第 23 卷 第 4 期 力 学 学 报 Vol. 23, No. 4
1991 年 7 月 ACTA MECHANICA SINICA July, 1991

正交各向异性厚板的边界元解法[1)]

王建国 黄茂光
（合肥工业大学）（中国科学技术大学）

提要 本文利用 Hörmander 算子法和平面波分解法导出了计入剪切变形的正交各向异性厚板的基本解. 建立了计入剪切变形的正交各向异性厚板的边界积分方程. 文中详细地讨论了基本解的数值计算，并用边界元法分析了一些算例.

关键词 正交各向异性厚板，基本解，边界元法

一、引 言

近十几年来，边界元法作为一种非常有效的求解偏微分方程的数值方法被广泛应用于弹性力学和板壳力学的静力分析. 用边界元法分析问题时，关键性的一环是寻求对应偏微分方程的基本解. 对于各向异性问题，一般情况下很难找到解析的基本解，因而边界元法在各向异性问题中所做的工作尚少.

本文首先利用 Hörmander 算子法[1]和平面波分解法[2]导出了计入剪切变形的正交各向异性厚板的基本解；然后利用文中导出的基本解作为积分方程的核函数，建立了计入剪切变形的正交各向异性厚板的边界积分方程，并用边界元法分析了一些算例.

二、正交各向异性厚板的基本方程

取坐标平面与板的中平面一致，板的厚度为 h，分布荷载为 q. 假定弹性主轴方向与坐标 x 和 y 的方向一致. u_i 表示板的广义位移，即 u_α 表示转角 ϕ_x 和 ϕ_y，u_3 表示沿板厚方向的挠度. 文中所有公式，希腊字母从 1 到 2 变化，拉丁字母从 1 到 3 变化. 文中除特别指明外，指标求和均符合 Einstein 求和约定.

1. 广义内力和广义位移之间的关系

$$\left.\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= D_{\alpha\beta}(\phi_{\alpha,\beta}+\phi_{\beta,\alpha})+C_{\alpha\beta}\phi_{\gamma,\gamma} \\ Q_\alpha &= C_\alpha(W_{,\alpha}+\phi_\alpha) \end{aligned}\right\}\text{对 }\alpha,\ \beta\text{ 不求和} \tag{1}$$

其中

$$D_{11}=\frac{D_1}{2}(1-\mu_{yx})\quad D_{22}=\frac{D_2}{2}(1-\mu_{xy})\quad D_{12}=D_{21}=D_k$$

$$C_{11}=D_1\mu_{yx}\qquad C_{22}=D_2\mu_{xy}\qquad C_{12}=C_{21}=0$$

1）国家自然科学基金资助课题.

本文于 1990 年 5 月 17 日收到.

$$D_1=\frac{E_xh^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}\quad D_2=\frac{E_yh^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}\quad D_k=\frac{G_{xy}h^3}{12}$$

$$D_1\mu_{yx}=D_2\mu_{xy}\qquad C_1=G_{xz}kh\qquad C_2=G_{zy}kh$$

在 Reissner 理论中 $k=\frac{5}{6}$. E_x 和 E_y 为弹性模量，G_{xy}，G_{xz} 和 G_{zy} 为剪切模量，μ_{xy} 和 μ_{yx} 为泊松比.

2. 广义位移表示的平衡微分方程

$$\Delta^*_{ij}u_j+b_i=0 \tag{2}$$

式中 b_i 分别为 0，0，q. Δ^*_{ij} 为微分算子，其具体形式为

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^*_{11}=D_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+D_k\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-C_1,\ \Delta^*_{22}=D_k\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+D_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-C_2\\
&\Delta^*_{12}=\Delta^*_{21}=(D_1\mu_{yx}+D_k)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},\ \Delta^*_{13}=-\Delta^*_{31}=-C_1\frac{\partial}{\partial x_1}\\
&\Delta^*_{23}=-\Delta^*_{32}=-C_2\frac{\partial}{\partial x_2},\ \Delta^*_{33}=C_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+C_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

3. 边界上的广义力和广义位移

如果以 n_α 表示边界外法线的方向余弦，t_α 表示边界切线的方向余弦，则边界上广义力和广义位移可表示为：

$$\left.\begin{aligned}
&P_\alpha=M_{\alpha\beta}n_\beta,\qquad P_3=Q_\alpha n_\alpha\\
&M_n=M_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta,\qquad M_{ns}=M_{\alpha\beta}t_\alpha n_\beta\\
&\phi_n=\phi_\alpha n_\alpha,\qquad \phi_s=\phi_\alpha t_\alpha
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

边界条件的处理见文献[10].

