

具有随机参数的含裂纹板弯曲应力 强度因子的统计分析¹⁾

任永坚 朱位秋 丁浩江 胡海昌
(浙江大学力学系)

摘要 本文首次应用随机有限元法研究了具有随机参数的含裂纹板裂纹尖端弯曲应力强度因子的统计性质。文中首先给出了杂交模式的裂纹尖端奇异单元的刚度矩阵,然后基于随机场的局部平均理论和一阶泰勒展开得到了应力强度因子均值和方差的计算公式。作为数例,详细讨论了杨氏模量、泊松比及板厚度的不确定性对应力强度因子的影响。

关键词 裂纹板,随机有限元法,应力强度因子,统计分析

一、引言

由于结构的材料与/或几何参数随空间坐标的随机变化,引起裂纹尖端应力场的不确定性。这种不确定性在疲劳裂纹的扩展中有着明显的影响。其主要表现为裂纹扩展速率的不确定性与裂纹路径的不确定性。Virkler 的实验^[1]已证实了这种效应的存在。目前,在疲劳裂纹的扩展研究中,这种效应是通过裂纹扩展规律的随机化^[2,3]来计及的。由于裂纹扩展规律主要由裂纹尖端的应力场所决定,故本文试想根据结构材料与/或几何参数的统计特性推出应力强度因子的统计特性。

本文应用基于随机场局部平均的随机有限元法^[4,5]分析具有随机参数的含裂纹板的弯曲应力强度因子的统计特性。随空间坐标随机变化的材料与/或几何参数可模型化为随机场。文中首先推导了基于 Reissner 变分原理的杂交板弯曲裂纹单元的有限元刚度矩阵,单元内的应力插值包含奇异项从而应力强度因子可从平衡方程直接求得^[6],然后给出了应力强度因子均值和方差的计算公式。最后以具有不确定的杨氏模量、泊松比和厚度的含中心穿透裂纹方板为例,计算了弯曲应力强度因子的方差,讨论了这些不确定参数对计算结果的影响。本文是随机有限元法应用于断裂力学的一个先例。

二、裂纹单元的刚度矩阵

板的二类变量 Reissner 广义变分原理的势能泛函为

$$\pi_2 = \int_{\Omega} \left[\sigma^T L(\nabla)u - \frac{1}{2} \sigma^T a \sigma - f^T u \right] d\Omega$$

1) 国家自然科学基金资助项目
本文于1989年9月16日收到。

$$- \int_{C_1} T_n^T (u_n - \bar{u}_n) dC - \int_{C_2} \bar{T}_n^T u_n dC \quad (1)$$

式中 Q 为板的中面面积, C_1, C_2 分别为具有指定位移和外力的边界。式中各量为

$$\sigma = [M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y]^T \quad (2)$$

$$u = [\varphi_x, \varphi_y, w]^T \quad (3)$$

$$f = [m_x, m_y, q]^T \quad (4)$$

$$L(\nabla) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5)$$

a 为 5×5 柔度矩阵。设裂纹单元内的位移和内力均由奇异和非奇异两部份组成, 即

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_s = R_r \beta_r + R_s \beta_s \quad (6)$$

$$u = u_r + u_s = S_n \cdot \delta + N_i \cdot \lambda \quad (7)$$

式中 S_n 为协调位移 u_r 的节点形函数, N_i 为奇异位移 u_s 的插值函数, δ, λ 分别为节点自由度向量和奇异位移参数。对常规单元只取非奇异部份。设含裂纹板划分有限元网格后前 N_r 个单元为常规单元, 后 $N - N_r$ 个单元为裂纹边奇异单元, 则 π_2 写成各单元的广义势能之和为

$$\pi_2 = \sum_{i=1}^{N_r} \pi_{2i}^r + \sum_{i=N_r+1}^N (\pi_{2i}^s + \pi_{2i}^{r'}) \quad (8)$$

