

周期界面裂纹反平面问题的动态 应力强度因子

章 梓 茂

(北方交通大学, 北京 100044)

提要 在研究动载荷作用下复合材料层板结构的安全与可靠性问题以及在抗震设计中关于地层裂缝的运动等问题中, 都与界面裂纹有关。本文研究了分布于两个半空间之间的周期界面裂纹在反平面剪切波作用下裂纹尖端应力强度因子的动态特性。文中利用有限 Fourier 变换, 将在一个周期带内的边值问题转化成求解一个带周期性奇异核的积分方程, 再借助于 Chebyshev 多项式求得问题的级数解, 最后分析了应力场在裂纹尖端的奇异性, 得到了裂纹尖端动态应力强度因子的计算公式, 并通过数值计算给出了应力强度因子随入射波频率变化的特性曲线。

关键词 周期界面裂纹, 应力强度因子

1. 力学模型

设有两个胶接在一起的半空间, 在其交界面上分布着周期为 $2L$, 长度为 2 个单位的

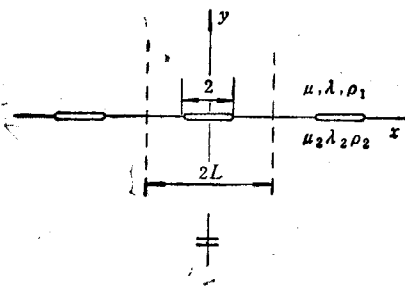


图 1 力学模型

周期 Griffith 裂纹, 如图 1 所示, 每个半空间为均匀各向同性的弹性介质, 其介质常数为 $\rho_i, \mu_i, \lambda_i (i = 1, 2)$, 其中 $i = 1, 2$ 分别表示上、下两个半空间。在无穷远处沿 y 的正方向入射一简谐的反平面剪切波:

$$W^i(x, y, t) = W_0 \exp(iK_T y - \omega t) \quad (1)$$

则在无裂纹状态下, 界面上的应力为

$$\tau_{yz}^i(x, 0, t) = i\mu_1 \mu_2 K_T K_T W_0 / (\mu_1 K_T + \mu_2 K_T) \cdot e^{-i\omega t} \quad (2)$$

这样只要将(2)式的应力场反而作用于裂纹面, 再与入射场叠加, 便可得到问题的解。

现在只需求如下的边值问题:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 W_j + K_{Tj}^2 W_j &= 0 & j &= 1, 2 \\ \tau_{yz} &= \tau_{yx} = -\tau_{yz}^i(x, 0, t) & y &= 0, |x| < 1 \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = 0 & |y| &< \infty, |x| = L \\ \tau_{yz} &= \tau_{yx}, W_2 = W_1 & y &= 0, 1 < |x| < L \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 ∇^2 为二维的拉氏算符。

本文于 1990 年 9 月 2 日收到第一稿, 于 1991 年 4 月 20 日收到修改稿。

另外 $W_i (i = 1, 2)$ 还必须满足如下的辐射条件:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1/2} \left\{ \frac{\partial W_i}{\partial R} - i |K| W_i \right\} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

其中 $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $|K|$ 为波数矢量的模。

2. 奇异积分方程的导出及其求解

为了求解由(3)、(4)式给出的边值问题, 引入有限 Fourier 变换,

$$f_s^{(j)}(y) = \int_{-1}^1 F(x, y) \cos(n\xi x) dx \quad (5)$$

其相应的反演公式为

$$F(x, y) = f_b^{(j)}(y) + \sum_{|n|=1}^{\infty} f_s^{(j)}(y) \cos(n\xi x) \quad (6)$$

其中 $\xi = \pi/L$.

再定义裂纹面上的位错密度函数 $\bar{w}(u)$, 使得

$$W_2(x, 0) - W_1(x, 0) = \begin{cases} \int_x^1 \bar{w}(u) du & |x| < 1 \\ 0 & 1 < |x| < L \end{cases} \quad (7)$$

这样, 通过对(3)中的位移场作有限的 Fourier 变换, 再利用界面连接条件及裂纹面上的应力边界条件, 便可将问题归结为如下关于位错密度函数 $\bar{w}(u)$ 的奇异积分方程。

$$\alpha \int_{-1}^1 \operatorname{ctg} \frac{\xi(u-x)}{2} \bar{w}(u) du + \int_{-1}^1 K(u, x) \bar{w}(u) du = -\tau'_{12}, \quad |x| < 1 \quad (8)$$

