N) + H \gamma \tau_A (1 - \mu x^2) (M'' - K^2 M) + 2\mu H \cdot \gamma \tau_A \cdot M \\ = -(\tanh x)'' \cdot Q + \tanh x \cdot (Q'' - K^2 Q)$$

其中 P, Q 为偶函数, M, N 为奇函数. 而无量纲的未扰磁场和速度分布是

$$B_z(x) = F(x) = \tanh x \\ v_0(x) = \frac{H}{\gamma \tau_A} (1 - \mu x^2)$$

我们将自变量的变化范围 $0 \leq x \leq 1$, 分为两个区, 即

$$\text{内区: } 0 \leq x < x_T$$

$$\text{外区: } x_T \leq x \leq 1$$

其中

$$x_T \ll 1.$$

二、外区的解

设 $\gamma \tau_A \ll 1$, $\gamma \tau_R \gg 1$, 则外区的方程近似为

$$P(x) - \tanh x \cdot M(x) + \frac{H}{\gamma \tau_A} (1 - \mu x^2) Q(x) = 0$$

$$Q(x) + \tanh x \cdot N(x) - \frac{H}{\gamma \tau_A} (1 - \mu x^2) \cdot P(x) = 0$$

$$\tanh x \cdot [P''(x) - K^2 P(x)] = (\tanh x)'' \cdot P(x)$$

$$\tanh x \cdot [Q''(x) - K^2 Q(x)] = (\tanh x)'' \cdot Q(x).$$

先解后两方程, 得:

$$P(x) = P_0 \cdot e^{\mp kx} \times \left[1 \pm \frac{1}{K} \tanh x \right], \text{ 上面符号 } x > 0$$

$$Q(x) = Q_0 \cdot e^{\mp kx} \times \left[1 \pm \frac{1}{K} \tanh x \right], \text{ 下面符号 } x < 0.$$

前两方程给出 $M(x), N(x)$. 现将 P, Q, M, N 外推到 $x = 0$ 附近, 并设

$$P(x) = P_0(1 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + P_4 x^4 + \dots)$$

$$Q(x) = Q_0(1 + Q_1 x + Q_2 x^2 + Q_3 x^3 + Q_4 x^4 + \dots)$$

$$M(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + M_3 x^3 + M_4 x^4 + \dots$$

$$N(x) = N_0 + N_1 x + N_2 x^2 + N_3 x^3 + N_4 x^4 + \dots$$

则可求出

$$P_1 - Q_1 = \frac{1}{k} - k, \quad P_2 - Q_2 = \frac{k^2}{2} - 1$$

$$P_3 - Q_3 = -\frac{k^3}{6} + \frac{k}{2} - \frac{1}{3k}, \quad P_4 - Q_4 = \frac{k^4}{24} - \frac{k^2}{6} + \frac{1}{3}$$

$$M_0 = \left(\frac{1}{k} - k \right) \times P_0 + \frac{H}{\gamma \tau_A} \left(\frac{1}{k} - k \right) \times Q_0$$

$$M_1 = \left(\frac{k^2}{2} - 1 \right) \times P_0 + \frac{H}{\gamma \tau_A} \times \left(\frac{k^2}{2} - 1 - \mu \right) \times Q_0$$