式中 $\pi_{2i}^{r'}$ 的引入是由于在裂纹单元和常规单元的接触面上位移和应力的不连续。将这一部份广义势能归入奇异单元, 则

$$\pi_{2i}^s = \int_{Q_i} \left[\sigma^T L(\nabla) u_r - \frac{1}{2} \sigma^T a \sigma - f^T u_r \right] dQ - \int_{C_{2i}} \bar{T}_n^T u_n dC \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \pi_{2i}^s + \pi_{2i}^{r'} = & \int_{Q_i + Q_i'} \left[\sigma^T L(\nabla) u - \frac{1}{2} \sigma^T a \sigma - f^T u \right] dQ \\ & - \int_{C_{1i} + C_{1i}'} T_n^T u_n dC - \int_{C_{2i} + C_{2i}'} \bar{T}_n^T u_n dC \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式中 Q_i' 为包含裂纹单元和常规单元之间位移和应力间断线的微小区域 (图 1)。 Q_i' 的引入保证了 π_{2i}^s 在 Q_i 内积分的被积函数为一个连续函数。经过对不连续位移和应力的处理^[7], 上式可化为

$$\pi_{2i}^s + \pi_{2i}^{r'} = \int_{Q_i} \left\{ \sigma^T L(\nabla) u_r - \frac{1}{2} \sigma^T a \sigma - [L^*(\nabla) \sigma + f]^T u_r - f^T u_r \right\} dQ$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{c'} \frac{1}{2} T_{n,i}^T u_i dC + \int_{c''} T_{n,i}^T u_i dC + \int_{c_{ii}} (T_n - \bar{T}_n)^T u_i dC \\
 & - \int_{c_{ii}} \bar{T}_n^T u_i dC \tag{11}
 \end{aligned}$$

式中算子 L^* 为算子 L 的共轭算子, $T_n = L^*(\nu)\sigma, T_{n,r} = L^*(\nu)\sigma_r, T_{n,i} = L^*(\nu)\sigma_i$. C', C'' 分别为裂纹单元内边界上位移不连续部份和连续部份. 将(6), (7)式的位移和内力模式代入上式, 得

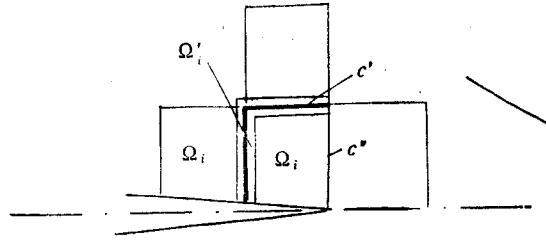


图 1 裂纹单元和常规单元的连接面

$$\begin{aligned}
 \pi_{i,i}^* + \pi_{i,i}^* &= \beta_i^T G_i \delta + \beta_i^T G_r \delta \\
 & - \frac{1}{2} \beta_i^T H_i \beta_i - \beta_i^T H_{r,i} \beta_i \\
 & - \frac{1}{2} \beta_i^T H_r \beta_r + \beta_i^T P_i \lambda + \beta_i^T P_r \lambda - F^T \delta - F_i^T \lambda \tag{12}
 \end{aligned}$$

式中

$$G_i = \int_{\Omega_i} R_i^T L(\nabla) S_n d\Omega \tag{13 a}$$

$$G_r = \int_{\Omega_i} R_i^T L(\nabla) S_n d\Omega \tag{13 b}$$

$$H_i = \int_{\Omega_i} R_i^T a R_i d\Omega \tag{13 c}$$

$$H_{r,i} = \int_{\Omega_i} R_i^T a R_i d\Omega \tag{13 d}$$

$$H_r = \int_{\Omega_i} R_i^T a R_i d\Omega \tag{13 e}$$

$$P_r = \int_{c_i} [L^*(\nu)R_i]^T N_i dC + \int_{c''} [L^*(\nu)R_i]^T N_i dC - \int_{\Omega_i} [L^*(\nabla)R_i]^T N_i d\Omega \tag{13 f}$$

$$\begin{aligned}
 P_i &= \int_{c_i} [L^*(\nu)R_i]^T N_i dC + \int_{c''} [L^*(\nu)R_i]^T N_i dC \\
 & + \frac{1}{2} \int_{c'} [L^*(\nu)R_i]^T N_i dC - \int_{\Omega_i} [L^*(\nabla)R_i]^T N_i d\Omega \tag{13 g}
 \end{aligned}$$

$$F^T = \int_{c_i} \bar{T}_n^T S_n dC + \int_{\Omega_i} f^T S_n d\Omega \tag{13 h}$$

$$F_i^T = \int_{c_i} \bar{T}_n^T N_i dC + \int_{\Omega_i} f^T N_i d\Omega \tag{13 i}$$

