

无奇异性边界积分方程法¹⁾

雷小燕 王秀喜 黄茂光
(中国科学技术大学近代力学系)

提要 边界元法中如何有效地处理奇异积分,一直是人们极为关心的课题。本文提出了建立由“线源”产生的边界积分方程,其优点是可任意阶地降低奇异性阶次。计算实例表明,本文所提出的方法优于常规的边界元法。尤其是提高了位移的计算精度。对边界单元网格不等长划分,更显示出该法的优越性。

关键词 边界积分方程,奇异性

一、引言

边界元法中奇异积分的数值处理正确与否直接影响了其计算精度。平面问题的边界积分方程中含 $1/r$ 阶奇异性,其中 r 是源点到场点的距离。通常在奇异点附近采用高阶高斯积分^[1]。作者在文献[8]中讨论了奇异积分精度对数值结果的影响。文献[2]根据数值积分收敛性,分析了各种奇异性函数积分和高斯积分阶次的关系。利用刚体位移的概念可避免奇异积分和哥西主值的计算^[3]。边界元法解薄板弯曲的边界积分方程中,其最高奇异性阶次为 $1/r^2$,按常规的边界离散格式,该项积分发散。如何避免高阶奇异性,Bezine^[4]采用分部积分,结果出现了在边界上对挠度沿切向导数项,以致自由边界未知量的精度降低一阶。Stern^[5]对挠度的插值函数在作用点附近展开,然后再求导。然而对这类高阶奇异性的边值问题,在自由边界难以得到较高的精度。Stefano^[6]等人由分布理论,导出弱奇异性边界积分方程,其边界场变量采用常元插值,并给出平面应力问题的算例,但他们没讨论如何消去高阶奇异性及数值稳定性等问题。

本文提出由“线源”产生的边界积分方程,其优点是可消去任意高阶奇异性函数的边值问题,边界场变量采用线性插值。并详细讨论了如何将由“线源”产生的重积分变换成线积分及弱奇异积分的解析表达式。平面应力问题的算例表明,其系数矩阵具极好的稳定性,尤其对不等长的边界网格划分,数值结果优于一般的边界元法。

二、“线源”产生的边界积分方程

以下我们以平面应力问题为例,其边界积分方程可写成

$$C_{ij}u_j(P) = \int_{\Gamma_0} u_{ij}^*(P, Q)q_i(Q)d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} q_{ij}^*(P, Q)u_j(Q)d\Gamma_0 \quad (1)$$

1) 国家自然科学基金资助的课题。
本文于1990年1月19日收到。

其中 P 和 Q 分别表示源点和场点。将边界 Γ 划分成 N 个单元, 考虑边界单元 Γ_{pm} , 取 Γ_{pm} 为“线源”。同时取权函数 $g(p)$, 它是沿 Γ_{pm} 坐标长度变化的函数, $g(p)$ 的选取根据被积函数的奇异性来定, 后面将详细讨论。(1)式两端乘以 $g(p)$, 并沿边界线段 Γ_{pm} 积分该式, 由此得:

$$C_{ij} \int_{\Gamma_{pm}} u_i(P) g(P) d\Gamma_{pm} = \int_{\Gamma_{pm}} \int_{\Gamma_Q} g(P) u_{ij}^*(P, Q) q_j(Q) d\Gamma_Q d\Gamma_{pm} - \int_{\Gamma_{pm}} \int_{\Gamma_Q} g(P) q_{ij}^*(P, Q) u_j(Q) d\Gamma_Q d\Gamma_{pm} \quad (2)$$

离散方程(2), 考虑场点的离散单元 Γ_{Qn} 和方程(2)式右端第一项,

$$G_{mn} = \int_{\Gamma_{pm}} \int_{\Gamma_{Qn}} g(P) u_{ij}^*(P, Q) q_j(Q) d\Gamma_{pm} d\Gamma_{Qn} \quad (3)$$

对边界线元和边界场变量均采用线性插值

$$F = F_1 N_1 + F_2 N_2 \quad (4)$$

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5)$$

其中 F 表示边界单元坐标或边界场变量。在此我们约定场点 Q 和源点 P 的变量分别对应局部坐标 ξ 和 η 。这时“线源” Γ_{pm} 对 Γ_{Qn} 的影响系数用 G_{mn1} 和 G_{mn2} 表示, 则 G_{mn} 表为

$$G_{mn} = G_{mn1} q_{n1} + G_{mn2} q_{n2} \quad (6)$$

$$G_{mnk} = \frac{1}{4} L_{pm} L_{Qn} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\eta) u_{ij}^*(\xi, \eta) N_k(\xi) d\xi d\eta \quad (7)$$

