

用摄动法分析准静态载荷下弹塑性结构的安定问题¹⁾

杜森田

(吉林工业大学, 长春, 130025)

徐秉业 潘立功

(清华大学, 北京, 100084)

摘要 本文借助于摄动法用分段线性加载面讨论了弹塑性结构在准静态载荷下的安定问题, 给出了一个普遍适用的不等式, 由此导出了广义的米兰(Melan, 1938)安定准则以及位移与塑性变形的界, 并举例进行了说明。

关键词 摄动法, 安定, 准静态载荷

1. 引言

在交变载荷作用下, 为了使结构安全起见, 必须注意两个问题, 其一是结构的安定性, 其二是结构变形的有界性。

在结构的安定性方面, 历史上从经典的静力安定定理(Melan, 1938)和机动安定定理(Koiter, 1956)之后, 曾在不同方面得到了推广^[1-3]。在讨论变形的有界性方面, 人们也曾有很多文章提出了不同方法; 概括起来可以分为两大类: “虚载荷”法和“直接”法。前者实质上是一种摄动法, 对作用于结构上的外载进行摄动, 最终导出在安定情况下位移的界^[4]; 后者是依据分段线性屈服面和数学规划方法, 而最终确定安定情况下的最大变形, 这一最大变形就是在安定情况下塑性变形的上界^[5, 6]。

本文采用分段线性的加载面, 借助于摄动法对上述两个问题进行了讨论。它可以认为是上述“虚载荷”法的推广, 因为本文中的摄动不仅应用于外加载荷, 也应用于某个屈服应力。据此导出了一个更具有一般性的不等式, 进而得到了“静力”安定准则以及位移与塑性变形的界。由此可见, 本文所用的方法大大拓宽了上述“虚载荷”法或“直接”法的应用范围, 通过它可以同时确定在安定情况下的位移和塑性变形。

2. 基本方程

现在考虑一个体积为 V 的弹塑性结构, 其内作用体力 $F_i(x, t)$ 、附加应变 $\theta_{ij}(x, t)$ (如热应变), 在边界 S_T 上作用面力 $T_i(x, t)$, 而在另一部分边界 S_u 上给定了位移 $\hat{u}_i(x, t)$ 。此处 x 为空间坐标, $t \geq 0$ 为时间。此外, 本文中忽略惯性力, 同时假定结构内无初应力, 整个问题中的位移也是十分微小的, 其基本方程和边条件为

$$\sigma_{ij,i} + F_i = 0 (V \text{ 内}) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i (S_T \text{ 上}) \quad (2.2)$$

1) 本文得到了国家自然科学基金资助。

于 1990 年 7 月 10 日收到第一稿, 1991 年 2 月 27 日收到修改稿。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (V \text{ 内}) \quad (2.3)$$

$$u_i = \hat{u}_i(s_n \text{ 上}) \quad (2.4)$$

上式中 n_j 为边界上的单位外法向量, 逗号表示对空间坐标某分量的偏导数. 现将总应变 ε_{ij} 分解为弹性应变 ε_{ij}^e 、塑性应变 ε_{ij}^p 和 ϑ_{ij} 三部分之和, 即

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \vartheta_{ij} \quad (V \text{ 内}) \quad (2.5)$$

$$\text{其中} \quad \varepsilon_{ij}^e = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (V \text{ 内}) \quad (2.6)$$

此处 A_{ijke} 为对称正定的弹性系数张量.

令加载面在应力空间中为分段线性的, 即

$$\varphi_\alpha = N_{\alpha ij} \sigma_{ij} - K_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (V \text{ 内}) \quad (2.7)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} = N_{\alpha ij} \dot{\lambda}_\alpha \quad (V \text{ 内}) \quad (2.8)$$

$$\varphi_\alpha \leq 0, \dot{\lambda}_\alpha \geq 0, \varphi_\alpha \dot{\lambda}_\alpha = 0, \dot{\varphi}_\alpha \dot{\lambda}_\alpha = 0 \quad (V \text{ 内}) \quad (2.9)$$