奇异单元的奇异位移参数 λ 和非奇异内力参数 β_r 为单元的内部参数, 将(12)式对 λ, β_r 取驻值并解出 λ, β_r , 得

$$\beta_r = H_r^{-1}(\bar{G}_r \delta - \bar{H}_r \beta_i - \bar{E}) \tag{14}$$

$$\lambda = A(F_i - P_i H_r^{-1} G_r \delta + (P_i^T H_r^{-1} H_i^T - P_i^T) \beta_i) \tag{15}$$

式中

$$\begin{aligned} A &= (P_r^T H_r^{-1} P_r)^{-1} \\ \bar{G}_r &= G_r - P_r A P_r^T H_r^{-1} G_r \\ \bar{H}_r &= H_r^T - P_r A (P_r^T H_r^{-1} H_r^T - P_r^T) \\ E &= -P_r A F_r \end{aligned} \quad (16)$$

其中 A 为对称矩阵。将(14),(15)式代入(12)式,得

$$\pi_{ii}^r + \pi_{ii}^s = \frac{1}{2} \delta^T k_{rr} \delta + \frac{1}{2} \beta_i^T k_{is} \beta_i + \beta_i^T k_{is} \delta - \delta^T \bar{F} - \beta_i^T \bar{F}_i - \bar{Q} \quad (17)$$

式中

$$k_{rr} = \bar{G}_r^T H_r^{-1} \bar{G}_r, \quad (18a)$$

$$k_{rs} = G_s - 2\bar{H}_r^T H_r^{-1} \bar{G}_r - P_s A P_r^T H_r^{-1} G_r, \quad (18b)$$

$$k_{ss} = -H_s + \bar{H}_r^T H_r^{-1} \bar{H}_r + P_s A P_r^T H_r^{-1} H_r^T + H_{ss} H_r^{-1} P_s A P_r^T - 2P_s A P_r^T \quad (18c)$$

$$\bar{F} = F + (G_r + \bar{G}_r)^T H_r^{-1} \bar{E} \quad (18d)$$

$$\bar{F}_i = -(H_{is}^T + \bar{H}_r)^T H_r^{-1} \bar{E} - 2P_s A P_r, \quad (18e)$$

$$\bar{Q} = F_s^T A F_r - \bar{E}^T H_r^{-1} \bar{E} \quad (18f)$$

式(6)、(7)中裂纹单元位移和应力插值的奇异部份可取为板弯曲裂纹尖端应力应变场的渐近解^[6], β_i 即为裂纹尖端的应力强度因子列阵。文[7]具体给出了一类四节点板和柱壳裂纹单元。

三、应力强度因子的统计分析

由(17)式知,组集后的有限元平衡方程可写为

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rs} \\ K_{rs}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (19)$$

式中 U 为总体未知节点自由度列阵, β_i 为所求的应力强度因子列阵, F_r 、 F_s 为对应的广义等效外力, K_{rr} 、 K_{rs} 和 K_{ss} 为总体刚度矩阵的子块。由于结构含有随机材料参数和几何参数以及可能承受随机外载荷,总体刚度矩阵和等效节点力从而节点自由度列阵和应力强度因子列阵均是空间的随机函数。将各量写成均值和增量之和的形式

$$[\bar{K}_{rr} + \Delta K_{rr}] \{\bar{U} + \Delta U\} + [\bar{K}_{rs} + \Delta K_{rs}] \{\bar{\beta}_i + \Delta \beta_i\} = \{\bar{F}_r + \Delta F_r\} \quad (20)$$

$$[\bar{K}_{rs} + \Delta K_{rs}]^T \{\bar{U} + \Delta U\} + [\bar{K}_{ss} + \Delta K_{ss}] \{\bar{\beta}_i + \Delta \beta_i\} = \{\bar{F}_s + \Delta F_s\} \quad (21)$$