其中 α 是由介质确定的常数, 核 $K(u, x)$ 为 u, x 的已知函数, 方程(8)是带有奇异周期核的第一类奇异积分方程, 但在一个周期带内 $\operatorname{ctg}(u-x)$ 具有与 $\frac{1}{u-x}$ 的柯西核相同的奇异性, 所以我们定义一个有界函数 $v(u-x)$:

$$v(u-x) = \operatorname{ctg} \frac{\xi(u-x)}{2} - \frac{2}{\xi(u-x)} \quad (9)$$

将(9)代入(8)式, 便可将问题转化为在一个周期带内求解一个通常的第一类奇异积分方程, 然后再作 x 方向的建拓, 便可得整个问题的解。

借助于 Chebyshev 多项式, 将 $\bar{w}(u)$ 展开成如下的级数形式:

$$\bar{w}(u) = (1-u^2)^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} B_j T_{2j+1}(u) \quad (10)$$

其中 B_j 为待定常数, $T_{2j+1}(u)$ 为第一类 Chebyshev 多项式, 在(10)中, 由于 $\bar{w}(u)$ 为奇函数, 所以只取了奇数项。

将(10)代入(8)后, 再利用 Chebyshev 多项式的正交性, 便可得关于待定常数 B_j 的线性代数方程组:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(D_{jk} + \frac{\pi^2 \alpha}{\xi} \delta_{j,k} \right) B_j = H_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} D_{jK} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-u^2)^{-1/2} (1-x^2)^{1/2} [\alpha V(u-x) + K(u,x) T_{2j+1}(u) u_{2K}(x) du dx] \\ H_K &= - \int_{-1}^1 \tau_{yx}^i (1-x^2)^{1/2} u_{2K}(x) dx \quad j=0,1,2,\dots, K=0,1,2,\dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$U_{2K}(x)$ 为第二类 Chebyshev 多项式。

若将 (10) 式的级数按精度要求截断至第 N 项, 则通过 (11) 式的数值计算便可得 $B_j (j=0,1,2,\dots,N)$ 的数值结果。

3. 裂纹尖端应力场的奇性分析

下面我们考察应力场在裂纹尖端附近的动力学特性。定义裂纹尖端动态应力强度因子如下:

$$K_3 = \lim_{x \rightarrow 1^+} |(x^2 - 1)^{1/2} \tau_{ys}(x, 0)| \quad (13)$$

由(8)、(9)式可知, 当 $x \rightarrow 1^+$ 时, 裂纹尖端附近应力场在 $y=0$ 面上的主项为:

$$\tau_{ys}(x, 0) = \frac{2\alpha}{\xi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{w}(\mu)}{\mu - x} d\mu \quad x \rightarrow 1^+ \quad (14)$$

则将(10)式代入(14)并利用如下的关系式

$$\frac{1}{x} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{-1/2} T_i(u) \frac{du}{u-x} = \frac{[(x^2-1)^{1/2}-x]^j}{(-1)^{j+1}(x^2-1)^{1/2}} \quad x > 1 \quad (15)$$

可得:

$$\tau_{ys}(x, 0) = \frac{2\pi\alpha}{\xi} \sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{[(x^2-1)^{1/2}-x]^{2j+1}}{(-1)^{2j+2}(x^2-1)^{1/2}} \quad x \rightarrow 1^+ \quad (16)$$

再将(16)代入(13)并取极限, 代入 α 值便得:

$$K_3 = \left| -\frac{2\pi\mu_1\mu_2}{\xi(\mu_1+\mu_2)} \sum_{j=0}^{\infty} B_j \right| \quad (17)$$

(17)式即为界面周期裂纹反平面问题动态应力强度因子的计算公式, 它反映了在反平面剪切波作用下周期界面裂纹尖端附近应力场的主要动态特性。由(17)式可见, K_3 与两个半空间的材料组合及裂纹分布周期均有关。当在 (17) 中取有限项作近似时, 便可通过(11)式的线性代数方程组求得 B_j , 从而得到应力强度因子的值。

对于以上分析结果, 本文计算了裂纹尖端应力强度因子 K_3 随入射波频率变化的数值曲线。在计算中用六阶的 Chebyshev 多项式逼近奇异积分方程的解, 并对两组不同的材料组合进行了比较, 第一组上半空间为金, 下半空间为镍, 第二组上半空间为铝, 下半空间为金。图 2、3 分别给出了相应的特性曲线。在图示符号中 $\Omega = \omega L / c_{T1}$ 。