式中点号表示对时间的导数; $N_{\alpha ij}$ 为 $\varphi_\alpha = 0$ 面上的单位外法向量, $K_\alpha = K_\alpha^0 + H_{\alpha\beta} \lambda_\beta$ 为该面离开坐标原点的距离, 实际上是在 t 时刻的屈服应力, 此处 $H_{\alpha\beta}$ 为对称半正定矩阵, 它表明材料的强化性质, $K_\alpha^0 > 0$ 是第 α 个初始屈服面离开坐标原点的距离, 或者说它是初始屈服状态的应力, λ_α 为相应于第 α 个加载面的塑性乘子

$$\lambda_\alpha = \int_0^t \dot{\lambda}_\alpha dt \quad (\lambda_\alpha = 0, \text{ 当 } t = 0) \quad (2.10)$$

3. 安定准则

首先, 对外力 F_i, T_i 分别进行摄动, 使其分别变为 $F_i + F'_i, T_i + T'_i$. 假定初始塑性应变存在, 即

$$\varepsilon_{ij}^{p0} = N_{\alpha ij} \lambda_\alpha^0 \quad (V \text{ 内}) \quad (3.1)$$

其中 $\lambda_\alpha^0 \geq 0$ 为塑性乘子, 它实际上起自由参数作用. 对屈服应力进行摄动, 使其变为 K_α , 即

$$K_\alpha = K_\alpha^0 + H_{\alpha\beta} \lambda_\beta = K_\alpha^1 \quad (3.2)$$

值得指出的是以上各量 F'_i, T'_i 和 K_α^1 均与时间无关, 显然 K_α 也是常量. 摄动后的问题在时刻 t 的解满足下列方程和边条件

$$\sigma_{ij,j} + F_i + F'_i = 0 \quad (V \text{ 内}) \quad (3.3)$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i + T'_i \quad (s_T \text{ 上}) \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{p0} + \vartheta_{ij} \quad (V \text{ 内}) \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (V \text{ 内}) \quad (3.6)$$

$$u_i = \hat{u}_i \quad (s_n \text{ 上}) \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (V \text{ 内}) \quad (3.8)$$

而应力 σ_{ij} 在 V 内各点以及在任意时刻 t 都不能违反屈服条件

$$\varphi_\alpha = N_{\alpha ij} \sigma_{ij} - K_\alpha \leq 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (3.9)$$

此时摄动后的解仍处于安定状态. 值得指出的是, 由于假定 ε_{ij}^{p0} 的存在, 以及 σ_{ij} 必须满

足式 (3.3)—(3.9), 这实际上意味着对 F_i 、 T_i 和 \hat{u}_i 的变化范围给予了限制, 因而在下边的讨论和所得结论中, 这一点必须被注意到。

根据外部作用的不同, 现将上述问题分为三个子问题之和, 即将式 (3.3)—(3.8) 的解作如下分解

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{E0} + \sigma_{ij}^1, \quad \sigma_{ij}^{E0} = \sigma_{ij}^E + \sigma_{ij}^0 \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{ij}^E = \varepsilon_{ij}^{E0} + \varepsilon_{ij}^1, \quad \varepsilon_{ij}^{E0} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^0 \quad (3.11)$$

$$u_i = u_i^{E0} + u_i^1, \quad u_i^{E0} = u_i^E + u_i^0 \quad (3.12)$$

式中用上标“E”、“1”和“0”表示的各量分别满足下列方程组

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,i}^E + F_i = 0, \quad \varepsilon_{ij}^E + \vartheta_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^E + u_{j,i}^E), \quad \varepsilon_{ij}^E = A_{ijkl} \sigma_{kl}^E \quad (V \text{ 内}) \\ \sigma_{ij}^E n_j = T_i \quad (s_T \text{ 上}), \quad u_i^E = \hat{u}_i \quad (s_u \text{ 上}) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,i}^1 + F_i^1 = 0, \quad \varepsilon_{ij}^1 = \frac{1}{2} (u_{i,j}^1 + u_{j,i}^1), \quad \varepsilon_{ij}^1 = A_{ijkl} \sigma_{kl}^1 \quad (V \text{ 内}) \\ \sigma_{ij}^1 n_j = T_i^1 \quad (s_T \text{ 上}), \quad u_i^1 = 0 \quad (s_u \text{ 上}) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,i}^0 = 0, \quad \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^{E0} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0), \quad \varepsilon_{ij}^0 = A_{ijkl} \sigma_{kl}^0 \quad (V \text{ 内}) \\ \sigma_{ij}^0 n_j = 0 \quad (s_T \text{ 上}), \quad u_i^0 = 0 \quad (s_u \text{ 上}) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