两边取期望,设各量的变化相对均值来说在统计意义上是小的,忽略高阶量,即取一阶近似,得

$$\bar{K}_{rr} \bar{U} + \bar{K}_{rs} \bar{\beta}_i = \bar{F}_r \quad (22)$$

$$\bar{K}_{rs}^T \bar{U} + \bar{K}_{ss} \bar{\beta}_i = \bar{F}_s \quad (23)$$

及

$$\Delta K_{rr} \bar{U} + \bar{K}_{rr} \Delta U + \Delta K_{rs} \bar{\beta}_i + \bar{K}_{rs} \Delta \beta_i = \Delta F_r \quad (24)$$

$$\Delta K_{rs}^T \bar{U} + \bar{K}_{rs}^T \Delta U + \Delta K_{ss} \bar{\beta}_i + \bar{K}_{ss} \Delta \beta_i = \Delta F_s \quad (25)$$

(22)、(23)式可解出应力强度因子的均值

$$\bar{\beta}_i = [\bar{K}_{ss} - \bar{K}_{rs}^T \bar{K}_{rr}^{-1} \bar{K}_{rs}]^{-1} (\bar{F}_s - \bar{K}_{rs}^T \bar{K}_{rr}^{-1} \bar{F}_r) \quad (26)$$

可见应力强度因子的均值和确定性有限元得到的一致。由(24)式得

$$\Delta U = \bar{K}_{,,}^{-1}(\Delta F, -\Delta K_{,,}\bar{U} - \bar{K}_{,,}\Delta\beta, -\Delta K_{,,}\bar{\beta},) \quad (27)$$

将上式代入(25)式,得

$$\begin{aligned} (\bar{K}_{,,} - \bar{K}_{,,}^T \bar{K}_{,,}^{-1} \bar{K}_{,,}) \Delta\beta, &= \Delta F, - \Delta K_{,,}^T \bar{U} - \Delta K_{,,} \bar{\beta}, \\ &+ \bar{K}_{,,}^T \bar{K}_{,,}^{-1} \Delta K_{,,} \bar{U} + \bar{K}_{,,}^T \bar{K}_{,,}^{-1} \Delta K_{,,} \bar{\beta}, - \bar{K}_{,,}^T \bar{K}_{,,}^{-1} \Delta F, \end{aligned} \quad (28)$$

即

$$\Delta\beta, = C(\Delta F + \Delta K_{,,}\bar{U} + \Delta K_{,,}\bar{\beta},) \quad (29)$$

式中

$$C = (\bar{K}_{,,} - \bar{K}_{,,}^T \bar{K}_{,,}^{-1} \bar{K}_{,,})^{-1} \quad (30 a)$$

$$K_{,,} = \bar{K}_{,,}^T \bar{K}_{,,}^{-1} K_{,,} - K_{,,}^T \quad (30 b)$$

$$K_{,,} = \bar{K}_{,,}^T \bar{K}_{,,}^{-1} K_{,,} - K_{,,} \quad (30 c)$$

$$F = F, - \bar{K}_{,,}^T \bar{K}_{,,}^{-1} F, \quad (30 d)$$

取一阶泰勒展开

$$\Delta K_{,,}\bar{U} = \frac{\partial(K_{,,}\bar{U})}{\partial\{Y\}} \{\Delta Y\} \quad (31)$$

$$\Delta K_{,,}\bar{\beta}, = \frac{\partial(K_{,,}\bar{\beta},)}{\partial\{Y\}} \{\Delta Y\} \quad (32)$$

式中 $\{Y\}$ 为不均匀材料参数和几何参数在各单元上的局部平均所组成的向量^[4,5]。应力强度因子的方差为

$$\begin{aligned} C_{\sigma\sigma}(\Delta\beta,,\Delta\beta,,)^T &= C \cdot \left[C_{\sigma\sigma}(\Delta F, \Delta F^T) + \frac{\partial(K_{,,}\bar{U} + K_{,,}\bar{\beta},)}{\partial\{Y\}} \right. \\ &\left. \cdot C_{\sigma\sigma}(\Delta Y, \Delta Y^T) \cdot \left(\frac{\partial(K_{,,}\bar{U} + K_{,,}\bar{\beta},)}{\partial\{Y\}} \right) \right] \cdot C^T \end{aligned} \quad (33)$$

计算(31)、(32)式需要用到柔度矩阵的逆阵对随机变量的偏导数。因为 $H,$ 对称正定,有

$$H, H,^{-1} = I \quad (34)$$

式中 I 为单位阵。两边取偏导,则

$$\frac{\partial H,}{\partial\{Y\}} H,^{-1} + H, \cdot \frac{\partial H,^{-1}}{\partial\{Y\}} = 0 \quad (35)$$