三、正交各向异性厚板的基本解

1. 基本解

计入剪切变形的正交各向异性厚板的基本解就是微分方程 (2) 在单位集中荷载作用下的一组特解. 在单位集中荷载作用下方程 (2) 可以写成如下形式:

$$\Delta^*_{ij}u^*_{kj}(\zeta,x)=-\delta(\zeta,x)\delta_{ki} \tag{5}$$

式中 $\delta(\zeta,x)$ 是 Dirac δ 函数. ζ 表示源点的坐标，x 表示场点的坐标. 按照 Hörmander 算子法[1]，方程 (5) 的解可以写成如下形式:

$$u^*_{kj}(\zeta,x)={}^{co}\Delta^*_{jk}\Phi(\zeta,x) \tag{6}$$

其中 $\Phi(\zeta,x)$ 是一个待求的标量函数，${}^{co}\Delta^*$ 表示微分算子 Δ^* 的余因子矩阵，其具体形式为:

$$\left.\begin{aligned}
&{}^{co}\Delta^*_{\alpha\beta}=E_{\alpha\beta}\nabla^2\nabla^2_k-B_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\Delta^2_k-C_1C_2\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\\
&{}^{co}\Delta^*_{3\alpha}=-{}^{co}\Delta^*_{\alpha3}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_{\alpha3}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+B_{\alpha3}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-C_1C_2\right)\\
&{}^{co}\Delta^*_{33}=D_1D_k\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+(D_1D_2-D_1^2\mu_{yx}^2-2D_1D_k\mu_{yx})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\\
&\qquad+D_2D_k\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}-(D_1C_2+C_1D_k)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-(C_1D_2+C_2D_k)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+C_1C_2\\
&\text{对 }\alpha,\beta\text{ 不求和}
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

上面方程中我们引入了如下的符号：

$$E_{11}=D_2,\qquad E_{22}=D_1,\qquad E_{12}=E_{21}=0,$$
$$B_{11}=D_2-D_k,\qquad B_{22}=D_1-D_k,\qquad B_{12}=B_{21}=(D_1\mu_{yx}+D_k),$$
$$E_{13}=C_1D_2-C_2(D_1\mu_{yx}+D_k),\quad E_{23}=C_2D_k,\qquad B_{13}=C_1D_k,$$
$$B_{23}=C_2D_1-C_1(D_1\mu_{yx}+D_k),\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\qquad \nabla_k^2=C_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+C_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

把方程(6)代入方程(5)，我们得到下面的方程.

$$\left\{\nabla_k^2\left[D_1D_k\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+(D_1D_2-D_1^2\mu_{yx}^2-2D_1D_k\mu_{yx})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+D_2D_k\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right]\right.$$
$$\left.-C_1C_2\left[D_1\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+2(2D_k+D_1\mu_{yx})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+D_2\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right]\right\}\Phi(\zeta,x)$$
$$=-\delta(\zeta,x)\tag{8}$$

通过上述过程，把求解方程(5)的解转化为求解方程(8)的解. 只要求得方程(8)的解，将其代入方程(6)进行一些微分运算即可得到满足方程(5)的解. 方程(8)是一个六阶常系数偏微分方程. 按照 Gel'fand 和 Shilov[2] 所提出的平面波分解法，可以把偏微分方程(8)转化为常微分方程，这样一来就使得问题的处理较为简便. 首先把 $\delta(\zeta,x)$ 分解成平面波. 按照文献[2]有：

$$\delta(\zeta,x)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}|\omega_1(x-\xi)+\omega_2(y-\eta)|^{-2}d\theta\tag{9}$$

其中 (ω_1,ω_2) 为单位圆周上点的坐标，即 $\omega_1=\cos\theta$, $\omega_2=\sin\theta$. (x,y) 为场点的坐标，(ξ,η) 为源点的坐标. 同理 $\Phi(\zeta,x)$ 可以写成如下形式：

$$\Phi(\zeta,\ x)=\int_0^{2\pi}\phi(\rho)d\theta\tag{10}$$

其中 $\rho=\omega_1(x-\xi)+\omega_2(y-\eta)$. $\phi(\rho)$ 是一个仅与 ρ 有关的函数. 把方程(9)、(10)代入到方程(8)，并考虑到对 $\phi(\rho)$ 来说存在关系式 $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}=\omega_\alpha\dfrac{d}{d\rho}$，我们得到下面方程.