显然上述三组解 $(\sigma_{ij}^E, \varepsilon_{ij}^E, u_i^E)$ 、 $(\sigma_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^1, u_i^1)$ 和 $(\sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^0, u_i^0)$ 均为弹性解; 并且后两组解与时间无关; 第一组解是把材料看成完全弹性时的解。令

$$L = \int_V A_{ijkl} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{E0}) (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^{E0}) dV + \frac{1}{2} \int_V H_{\alpha\beta} (\lambda_\alpha - \lambda_\alpha^0) (\lambda_\beta - \lambda_\beta^0) dV, \quad (3.16)$$

注意到 A_{ijkl} 和 $H_{\alpha\beta}$ 分别是对称正定和对称半正定的, 故 $L \geq 0$ 。利用式 (2.5)—(2.9)、(3.9)—(3.10) 及 (3.12) 可得

$$\dot{L} \leq - \int_V F_i' (\dot{u}_i - \dot{u}_i^E) dV - \int_{s_T} T_i' (\dot{u}_i - \dot{u}_i^E) ds - \int_V K_\alpha' \lambda_\alpha dV \quad (3.17)$$

此式对满足式 (3.9) 的任意摄动 F_i' 、 T_i' 和 K_α' 以及任意时刻 $t \geq 0$ 均成立。因此, (3.17) 式是一个普遍适用的不等式。它可以应用于研究摄动问题的很多方面, 比如强化材料的安定准则以及位移与塑性变形的界等等。

现设 (3.17) 式中的摄动 F_i' 、 T_i' 和 K_α' 均为零, 于是对任意时刻 $t \geq 0$ 均有

$$\dot{L}(t) \leq 0 \quad (3.18)$$

此式说明 $L(t)$ 并非递增函数。但由于 $L(t) \geq 0$, 故当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\dot{L} \rightarrow 0$, 即 L 趋向于某一个有界量。又鉴于 L 的表达式 (3.16) 右端的两个积分皆为非负, 因而每个积分也一定都趋向于一个有界量。由此可以断定, 第二个积分中的 $\lambda_\alpha(t)$ 也必然趋向于某一个有界量。当注意到式 (2.8) 和 (2.10) 时, 这一结论就意味着一定存在某一时刻 $t^* > 0$, 当 $t \geq t^*$ 之后, 结构内不会再产生新的塑性应变 ε_{ij}^p , 而结构的响应开始表现为纯弹性的, 即结构安定。这样, 我们就得到了关于强化材料的所谓米兰安定准则的更一般形式。

4 位移和塑性变形的界

在很多情况下, 仅仅考虑结构的安定性还不足以保证结构的安全性。因为安定问题

只涉及到结构变形过程中其塑性功或塑性变形的有界性,而当相应的塑性功或塑性变形大到结构所不能承受的程度时,安定的结构最终仍然可能导致破坏。因此,历史上有不少学者曾对交变载荷作用下的位移或塑性变形的界进行过估计^[1,4,5]。由于篇幅的限制,下面仅仅给出结构在变形过程中的位移和塑性变形的上界估计式,其推导过程从略。

(1) 位移的上界

在不等式(3.17)中,令 $K'_a = F'_i = 0$, 经简单计算,不难得到边界 s_T 上位移或残余位移的界

$$\int_{s_T} T'_i u_i(t_1) ds \leq L(0) + \text{Max}_D \int_{s_T} T'_i u_i^E(\tau_r) ds + \int_{s_T} T'_i [u_i(0) - u_i^E(0)] ds \quad (4.1a)$$

$$\int_{s_T} T'_i u_i^R(t_1) ds \leq L(0) + \int_{s_T} T'_i u_i^E(0) ds \quad (4.1b)$$