取一阶近似即得

$$\frac{\partial H,^{-1}}{\partial\{Y\}} = -\bar{H},^{-1} \cdot \frac{\partial H,}{\partial\{Y\}} \bar{H},^{-1} \quad (36)$$

由(16)式可得

$$\frac{\partial A}{\partial\{Y\}} = -AP,^T \frac{\partial H,^{-1}}{\partial\{Y\}} P, A \quad (37)$$

$$\frac{\partial \bar{G},}{\partial\{Y\}} = -P, AP,^T \cdot \frac{\partial H,^{-1}}{\partial\{Y\}} \bar{G}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial \bar{H},}{\partial\{Y\}} = \frac{\partial H,^T}{\partial\{Y\}} - P, AP,^T H,^{-1} \frac{\partial H,^T}{\partial\{Y\}} - P, AP,^T \frac{\partial H,^{-1}}{\partial\{Y\}} \bar{H}, - P, AP,^T \frac{\partial H,^{-1}}{\partial\{Y\}} P, AP,^T \quad (39)$$

从上面三式和(18)式可求得裂纹单元刚度矩阵对随机参数的偏导数。

四、数 例

图 2 所示含中心穿透裂纹方板,受四边均匀弯矩 $M=1$ 作用,边长 $2L$, 裂纹长 $2a$, 四边设为自由。考虑三种随机性,即(1)杨氏模量 E 随坐标 (x,y) 的不确定性;(2)泊松比 ν 随坐标 (x,y) 的不确定性;(3)板厚 h 随坐标 (x,y) 的不确定性。单元划分时在裂纹尖端划分两个四节点杂交板弯曲裂纹单元,其余常规单元采用文[9]的四节点板弯曲通用单元。

设杨氏模量、泊松比及板厚均为坐标 (x,y) 的二维均匀可分离随机场

$$E = \bar{E}(1 + k_e \lambda(x,y))$$

$$\nu = \bar{\nu}(1 + k_\nu \lambda(x,y))$$

$$h = \bar{h}(1 + k_h \lambda(x,y))$$

式中“—”表示均值。设归一化随机场 λ 具有三角分布的相关函数

$$\rho_\lambda(x,y) = \rho(x)\rho(y)$$

式中

$$\rho(r) = \begin{cases} 1 - \frac{|r|}{\theta}, & |r| \leq \theta \\ 0 & |r| > \theta \end{cases}$$

其中 θ 为相关尺度, k_e 、 k_ν 、 k_h 为表征随机参数平均偏差的系数。计算时取 $k_e = k_\nu = k_h = 0.1$, $\bar{E} = 10^4$, $\bar{\nu} = 0.3$, $\bar{h} = 1.0$ 及 $L = 10$, $a = 1.0$ 。裂纹尖端应力强度因子的标准差 σ_{K_I} 和均值 \bar{K}_I 之比的计算结果绘于图 3。

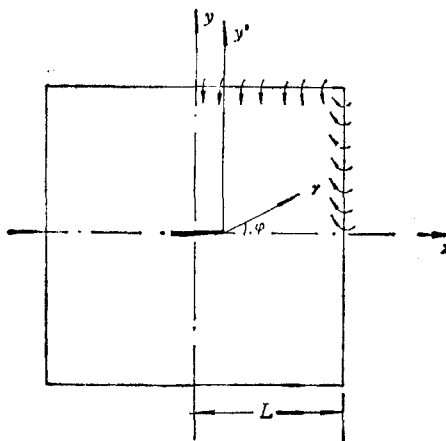


图 2 含中心穿透裂纹的方板

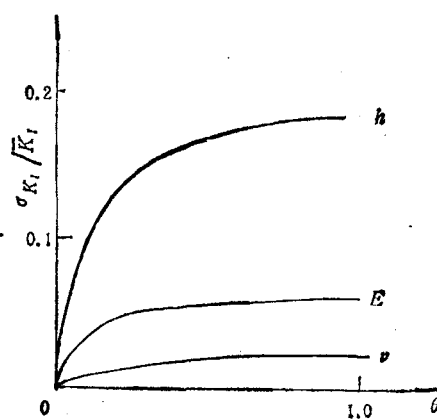


图 3 板的随机参数对应力强度因子的影响

由于采用线弹性理论和一阶泰勒展式的随机有限元公式,应力强度因子的标准差是偏差系数 k_e 、 k_ν 、 k_h 的线性函数。图 3 给出应力强度因子的标准差随相关尺度 θ 的变化曲线,其中 σ_{K_I} 为应力强度因子的标准差, \bar{K}_I 为均值。显然当随机参数的相关性较严重时,即相关尺度较大时,应力强度因子的标准差也较大,一种极限情况是 θ 为无限大,即