其中 $k = 1, 2$, q_{nk} 表示边界第 n 个单元上两端点的应力分量。

三、重积分变换法

上节导出影响系数 G_{mnk} , 如何将其重积分变换成线积分直接关系到该法的实用和有效性。下面我们讨论在边界任意几何形状情况下, (3)式中 G_{mnk} 的变换法。由(4)式, 场点坐标和源点坐标可用局部坐标表示为

$$\left. \begin{aligned} X_Q &= \frac{1}{2}(X_{Q2} + X_{Q1}) + \frac{1}{2}(X_{Q2} - X_{Q1})\xi \\ Y_Q &= \frac{1}{2}(Y_{Q2} + Y_{Q1}) + \frac{1}{2}(Y_{Q2} - Y_{Q1})\xi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} X_P &= \frac{1}{2}(X_{P2} + X_{P1}) + \frac{1}{2}(X_{P2} - X_{P1})\eta \\ Y_P &= \frac{1}{2}(Y_{P2} + Y_{P1}) + \frac{1}{2}(Y_{P2} - Y_{P1})\eta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中下标“1”和“2”分别表示边界单元两 endpoint。令

$$\left. \begin{aligned} X_Q - X_P &= c_1 + c_2 \xi - c_3 \eta = r \cos \theta \\ Y_Q - Y_P &= b_1 + b_2 \xi - b_3 \eta = r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 c_i 和 $b_i (i = 1, 2, 3)$ 由(8)和(9)式导出, 是与边界单元坐标有关的常数。雅可比变换式为

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(r, \theta)} = \frac{1}{a} r dr d\theta \quad (11)$$

其中

$$a = b_2 c_3 - c_2 b_3 \quad (12)$$

当 $a \neq 0$, 由(10)式可导出

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{a} [r(c_3 \sin \theta - b_3 \cos \theta) + b_3 c_1 - b_1 c_3] \\ \eta &= \frac{1}{a} [r(c_2 \sin \theta - b_2 \cos \theta) + b_2 c_1 - b_1 c_2] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

将(11)和(13)式代入(7)式, $\xi = \pm 1$ 和 $\eta = \pm 1$ 可定义柱坐标系 (r, θ) 中的积分区间如图 1. 图中 $ABCD$ 所围成的棱形用 $\Gamma_{(r, \theta)}$ 表示. 经过坐标变换式(10), 方程(7)可写成

$$G_{mnk} = \frac{1}{4a} L_{Pm} L_{Qn} \iint_{\Gamma_{(r, \theta)}} g(r, \theta) u_{ii}^*(r, \theta) N_k(r, \theta) r dr d\theta \quad (14)$$

上式中, 沿径向 r 的积分很容易解析地推导出来, 至此(14)式可表为沿 θ 方向的单变量积分.

当 $a = 0$ 时, 表明边界单元 Γ_{Pm} 和 Γ_{Qn} 平行, 首先我们讨论 $m \neq n$ 时的情况. 设 $c_2 \neq 0$, (10)式为:

$$\left. \begin{aligned} X_Q - X_P &= c_1 + c_2 \xi - c_3 \eta \\ Y_Q - Y_P &= b_1 + k(c_2 \xi - c_3 \eta) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中 $k = b_2/c_2 = b_3/c_3$, 令

$$U = c_2 \xi - c_3 \eta, \quad V = c_3 \xi + c_2 \eta \quad (16)$$

则雅可比式

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(U, V)} = \frac{1}{A} \quad (17)$$

其中 $A = c_2^2 + c_3^2$, 由 $\xi = \pm 1$ 和 $\eta = \pm 1$ 可定义直角坐标系 (U, V) 中的积分区间如图 2, 图中 $ABCD$ 所围成的四边形区间由 $\Gamma_{(U, V)}$ 表示, 将(16)和(17)式代入(7)式得