其中残余位移 $u_i^R = u_i - u_i^E$, 时刻 $t_1 > 0$ 为任意的。在获得界(4.1a)的过程中,用到了

$$\int_{s_T} T'_i u_i^R(t_1) ds \leq \text{Max}_D \int_{s_T} T'_i u_i^E(\tau_r) ds \quad (4.2)$$

此处弹性解 $(\sigma_{ij}^E, \varepsilon_{ij}^E, u_i^E)$ 将被视为载荷点 $\tau_r \in D (r = 1, 2, \dots, m)$ 的函数,而 D 为给定的 m -维空间的一个加载区域(有界闭区域)。显然,式(4.2)说明考虑到了各种许可的加载历史。

此外,由于无初应力的假设,我们也可从式(3.16)得到

$$L(0) = \frac{1}{2} \int_V A_{ijkl} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 dV + \frac{1}{2} \int_V H_{\alpha\beta} \lambda_\alpha^0 \lambda_\beta^0 dV \quad (4.3)$$

(2) 塑性应变的上界

在不等式(3.17)中,令 $F'_i = T'_i = 0$, 则不难获得

$$\int_V K'_a \lambda_a(t_1) dV \leq L(0) \quad (4.4)$$

(3) 界的优化

在上述有关界的表达式中,都有通过式(4.3)定义的 $L(0)$, 而 $L(0)$ 中包含有两个参变量 σ_{ij}^0 和 λ_a^0 , 为了能得到最好的上界,必须设法在 σ_{ij}^0 和 λ_a^0 的变化过程中取到 $L(0)$ 的最小值,或者说,在包括不等式(3.9)在内的一些约束条件下,求泛函 $L(0)$ 的最小值。

在计算过程中,为了更具有一般性,把每一个摄动量写成包含一个未知乘子 $\omega > 0$ 的乘积形式,即

$$F'_i = \omega \bar{F}_i \quad (V \text{ 内}) \quad (4.5)$$

$$T'_i = \omega \bar{T}_i \quad (s_T \text{ 上}) \quad (4.6)$$

$$K'_a = \omega \bar{K}_a \quad (V \text{ 内}) \quad (4.7)$$

借助于变分方法,得到优化之后的界(具体推导过程从略)。

(1) 位移的界 ($\bar{T}_i \neq 0, \bar{K}_a = 0$)

$$\eta_i^- + \text{Max}_D u_i^E(\tau_r) \leq u_i(t_1) \leq \eta_i^+ + \text{Max}_D u_i^E(\tau_r) \quad (c \text{ 点}) \quad (4.8a)$$

$$\eta_i^- \leq u_i^R(t_1) \leq \eta_i^+ \quad (c \text{ 点}) \quad (4.8b)$$

式中 η_i^+ 和 η_i^- 分别为对应于 $\bar{T}_i = 1$ 和 $\bar{T}_i = -1$ 时的位移,而 c 点为 s_T 上的任一点。亦即式(4.8a)和(4.8b)。对于 s_T 上任一点和任一时刻 $t_1 > 0$ 皆成立。

(2) 塑性应变的界 ($\bar{K}_a \neq 0, \bar{T}_i = 0$)