随机参数在空间各点完全相关。由图可知, 各参数的不均匀性对应力强度因子的影响程度是不同的, 在同样的条件下 ($k_e = k_\nu = k_i = 0.1$), 板厚的不均匀性对应力强度因子的影响相对地最大, 杨氏模量的影响其次, 而泊松比的影响较小。

表 1 给出应力强度因子的标准差随单元网格数的变化趋势。裂纹单元的尺寸保持不变, 边长均取半裂纹长的十分之一。可以看到, 随网格加密, 应力强度因子的标准差和均值之比趋于变小。由于没有理论解或实验解比较, 故难以判别其收敛性和精度, 但从表中可以看出, 应力强度因子的标准差对网格的依赖性较强。

表 1 应力强度因子的标准差与均值之比随网格的变化

随机参数	σ_{K_i}/\bar{K}_i	网格		
		6×6	8×8	10×10
E		0.06138	0.05964	0.05391
h		0.1847	0.1801	0.1634
ν		0.02229	0.01835	0.01673

表 2 为材料与几何参数的不同相关结构对应力强度因子的标准差与均值之比的影 响。计算时保持各相关结构的相关尺度相等。和以前对位移和应力标准差的结论一致^[4,5], 计算结果对随机参数相关结构的具体形式不敏感, 因此可任意假设为某种相关结构模型而不致引起较大的误差。

表 2 应力强度因子的标准差关于随机参数相关结构的敏感性

随机参数	σ_{K_i}/\bar{K}_i	相关结构		
		指数型	二阶 AR 型	三角型
E		0.06510	0.05966	0.05958
h		0.1970	0.1812	0.1801
ν		0.01637	0.01813	0.01835

参 考 文 献

- [1] Virkler, D.A. et al., The statistical nature of fatigue crack propagation, *J. of Eng. Mater. & Technol.*, **12**, (1979), p. 148.
- [2] Ortiz, K., Stochastic modelling of fatigue crack growth, *Eng. Fract. Mech.*, **29**, 3 (1988), p. 317.
- [3] Ortiz, K., Time series analysis of fatigue crack growth rate data, *Eng. Fract. Mech.*, **24**, 5 (1986), p. 657.
- [4] 朱位秋、任永坚, 随机场的局部平均和随机有限元法, *航空学报* **7**, 6(1986), p. 604.
- [5] 朱位秋、任永坚, 基于随机场局部平均的随机有限元法, *固体力学学报*, **9**, 4(1988), p. 285.
- [6] 孟广伟、张理芬, 用杂交/混合奇异有限元法计算应力强度因子, *计算结构力学及其应用*, 3(1987), p. 53.
- [7] 任永坚、丁浩江、胡海昌, 板壳弯曲应力强度因子的有限元分析, 待发表.

- [8] 柳春图, 承受弯曲的板在裂纹尖端附近的应力应变场, 固体力学学报, 3(1983), p.441.
[9] 任永坚, 丁浩江, 一类剪应变插值近似的杂交板弯曲通用单元, 应用力学学报, 1989, (待发表)

STATISTICAL ANALYSIS OF BENDING STRESS INTENSITY FACTORS FOR CRACKED PLATE WITH UNCERTAIN PARAMETERS

Ren Yongjian Zhu Weiqiu Ding Haojiang Hu Haichang

(Department of Mechanics, Zhejiang University)

Abstract This paper applies stochastic finite element method based on local averages of random fields to analyse statistical features of bending stress intensity factors for cracked plates with uncertain parameters. The stiffness matrix of a hybrid crack-tip singular element is first derived, then by use of first-order Taylor expansion the mean and variance of stress intensity factors are formulated. As an example the effects of uncertainties of Young's modulus, Poisson's ratio and plate thickness on plate bending stress intensity factors are investigated in detail.

Key words cracked plate, stress intensity factors statistical analysis