$$\frac{d^4}{d\rho^4}\left(\frac{d^2}{d\rho^2}-p^2\right)\phi(\rho)=\frac{1}{4\pi^2a^2}|\rho|^{-2}\tag{11}$$

式中：

$$a^2=C_1D_1D_k\omega_1^6+C_1(D_1D_2-D_1^2\ \mu_{yx}^2-2D_1D_k\mu_{yx})\omega_1^4\omega_2^2+C_1D_2D_k\omega_1^2\omega_2^4$$
$$+C_2D_1D_k\omega_1^4\omega_2^2+C_2D_2D_k\omega_2^6+C_2(D_1D_2-D_1^2\mu_{yx}^2-2D_1D_k\mu_{yx})\omega_1^2\omega_2^4$$
$$b^2=C_1C_2[D_1\omega_1^4+2(2D_k+D_1\mu_{yx})\omega_1^2\omega_2^2+D_2\omega_2^4]$$
$$p^2=b^2/a^2$$

现在求解偏微分方程(8)的解已经转化为求解常微分方程(11)的解. 对方程(11)连续积分四次并在积分过程中去掉相应的积分常数，则得到下面形式的方程：

$$\frac{d^2\phi(\rho)}{d\rho^2}-p^2\phi(\rho)=-\frac{1}{8\pi^2a^2}\rho^2\ln|\rho|.\tag{12}$$

方程(12)的特解可写成如下形式：

$$\phi(\rho)=f_1(\rho)e^{p\rho}+f_2(\rho)e^{-p\rho} \tag{13}$$

利用微分方程理论中的参数变易法，求出 $f_1(\rho)$ 和 $f_2(\rho)$ 代入上式并整理得:

$$\phi(\rho)=\frac{1}{8\pi^2p^4a^2}\left\{p^2\rho^2\ln|\rho|+2\ln|\rho|+3+e^{p\rho}\int_\rho^\infty\frac{e^{-p\sigma}}{\sigma}d\sigma-e^{-p\rho}\int_{-\infty}^\rho\frac{e^{p\sigma}}{\sigma}d\sigma\right\}. \tag{14}$$

把方程(14)代入方程(10)进行积分便可以求得函数 $\Phi(\zeta,x)$. 由于解析的积分很难求得，故而本文采用文献[9]的处理办法，采用数值积分法求解。根据平面波分解法[2]，广义位移和广义边界力可以表示为:

$$u^*_{ij}(\zeta,x)=\int_0^{2\pi}\tilde{u}^*_{ij}(\rho)d\theta,\quad p^*_{ij}(\zeta,x)=\int_0^{2\pi}\tilde{p}^*_{ij}(\rho)d\theta \tag{15}$$

根据方程(6)、(1)和(4)，我们可以很方便地求得 $\tilde{u}^*_{ij}(\rho)$ 和 $\tilde{p}^*_{ij}(\rho)$. 其具体形式如下:

a) 广义位移的表达式

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{u}^*_{\alpha\beta}(\rho)&=a_{\alpha\beta}\frac{d^4\phi}{d\rho^4}-C_1C_2\omega_\alpha\omega_\beta\frac{d^2\phi}{d\rho^2}\\
\tilde{u}^*_{3\alpha}(\rho)&=-\tilde{u}^*_{\alpha3}(\rho)=f_\alpha\frac{d^3\phi}{d\rho^3}-C_1C_2\omega_\alpha\frac{d\phi}{d\rho}\\
\tilde{u}^*_{33}(\rho)&=\alpha_1\frac{d^4\phi}{d\rho^4}-\beta_1\frac{d^2\phi}{d\rho^2}+C_1C_2\phi
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中:

$$\left.\begin{aligned}
a_{\alpha\beta}&=(E_{\alpha\beta}-B_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta)(C_1\omega_1^2+C_2\omega_2^2)\\
f_\alpha&=(E_{\alpha3}\omega_2^2+B_{\alpha3}\omega_1^2)\omega_\alpha\\
\alpha_1&=D_1D_k\omega_1^4+(D_1D_2-D_1^2\mu_{yx}^2-2D_1D_k\mu_{yx})\omega_1^2\omega_2^2+D_2D_k\omega_2^4\\
\beta_1&=(C_2D_1+C_1D_k)\omega_1^2+(C_2D_k+C_1D_2)\omega_2^2
\end{aligned}\right\}\text{对 }\alpha,\beta\text{ 不求和} \tag{17}$$