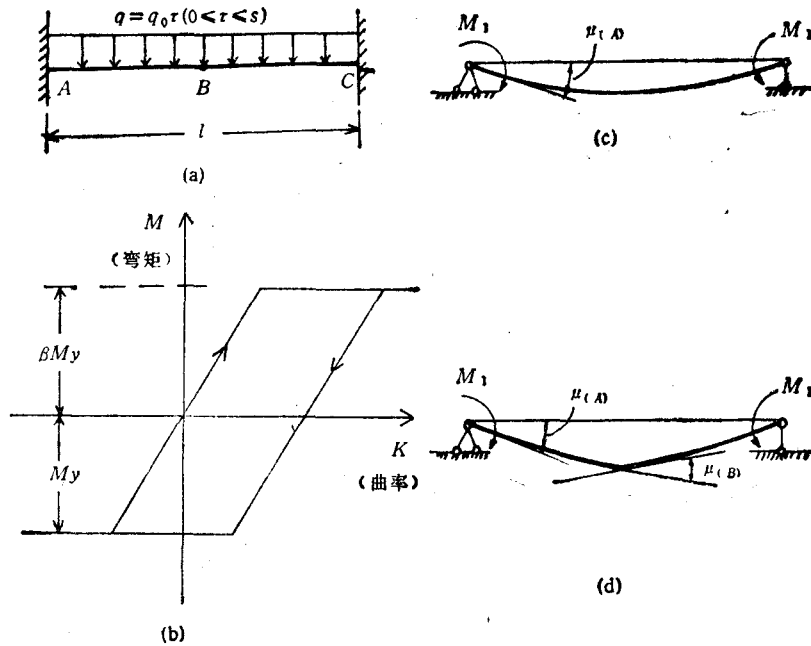


图 1 (a) 固端梁承受变化的均布载荷；(b) 弯矩 M 与曲率 K 之间的关系；(c) 和 (d) 为赘余力作用于相应的简支梁上，(c) 弹性阶段，(d) 弹塑性阶段

$$\lambda_a(t_1) \leq \mu_a \tag{4.9}$$

其中 μ_a 是可认为被加上去的、其力学意义与 λ_a 完全相同的一个量。式(4.9)对于 V 内任一点 c 和任一时刻 $t_1 > 0$ 皆成立。

5. 例

图 1 (a) 所示固支梁是由理想弹塑性材料构成的，并假定具有理想截面，梁的跨度为 l ，受均布载荷 q 作用，其极限弯矩(图 1 (b))分别为 M_+^* 和 M_-^* ，沿整个梁为常数，并设

$$M_+^* = \beta M_y, (\beta > 1), M_-^* = M_y \tag{5.1}$$

$$q = q_0 r, r \in D, D = \{r, 0 \leq r \leq s\} \tag{5.2}$$

此处 q 按准静态变化， $q_0 = \frac{16M_y}{l^2}$ 为弹性极限载荷。

由于整个系统具有对称性，所以梁内的自我平衡应力可以由作用于相应的简支梁两端的一对数值相等而方向相反的力偶矩 $M^0 = M_1$ (图 1 (c)) 产生。当 $s \leq 3/4$ 时，整个梁处于弹性阶段，而当 $3/4 < s < s_*$ 时，梁进入弹塑性阶段，直到 $s = s_* = \frac{1+\beta}{2}$ 时，此梁由于到达极限状态而破坏。

为了求 A (或 C) 截面的塑性变形(转角)，特在这一截面进行摄动，将其小邻域内的屈服弯矩 M ，减少 $M'_y = \omega \bar{M}_y$ ，即 $M'_y = M_y - \omega \bar{M}_y$ ，而且在其相应的简支梁上加赘余力 $M^0 = M_1$ (图 1 (c))，以便产生自我平衡的应力。

在截面 A 和 B 应不违反如下的屈服条件

$$\varphi_{(A)} = -\xi + s + \omega g - \frac{3}{4} \leq 0 \quad (5.3)$$

$$\varphi_{(B)} = 2\xi + s - \frac{3}{2}\beta \leq 0 \quad (5.4)$$

其中, $\xi = 12M_1/q_0l^2, g = 12\bar{M}_y/q_0l^2$ (5.5)

于是,根据图 1(c),得端面 A 的转角(即与自我平衡应力有关的塑性变形)

$$\mu_{(A)} = \frac{M_1 l}{2EJ} = a\xi \quad (5.6)$$

其中, $a = \frac{q_0 l^3}{24EJ} = \frac{2M_y l}{3EJ}$ (5.7)