$$\begin{aligned}
 M_2 &= \left(-\frac{k^3}{6} + \frac{k}{6}\right) \times P_0 + \frac{H}{\gamma\tau_A} \times \left[-\frac{k^3}{6} + \frac{k}{6} - \mu \left(\frac{1}{k} - k\right)\right] \times Q_0 \\
 M_3 &= \frac{k^4}{24} \times P_0 + \frac{H}{\gamma\tau_A} \left[\frac{k^4}{24} - \mu \left(\frac{k^2}{2} - \frac{2}{3}\right)\right] \times Q_0 \\
 N_0 &= \frac{H}{\gamma\tau_A} \left(\frac{1}{k} - k\right) \times P_0 - \left(\frac{1}{k} - k\right) \times Q_0 \\
 N_1 &= \frac{H}{\gamma\tau_A} \left(\frac{k^2}{2} - 1 - \mu\right) \times P_0 - \left(\frac{k^2}{2} - 1\right) \times Q_0 \\
 N_2 &= \frac{H}{\gamma\tau_A} \left[-\frac{k^3}{6} + \frac{k}{6} - \mu \left(\frac{k^2}{2} - 1\right)\right] \times P_0 - \left(-\frac{k^3}{6} + \frac{k}{6}\right) \times Q_0 \\
 N_3 &= \frac{H}{\gamma\tau_A} \left[\frac{k^4}{24} - \mu \left(\frac{k^2}{2} - \frac{2}{3}\right)\right] \times P_0 - \frac{k^4}{24} \times Q_0.
 \end{aligned}$$

注意, $k < 1$.

三、内区的解

设 $\gamma\tau_A \ll 1$, $\gamma\tau_R \gg 1$, 则内区的方程近似为

$$\begin{aligned}
 \left(P_0 + \frac{H}{\gamma\tau_A} Q_0\right) - x \cdot m(x) &= \frac{1}{\gamma\tau_R} p''(x) \\
 \left(Q_0 - \frac{H}{\gamma\tau_A} P_0\right) + x \cdot n(x) &= \frac{1}{\gamma\tau_R} q''(x) \\
 \gamma^2\tau_A^2 m''(x) - H\gamma\tau_A(1 - \mu x^2) \cdot n''(x) - 2\mu H\gamma\tau_A \cdot n(x) &= -x \cdot p''(x) \\
 \gamma^2\tau_A^2 \cdot n''(x) + H \cdot \gamma\tau_A(1 - \mu x^2) \cdot m''(x) + 2\mu H\gamma\tau_A \cdot m(x) &= x \cdot q''(x).
 \end{aligned}$$

设 $p(x)$, $q(x)$, $m(x)$, $n(x)$ 在 $-x_T \leq x \leq x_T$ 内是有若干次连续微商的, 可展开为

$$\begin{aligned}
 p(x) &= P_0(1 + p_2 \cdot x^2 + p_4 x^4 + \dots) \\
 q(x) &= Q_0(1 + q_2 x^2 + q_4 x^4 + \dots) \\
 m(x) &= m_1 x + m_3 x^3 + \dots \\
 n(x) &= n_1 x + n_3 \cdot x^3 + \dots
 \end{aligned}$$

则从方程可求出系数之间的关系:

$$\begin{aligned}
 P_0 p_2 &= \frac{1}{2} \gamma\tau_R \left(P_0 + \frac{H}{\gamma\tau_A} Q_0\right) \\
 Q_0 q_2 &= \frac{1}{2} \gamma\tau_R \left(Q_0 - \frac{H}{\gamma\tau_A} P_0\right) \\
 m_1 &= -\frac{2}{\gamma\tau_R} P_0 p_1 \\
 n_1 &= \frac{2}{\gamma\tau_R} Q_0 q_1
 \end{aligned}$$

$$6\gamma^2\tau_A^2 m_3 - 6H\gamma\tau_A \cdot n_3 - 2\mu H\gamma\tau_A \times n_1 = -\gamma\tau_R \left(P_0 + \frac{H}{\gamma\tau_A} Q_0 \right)$$

$$6\gamma^2\tau_A^2 \cdot n_3 + 6H\gamma\tau_A m_3 + 2\mu H\gamma\tau_A \times m_1 = \gamma\tau_R \left(Q_0 - \frac{H}{\gamma\tau_A} P_0 \right)$$

四、色散关系及不稳定性增长率 γ

外区的解含有两个任意常数,内区的解含有四个任意常数,我们用以下一组条件来推导色散方程。即

$$(1) P_0 = P_i, Q_0 = Q_i$$

$$(2) N_1 = n_1, M_1 = m_1$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m''(x)}{x} dx = 2M_1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n''(x)}{x} dx = 2N_1$$