由图示曲线可知, 对于不同的材料组合, 应力强度因子的频率特性有很大的差异, 对于第一种材料组合, 在低频段应力强度因子的幅值较大, 并有单一的峰值存在, 随着频率的增高, 应力强度因子逐渐减小, 且变化较为平缓。而对于第二种材料组合, 当 Ω 在 (0, 2) 的频域内, 其变化趋势与第一种材料组合相类似, 但在 $\Omega > 2$ 的高频域内, 应力强度因子随频率的变化较为复杂, 在较宽的频域带内其幅值较大, 并有多个峰值存在, 而这种材料组合的特点是两个半空间中介质的剪切模量较为接近, 因此这说明当两种剪切模量较为接近的介质之间存在周期裂纹时, 较高频率的反平面剪切波对其的破坏性更大; 另外, 周

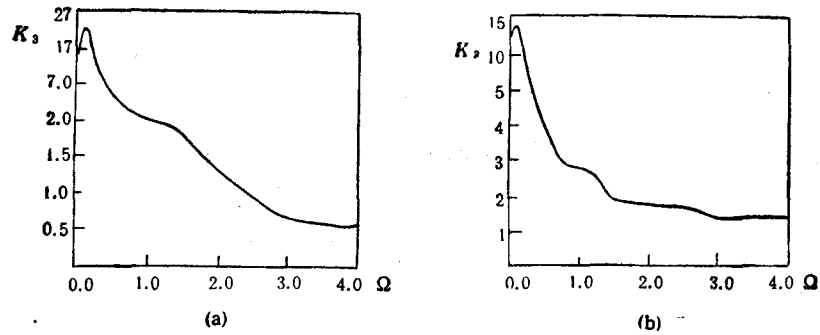


图 2 第一组材料组合下动态应力强度因子随入射波频率变化的曲线 (a): $L=5$, (b): $l=10$

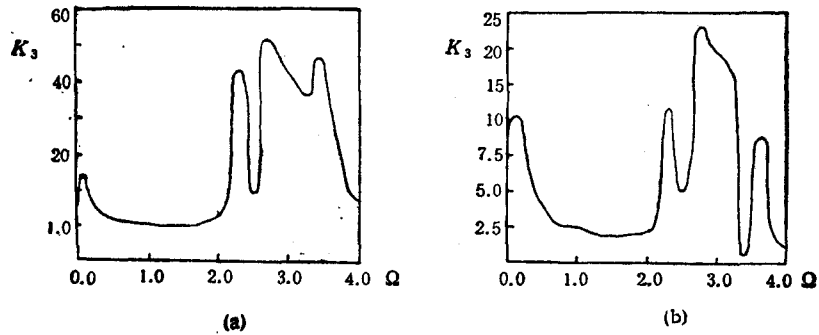


图 3 第二组材料组合下动态应力强度因子随入射波频率变化的曲线 (a): $L=5$, (b): $L=10$

期带宽度对应力强度因子的幅值影响也较大,但对其频率特性的影响且较小。

参 考 文 献

- [1] Angel, Y. C. and Achenbach, J. D., *J. Appl. Mech.*, 1985 52: 33.
- [2] Angel, Y. C. and Achenbach, J. D., *Wave Motion*, 1985 7: 375.
- [3] Mikata, Y. and Achenbach, J. D., *Wave Motion*, 1988 10:59.
- [4] Achenbach, J. D. and Li, Z. L., *Wave Motion*, 1986 8:371.

INTERACTION OF ANTIPLANE SHEAR WAVE WITH PERIODICALLY ARRAYED INTERFACE CRACKS

Zhang Zimao

(Northern Jiao-tong University, Beijing, 100044)

Abstract In this paper, the interaction of antiplane shear waves with periodically arrayed cracks at the interface of two bonded dissimilar elastic half-space is considered. By using the finite Fourier transform techniques, the solution of the mixed boundary value problem for a typical strip is reduced to a set of singular integral equation with a singular kernel of $\cotg \frac{\pi}{L}(u-x)$, where L is the width of the periodical strip. By means of Chebyshev polynomial, the equation is solved numerically. And finally, the variation of the dynamic stress intensity factor at the crack-tip is plotted versus the frequency of the incident waves.

Key words interface crack, antiplane, stress intensity factor