b) 广义边界力的表达式

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{p}^*_{\alpha\beta}(\rho)&=[D_{\beta\gamma}(a_{\alpha\beta}\omega_\gamma+a_{\alpha\gamma}\omega_\beta)n_\gamma+C_{\beta\gamma}d_\alpha n_\gamma]\frac{d^5\phi}{d\rho^5}\\
&\quad-[2D_{\beta\gamma}C_1C_2\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\gamma n_\gamma+C_1C_2C_{\beta\gamma}\omega_\alpha n_\gamma]\frac{d^3\phi}{d\rho^3}\\
\tilde{p}^*_{3\alpha}(\rho)&=[D_{\alpha\gamma}(f_\alpha\omega_\gamma+f_\gamma\omega_\alpha)+C_{\alpha\gamma}g]n_\gamma\frac{d^4\phi}{d\rho^4}\\
&\quad-[2D_{\alpha\gamma}\omega_\alpha\omega_\gamma+C_{\alpha\gamma}]n_\gamma C_1C_2\frac{d^2\phi}{d\rho^2}\\
\tilde{p}^*_{\alpha3}(\rho)&=C_\gamma(a_{\alpha\gamma}-f_\alpha\omega_\gamma)n_\gamma\frac{d^4\phi}{d\rho^4}\\
\tilde{p}^*_{33}(\rho)&=C_\gamma(f_\gamma-\beta_1\omega_\gamma)n_\gamma\frac{d^3\phi}{d\rho^3}+\alpha_1C_\gamma\omega_\gamma n_\gamma\frac{d^5\phi}{d\rho^5}
\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}\text{对 }\alpha,\beta\text{ 不求和}\\ \text{对 }\gamma\text{ 求和}\end{array} \tag{18}$$

式中:

$$d_a = a_{a\xi}\omega_\xi,\quad g = f_\xi\omega_\xi \text{ 对 } \xi \text{ 求和} \tag{19}$$

2. 基本解的数值计算

从广义位移和广义边界力的表达式(16)和(18)中可以看到它们涉及 $\phi(\rho)$ 及其各阶导数的计算. 下面我们首先讨论 $\phi(\rho)$ 及其各阶导数的计算公式，然后讨论基本解的数值计算.

(1) $\phi(\rho)$ 及其各阶导数

为了很方便地表示 $\phi(\rho)$ 及其各阶导数，我们引入下面两个函数：

$$\left.\begin{aligned} A_0(p\rho) &= e^{p\rho}\int_\rho^\infty \frac{e^{-p\sigma}}{\sigma}\,d\sigma - e^{-p\rho}\int_{-\infty}^\rho \frac{e^{p\sigma}}{\sigma}\,d\sigma \\ A_1(p\rho) &= e^{p\rho}\int_\rho^\infty \frac{e^{-p\sigma}}{\sigma}\,d\sigma + e^{-p\rho}\int_{-\infty}^\rho \frac{e^{p\sigma}}{\sigma}\,d\sigma \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

根据积分号下对参数的导数法则，上面两个函数 $A_0(p\rho)$ 和 $A_1(p\rho)$ 对变量 ρ 的导数具有下面的特性.

$$\frac{dA_0(p\rho)}{d\rho} = pA_1(p\rho) - \frac{2}{\rho}\quad \frac{dA_1(p\rho)}{d\rho} = pA_0(p\rho) \tag{21}$$

利用方程(20)和(21)，$\phi(\rho)$ 及其各阶导数可表述为如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \phi(\rho) &= \frac{1}{8\pi^2p^4a^2}\left(p^2\rho^2\ln|\rho| + 2\ln|\rho| + 3 + A_0(p\rho)\right) \\ \frac{d\phi}{d\rho} &= \frac{1}{8\pi^2p^4a^2}\left(2p^2\rho\ln|\rho| + p^2\rho + pA_1(p\rho)\right) \\ \frac{d^2\phi}{d\rho^2} &= \frac{1}{8\pi^2p^4a^2}\left(2p^2\ln|\rho| + 3p^2 + p^2A_0(p\rho)\right) \\ \frac{d^3\phi}{d\rho^3} &= \frac{1}{8\pi^2p^4a^2}\,p^3A_1(p\rho) \\ \frac{d^4\phi}{d\rho^4} &= \frac{1}{8\pi^2p^4a^2}\,p^4A_0(p\rho) \\ \frac{d^5\phi}{d\rho^5} &= \frac{1}{8\pi^2p^4a^2}\left(p^5A_1(p\rho) - \frac{2p^4}{\rho}\right) \\ \frac{d^6\phi}{d\rho^6} &= \frac{1}{8\pi^2p^4a^2}\left(p^6A_0(p\rho) + \frac{2p^4}{\rho^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