利用前面已给出的一些关系,并消去扰动振幅之后,可得色散方程的两个解:

$$\gamma\tau_R \cdot x_T - \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) \gamma^2\tau_A^2 + \left(1 - \frac{k^2}{2} + \mu\right) \cdot H^2 = 0$$

及

$$\gamma\tau_R \cdot x_T - \left[2 \times \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) + \mu\right] \cdot \gamma^2\tau_A^2.$$

其中第二个解由于不含速度,以后我们将不再考虑。现在我们讨论两种情况:

1. $H=0$, 无流动情况

色散关系简化为:

$$\gamma\tau_R \cdot x_T = \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) \cdot \gamma^2\tau_A^2 \quad (k < 1)$$

如令

$$x_T = \alpha \cdot (\gamma^2\tau_A^2)^{\frac{5}{8}} \cdot (\gamma\tau_R)^{-\frac{1}{2}}$$

其中 α 是常数,可见 $x_T \ll 1$ 。代入色散方程之后,得到

$$\begin{aligned} \gamma^2\tau_A^2 &= \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\right]^{\frac{8}{5}} \times \left(\frac{\tau_R}{\tau_A}\right)^{-\frac{6}{5}} \\ &= \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\right]^{\frac{8}{5}} \times S^{-\frac{6}{5}} \end{aligned}$$

另一种表达式是

$$\gamma = \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\right]^{\frac{4}{5}} \times \tau_A^{\frac{1}{5}} \times \tau_R^{\frac{3}{5}}$$

则和经典的结果基本相同^[1,4]。

2. $H \neq 0$, 存在非均匀流动

令

$$x_T = (\gamma^2 \tau_A^2)^{\frac{1}{2}} (\gamma \tau_R)^{-\frac{1}{2}} \times \beta$$

其中 β 为常数, 仍有 $x_T \ll 1$. 代入后可得

$$\gamma \tau_A = \frac{\beta \cdot S^{-\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\beta^2 \cdot S^{-\frac{1}{2}} + 4 \cdot \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{2} + \mu\right) \cdot H^2}}{2 \times \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)}$$

两根中, 一个是 γ 为负, 即扰动振幅衰减, 代表稳定; 另一个是 γ 为正, 即扰动振幅随时间作指数增长, 代表不稳定.

从不稳定性增长率的表达式可以看出: H 的增大, 即流速的增大; 速度分布不均匀性的增大, 即 μ 的增大, 都使 γ 增加, 即起失稳的作用.

五、磁岛的形状

下面, 我们在均匀流动的假定下, 利用前面求出的外区的解, 来计算磁岛的形状. 首先来计算带有两个分岔点的磁岛 $\psi = \psi_i$ 的形状. 设

$$\psi(t, x, y) = -B_0 \log \cosh x + e^{\gamma t} \cdot [P_i(x) \cos ky + Q(x) \sin ky]$$

其中

$$P_i(x) = P_0 \times P(x)$$

$$Q(x) = Q_0 \cdot P(x)$$

而

$$P(x) = e^{-kx} \cdot \left[1 + \frac{1}{k} \tanh x\right], \quad x > 0, \quad k < 1.$$

令

$$e^{\gamma t} = c(t),$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \psi(t, x, y) = & -B_0 \log \cosh x + c(t) \cdot e^{-kx} \cdot \left[1 + \frac{1}{k} \tanh x\right] \\ & \times [P_0 \cos ky + Q_0 \sin ky] \end{aligned}$$

我们让具有两个分岔点的磁岛为

$$\psi = \psi_s,$$

并且通过两点,

$$x = 0, \quad ky_0 = \pi \quad \text{和} \quad x = 1, \quad ky = 0$$

就有

$$\begin{aligned} \psi_s = & -P_0 \cdot c(t) \\ B_0 = & P_0 \cdot c(t) \cdot \xi(k) \end{aligned}$$