经过优化之后,得

$$\xi = 2\left(s - \frac{3}{4}\right) \quad (5.8)$$

注意到式(5.6),从而有

$$\mu_{(A)} = 2a\left(s - \frac{3}{4}\right) \quad (5.9)$$

当式(5.4)变为等式时,意味着中央截面 B 也开始屈服。此时令 $s = s_1, \xi = \xi_1$,再借助于式(5.8)得

$$s_1 = \frac{3}{5}\left(1 + \frac{\beta}{2}\right), \xi_1 = \frac{3}{5}\left(\beta - \frac{1}{2}\right) \quad (5.10)$$

考虑到式(5.6),此时 $\mu_{(A)}$ 可写成(图 1(d))

$$\mu_{(A)} = a\xi + \frac{1}{2}\mu_{(B)} \quad (5.11)$$

通过简单计算,可得

$$\mu_{(A)} = \frac{a}{24}(3\beta - 2s)\left(1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{4s_1 - 3}{s_* - s}\right) \quad (5.12)$$

其中 $s_* = \frac{1 + \beta}{2}$, (5.13)

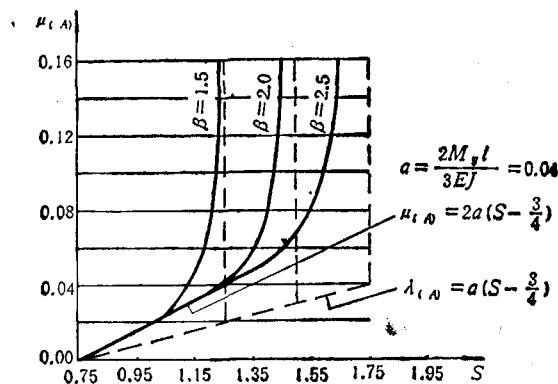


图 2 固端梁在承受变化的均布载荷时,对于不同的 $\beta = M_y^*/M_y$, 其端面残余转角的上界根据式(4.9),在安定条件下的真实塑性变形 $\lambda_{(A)}$ 应满足

$$\lambda_{(A)} \leq \mu_{(A)} \quad (5.14)$$

式中右端的 $\mu_{(A)}$ 将取自于式(5.9)或(5.12), 而这两式中的 $s \in [0.75, s_*]$. 图2画出了 $\lambda_{(A)}$ 和 $\mu_{(A)}$ 随 s 变化的曲线.

参 考 文 献

- [1] Koing, J. A., and Maier, G. Adaptation of rigid-workhardening discrete structures subjected to load and temperature cycles and secondorder geometric effects. *Computer Methods Appl. Mech. Engrng.* 1976, 8: 37—50.
- [2] Mazzarella, C. and panzeca, T. On work-hardening adaptation of discrete structures subjected to dynamic forces in the presence of second-order geometric effects. *J. Struct. Mech.*, 1981, 9(1): 29—49.
- [3] 黄筑平, 杜森田, 动载荷下弹塑性随动强化结构的安定问题, *力学学报*, 1985, 17, (5): 445—452.
- [4] Ponter, A. R. S. General displacement and work bounds for dynamically loaded bodies. *J. Mech. Phys. solids*, 1975, (23): 157—163.
- [5] Vitiello, E. Upper bounds to plastic strains in shake-down of structures subjected to cyclic loads. *Meccanica*, 1972, 13(3), 205—213.

AN ANALYSIS OF THE SHAKEDOWN PROBLEM OF ELASTO-PLASTIC STRUCTURES UNDER QUASI-STATIC LOADING BY THE PERTURBATION METHOD

Du Sentian

(Jilin University of Technology, Changchun, 130025 China)

Xu Bingye Pan Ligong

(Tsinghua University, Beijing, 100084, China)

Abstract In this paper, the shakedown problem is dealt with of elastoplastic structures subjected to the quasi-statically varying loads within a given domain. The work-hardening yield surface of the material is assumed to be piecewise linear. A general inequality is presented, according to which, the generalized Melan's shakedown criterion as well as bounds on displacement and plastic strain are derived. Moreover, applications of the derived result are illustrated by a simple example.

Key words perturbation method, shakedown, quasi-static loading.