现在计算广义位移和广义边界力的问题转化为计算函数 $A_0(p\rho)$ 和 $A_1(p\rho)$ 的问题，这样一来就使得 $\tilde{u}^*_{ij}$，$\tilde{p}^*_{ij}$ 的计算显得简单明了.

(2) $A_0(p\rho)$ 和 $A_1(p\rho)$ 的计算公式

为了很方便地计算 $A_0(p\rho)$ 和 $A_1(p\rho)$，我们用指数积分 $E_i(p\rho)$ 和 $E_1(p\rho)$ 来表示 $A_0(p\rho)$ 和 $A_1(p\rho)$. 根据指数积分的定义[7]有：

a) $\rho > 0$

$$\left.\begin{aligned} A_0(p\rho) &= e^{p\rho}E_1(p\rho) - e^{-p\rho}E_i(p\rho) \\ A_1(p\rho) &= e^{p\rho}E_1(p\rho) + e^{-p\rho}E_i(p\rho) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

b) $\rho < 0$

$$\left.\begin{aligned} A_0(p\rho) &= -e^{-|p\rho|}E_i(|p\rho|) + e^{|p\rho|}E_1(|p\rho|) \\ A_1(p\rho) &= -e^{-|p\rho|}E_i(|p\rho|) - e^{|p\rho|}E_1(|p\rho|) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

式中 $E_1(p\rho)$ 和 $E_i(p\rho)$ 的近似计算公式分别见文献[7,3]。

(3) 基本解的数值计算

在计算基本解时，我们将遇到如下形式的积分：

$$I_1=\int_0^{2\pi}F_1(\theta)\frac{d^k\phi}{d\rho^k}d\theta \qquad k=1,2,3,4,5 \tag{25}$$

式中当被积函数在 $[0,2\pi]$ 之间变化时，存在使 ρ 为零的点。因而在数值积分时我们首先确定出使 $\rho=0$ 的 θ 值 θ_0；然后在计算过程中把 $[0,2\pi]$ 分成四个小区间。考虑到被积函数是周期函数，则四个小区间分别为：$\left[\theta_0,\ \theta_0+\frac{\pi}{2}\right]$、$\left[\theta_0+\frac{\pi}{2},\ \theta_0+\pi\right]$、$\left[\theta_0+\pi,\ \theta_0+\frac{3}{2}\pi\right]$、$\left[\theta_0+\frac{3}{2}\pi,\ \theta_0+2\pi\right]$，在每个小区间内采用高斯积分公式进行计算。每个小区间采用四点的高斯积分公式即可达到精度要求。确定 $\rho=0$ 的 θ 值用下面的公式计算：

$$\theta_0=\operatorname{arctg}\left(-\frac{x-\xi}{y-\eta}\right) \tag{26}$$

在计算内点应力时，存在对 $\phi(\rho)$ 的六阶导数，因而将遇到下面的积分：

$$I_2=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho^2}F_2(\theta)d\theta \tag{27}$$