而

$$\xi(k) = \frac{1 + e^{-k} \cdot \left(1 + \frac{1}{k} \tanh 1\right)}{\log \cosh 1}.$$

于是,磁岛方程为

$$\cos ky + \frac{Q_0}{P_0} \sin ky = F(x; k)$$

而

$$F(x; k) = \frac{[\xi(k) \log \cosh x - 1] \times e^{kx}}{1 + \frac{1}{k} \tanh x}$$

为计算磁岛形状,并与无流动时可以比较,我们再做一些假定:

1. $M_1(x) = M(x)$ 左方代表有流动,右方代表无流动时的速度扰动. 这个假定给出条件

$$P_0 + \frac{H}{\gamma \tau_A} \cdot Q_0 = 1$$

2. 流动为均匀,即 $\mu = 0$.

3. 要求满足 $|\phi_1| \ll |\phi_0|, |\varphi_1| \ll |\varphi_0|$.

下面,我们求 $\phi = \phi_s$ 在 $y < 0, x = 0$ 上的交点 y_0 . 在磁岛方程中代入 $x = 0$. 可求出:

$$\cos ky_0 = -1, \frac{-1 + (Q_0/P_0)^2}{1 + (Q_0/P_0)^2}$$

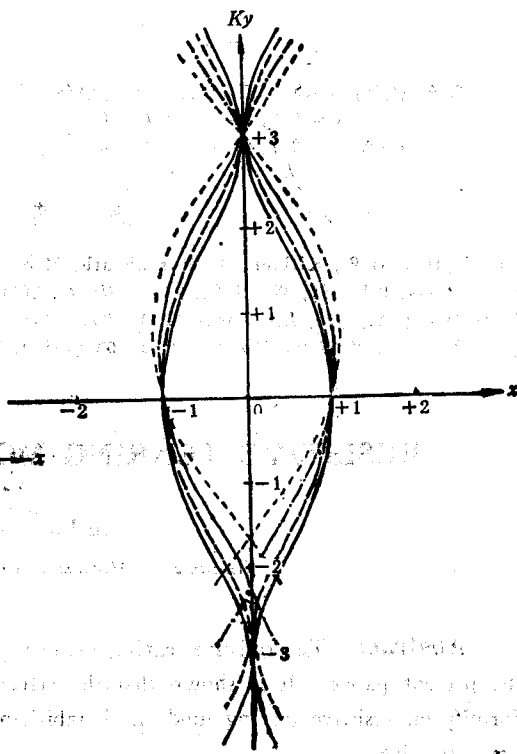
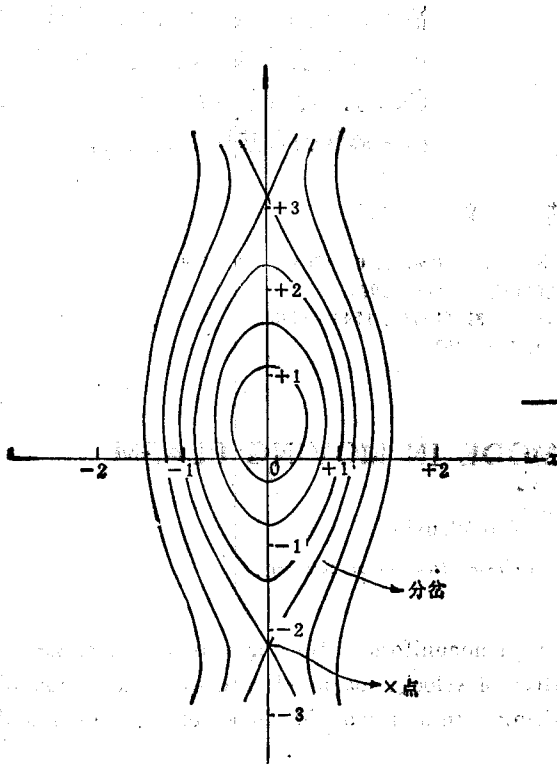


图 2 $k = 0.5, Q_0/P_0 = 0.5$ 时的磁岛

图 3 $k = 0.5$ 时不同 Q_0/P_0 的 $\phi = \phi_s$ 磁岛形状

前者相当于 $ky_0 = +\pi$, 我们不考虑. 故在负的 y 轴上, 交点 y_0 为

$$ky_0 = \cos^{-1} \left\{ \frac{-1 + (Q_0/P_0)^2}{1 + (Q_0/P_0)^2} \right\}.$$

一般 ky_0 比 $-\pi$ 稍大, 即绝对值比 π 稍小.

图 2 给出磁岛形状.

图 3 给出 $k = 0.5$, Q_0/P_0 取不同值时的 $\psi = \psi$, 磁岛形状.

图 4 给出 $Q_0/P_0 = 0.5$ 时, k 取不同值时的 $\psi = \psi$, 磁岛形状.

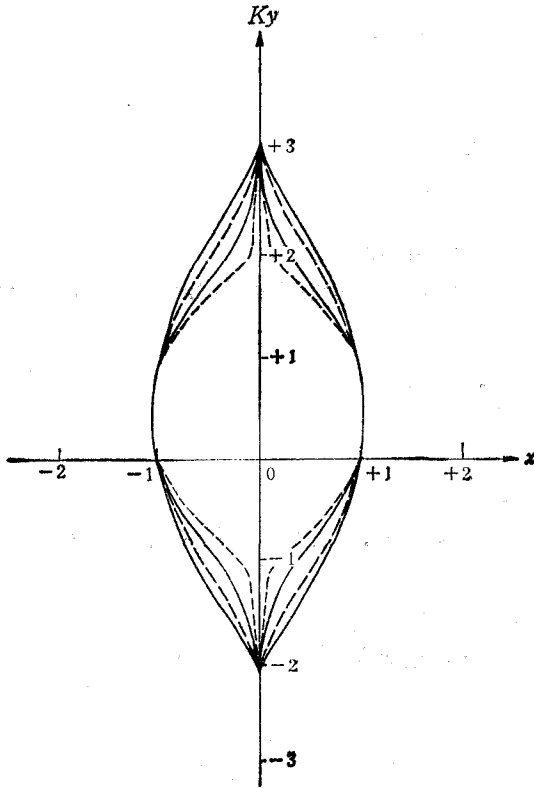


图 4 $Q_0/P_0 = 0.5$ 时不同 k 的 $\psi = \psi$, 磁岛形状
 ——为 $k = 0.5$, ----为 $k = 0.3$
 -·-·为 $k = 0.1$, ····为 $k = 0.01$

六、结 论

本文讨论了在非均匀流动等离子体中, 电阻撕裂模的解, 以及不稳定性增长率的表达式. 结果表明, 速度与分布的不均匀性均有失稳作用. 这个结果与文献[2,3]基本一致.

本文对流速低于 Alfvén 速度的情形, 画出了磁岛形状. 文献[3]对超 Alfvén 速度的情况, 给出了磁岛形状 (图 3). 尽管参数 H 的范围不同, 但磁岛形状仍有某些相似之处.

参 考 文 献

- [1] Furth, H.P., Killeen, J., Rosenbluth, M.N., *Phys. Fluids*, **6** (1963), 459—484.
- [2] Paris, R.B., Sy, W. N-C., *Phys. Fluids*, **26**(1983), 2966—2975.
- [3] Wang, S., Lee, L.C., Wei, C.O., *Phys. Fluids*, **31** (1988), 1544—1548.
- [4] White, R.B., *Rev. Modern Phys.*, **58** (1986), 183—207.

RESISTIVE TEARING MODE IN MOVING PLASMA

Xu Fu Yao Wenxiu

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract The resistive tearing mode in a nonuniformly flowing plasma is discussed in the present paper. It is shown that the effect of velocity magnitude and distribution nonuniformity on resistive tearing mode is destabilizing. In addition, the shapes of magnetic islands are also given.

Key words resistive tearing mode, resistive instability, instability of moving plasma