其中 $F_2(\theta)$ 是随 θ 而变化的函数。由于 ρ 在 $[0,2\pi]$ 范围内有零点，因而积分 I_2 是发散积分。在一般意义下这种发散积分没有意义，但是如果从广义函数论的观点来理解积分 I_2，考虑发散积分的 Hadamard 有限部分，则积分 I_2 是有意义的。文献[2]对 $\int_0^b\frac{1}{x^2}f(x)dx$ 形式的积分给出了一般的处理办法，本文将根据文献[2]处理发散积分的思路来处理发散积分 I_2。我们注意到积分 I_2 的被积函数是周期函数，且在 $[0,2\pi]$ 范围内有两个奇异点，首先确定被积函数奇异点的值 θ_0，然后把 $[0,2\pi]$ 分成四个小区间，确定 θ_0 的值以及分区间的方式与前面相同。积分 I_2 可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}I_2=&\int_{\theta_0}^{\theta_0+\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\rho^2}(F_2(\theta)-F_2(\theta_0))d\theta+\int_{\theta_0+\frac{\pi}{2}}^{\theta_0+\pi}\frac{1}{\rho^2}(F_2(\theta)-F_2(\theta_0+\pi))d\theta\\&+\int_{\theta_0+\pi}^{\theta_0+\frac{3}{2}\pi}\frac{1}{\rho^2}(F_2(\theta)-F_2(\theta_0+\pi))d\theta+\int_{\theta_0+\frac{3}{2}\pi}^{\theta_0+2\pi}\frac{1}{\rho^2}(F_2(\theta)-F_2(\theta_0+2\pi))d\theta\end{aligned} \tag{28}$$

通过上述处理后，现在 I_2 是一个收敛的积分，因而可以用任何数值积分公式计算。本文采用高斯积分公式计算，效果良好。

四、正交各向异性厚板的边界元分析

1. 边界积分方程

计入剪切变形的正交各向异性厚板的边界积分方程可以很方便地利用加权余量法导出。最终形式如下：

$$c_{ij}(\zeta)u_i(\zeta)+\int_s p_{ij}^*(\zeta,x)u_i(x)ds=\int_s u_{ij}^*(\zeta,x)p_i(x)ds$$
$$+\int_\Omega u_{i3}^*(\zeta,x)q(x)d\Omega \tag{29}$$

式中 $c_{ij}(\zeta)$ 依赖于 ζ 的位置．如果 $\zeta\in\Omega$ 则 $c_{ij}(\zeta)=\delta_{ij}$；如果 ζ 在光滑边界上，则 $c_{ij}(\zeta)=\delta_{ij}/2$；如果 ζ 位于不光滑边界，则 $c_{ij}(\zeta)$ 依赖于边界的几何形状．一般说来如果 ζ 位于不光滑边界则很难解析地求得 $c_{ij}(\zeta)$．但是从数值计算的角度来看，可用文献[6]所采用的方法间接地求得 $c_{ij}(\zeta)$．从另一方面来看由于 ζ 点是人为选择的，因而选择 ζ 点时可以避开角点．边界积分方程 (29) 中的核函数见方程 (15)、(16) 和 (18)．

2. 数值处理

边界积分方程 (29) 只能数值的求解．本文采用下述的离散过程：将边界划分成具有 M 个结点的 N 个单元，把广义边界力和广义位移定义在这些结点上，两结点之间广义边界力和广义位移均采用线性插值．离散过程中采用线性连续元和线性部分不连续元[4]，靠近角点处采用线性部分不连续元，远离角点处采用线性连续元，以避免处理角点问题所带来的程序设计的复杂性．通过上述的离散过程并引入适当的边界条件，方程 (29) 转化为一组代数方程：

$$[K]\{X\}=\{P\} \tag{30}$$

上式中 $[K]$ 为系数矩阵，$\{X\}$ 为边界结点的未知量所组成的列向量，$\{P\}$ 为结点的荷载列向量．求解方程 (30) 即可得到所有边界未知量，求得边界未知量后，将其代入方程 (29) 即可求得域内任一点的广义位移；将方程 (29) 代入方程 (1) 并考虑微分是对 ζ 点则可求得域内任一点的广义内力．

五、算例与结论

1. 算例

为了验证文中所提出的计算公式的正确性以及解的精度，我们在 IBM-PC 机上编制了计算机程序，对具有不同比值 E_x/E_y 和不同 h 值的承受均布荷载的四边简支的方板和周边固支的圆板进行了边界元分析．本文的计算结果与已知的解析解和薄板解的比较

表 1　正交各向异性四边简支厚方板中心挠度

$\frac{E_x}{E_y}$	$\frac{a}{h/2}$	$\frac{E_y W_{max}}{q\ h/2\ a^4}$	
		本文	文献[5]
3	20	574.3762	586.6224
	10	42.06563	42.35701
10	20	310.9022	315.6320
	10	27.04617	27.15566

表 2　正交各向异性周边固支厚圆板的中心挠度

$\frac{E_x}{E_y}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{E_y W_c}{q a^4}$ 本　文	$\frac{E_y W_c}{q a^4}$ 薄板解[8]
3	10	103.7809	98.9057
	5	16.32336	12.3632
10	10	51.14804	41.5389
	5	9.98845	5.1924

表 3　正交各向异性周边固支厚圆板的中心弯矩

$\frac{E_x}{E_y}$	$\frac{a}{h}$	本　文		薄板解[8]	
		$\frac{M_{xx}}{qa^2}$	$\frac{M_{yy}}{qa^2}$	$\frac{M_{xx}}{qa^2}$	$\frac{M_{yy}}{qa^2}$
3	10	0.1089584	0.0424345	0.1094276	0.0420875
	5	0.1104649	0.0473511	0.1094276	0.0420875
10	10	0.1468117	0.0203297	0.1428173	0.0174168
	5	0.1483345	0.0281589	0.1428173	0.0174168

表 4　正交各向异性周边固支厚圆板的边界弯矩

$\frac{E_x}{E_y}$	$\frac{a}{h}$	本　文		薄板解[8]	
		$\left.\frac{M_{xx}}{qa^2}\right\vert_{x=a, y=0}$	$\left.\frac{M_{yy}}{qa^2}\right\vert_{x=0, y=a}$	$\left.\frac{M_{xx}}{qa^2}\right\vert_{x=a, y=0}$	$\left.\frac{M_{yy}}{qa^2}\right\vert_{x=0, y=a}$
3	10	−0.2023033	−0.0692860	−0.2020202	−0.0673401
	5	−0.1969599	−0.0809654	−0.2020202	−0.0673401
10	10	−0.2815692	−0.0373753	−0.2786679	−0.0278668
	5	−0.2552864	−0.0596292	−0.2786679	−0.0278668

详见表 1—4. 计算过程中全边界划分成 16 个单元. 表 1—4 中所用的材料常数以及一些参数定义如下:

$$G_{yz}=0.5E_y,\ G_{xy}=G_{xz}=0.6E_y,\ \mu_{xy}=0.25.$$

a——对于方板为板的边长,对于圆板为板的半径. q——均布荷载.

从表 2—4 可以看到当 h 很小且 $\frac{E_x}{E_y}$ 不大时本文解趋于薄板解，这与实际情况是相吻合的。

2. 结论

本文导出的正交各向异性厚板的基本解的形式较为简单，计算简便。从边界元分析的数值结果来看，本文的数值结果具有较高的计算精度。 本文方法易于推广到一般各向异性厚板和各向异性扁壳的边界元分析。

参 考 文 献

[1] Hörmander, L., Linear Partial Differential Operators, Springer-Verleg, Berlin (1963).

[2] Gel'fand, I. M. and Shilov, G. E., Generalised Function, Academic Press, Inc. New York, 1 (1967).

[3] Cody, W. J. and Henry, C. Thacher Jr., Chebyshev approximations for the exponential integral $E_i(x)$, *Math. Comp.*, **23**.(1969), 289—303.

[4] Patterson, C. and Sheikh, M. A., Interelement Continuity in Boundary Element Methods, in Topics in Boundary Element Research (Ed., C. A. Brebbia), 1, (1984).

[5] Sundara, K. T. and Raja Iyengar, Analysis of orthotropic rectanglar thick plates, *Fibre Science and Technology*, **18**, (1983), 19—36.

[6] F. Vander Weeën, Application of the direct boundary integral equation method to reissner's plate model, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **18**, (1982), 1—10.

[7] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, National Bureau of Standards Applied Mathematics series. 55 (1965).

[8] 列赫尼茨基，各向异性板，科学出版社 (1963).

[9] 何广乾，林春哲，邵辣子，任意二次型双曲扁壳的基本解，上海力学，2 (1984), 1—11.

[10] 曹志远，杨昇田，厚板动力学理论及其应用，科学出版社 (1983).

BOUNDARY ELEMENT METHOD OF THE ORTHOTROPIC THICK PLATES

Wang Jianguo

(*Hefei Polytechnic University*)

Huang Maokuang

(*University of Science and Technology of China*)

Abstract In this paper the fundamental solutions of the orthotropic thick plate involving transvere shear deformation are presented by using Hormander's method and plane wave decomposition. The boundary integral equations of the thick plates are obtained, which are adapted to arbitrary boundary conditions and plane forms. The numerical calculations of the fundamental solutions are discussed in detail. Some of numerical examples are analyzed with B.E.M.

Key words the orthotropic thick plate, the fundamental solutions, B.E.M.