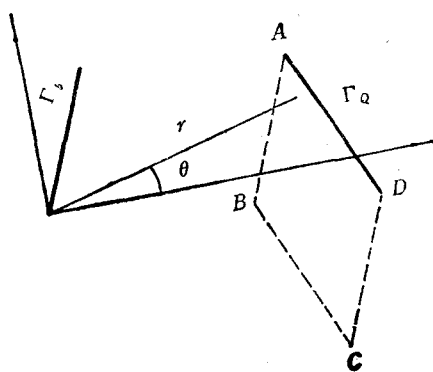


图 1

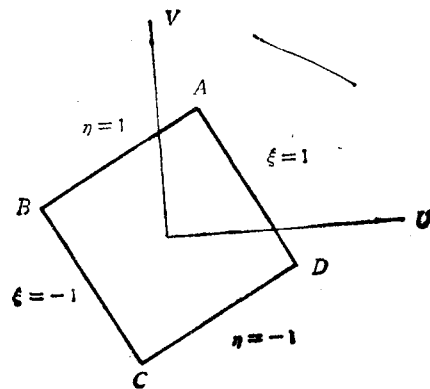


图 2

$$G_{mnk} = \frac{1}{4A} L_{Pm} L_{Qn} \iint_{\Gamma(U'V')} g(U, V) u_{ii}^*(U) N_k(U, V) dU dV \quad (18)$$

同(14)式完全类似,沿 V 方向的积分可解析地求出.故(18)式亦可化为单变量积分.

四、奇异积分

当 $m = n$ 时,即人们极为关心的奇异积分项,这时 $c_1 = b_1 = 0$, (10)式退化为

$$\left. \begin{aligned} X_Q - X_P &= \frac{1}{2}(X_2 - X_1)(\xi - \eta) \\ Y_Q - Y_P &= \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1)(\xi - \eta) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

这时(7)式为

$$G_{nnk} = \frac{1}{4} L_n^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\eta) u_{ii}^*(\xi - \eta) N_k(\xi) d\xi d\eta \quad (20)$$

我们知道,平面问题的边界积分方程(1)式中, u_{ii}^* 和 q_{ii}^* 分别含 $\ln r$ 和 $1/r$ 阶奇异性,这时可取(2)式中的权函数 $g(P) = 1$. (2)式含 u_{ii}^* 和 q_{ii}^* 的影响系数中,其奇异性项可由(20)式解析地求出.事实上,(20)式的重积分降低了问题的一阶奇异性.与(20)式有关的奇异积分中,我们需计算以下几项:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln(\xi - \eta) d\xi d\eta &= 4 \ln 2 - 6, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln(\xi - \eta) \xi d\xi d\eta = 0 \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\xi - \eta} d\xi d\eta &= 0, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\xi}{\xi - \eta} d\xi d\eta = 2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

若积分方程(2)式中的 q_{ii}^* 含更高阶奇异性,可适当选择权函数 $g(P)$.如边界积分方程中含最高奇异性阶次为 $1/r^n$,参考(20)和(21)式,可选择 $g(P) = (1 - \eta^2)^{n-1}$,这样对应的奇异积分可解析地求出.

如何确定(2)式中的系数 C_{ij} 是该法的一个重要组成部分.在边界具有不连续法向导数的情况下,常规边界元法中的系数 C_{ij} 与角点两侧的法向导数有关^[4],但采用常元插值时,取源点 P 在边界单元的中点,即光滑边界,这时有

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (22)$$

事实上,(2)式的几何意义可理解为,将边界单元 Γ_{Pm} 再分为无数个子单元,对每个子单元建立其边界积分方程,在子单元取常元插值,这时的 C_{ij} 同(22)式,然后将这一系列积分方程迭加即为(2)式.由此可知(2)式中的 C_{ij} 同(22)式完全相同.这样即确定了在光滑或不光滑边界情况下,哥西主值意义下的积分.

五、数值结果

根据本文提出的方法,作者编制了较为通用的求解平面问题程序,数值积分均采用四点高斯积分.在此给出两个算例,以说明该法的数值稳定性和有效性.并与一般的边界元法进行比较,其奇异积分采用十六点高斯积分,其余单元取四点高斯积分.

1. 不等长网格划分的平面应力单向拉伸问题

一般的边界元法计算平面问题已给出令人满意的结果, 但讨论网格不规则划分对计算精度的影响尚不多见。本例着重观测边界不等长划分的计算结果。如图 3, 正方形方板受单向拉伸。全边界划分为八个单元。表一列出本文解和一般边界元解的数值结果, 表中 L_{AB}/L_{BC} 表示边界 AC 边 AB 和 BC 段不等长划分的比例参数。由此可以看出, 当图 3 中的 B 点非常靠近 A 点时, 即 $L_{AB}/L_{BC} = 1/9$ 时, 本文解仍得到极高的精度, 这是一般边界元法所不及的。其它各点精度与 A 点相当, 此不赘述。

2. 矩形板弯曲

如图 4, 矩形板一端固定, 其余自由。全边界网格划分为八个单元, B 和 D 点均在各边的中点。表 2 列出 A 点的应力值, 其中 L_{AB}/L_{CD} 表示矩形四边形两邻边长度比值。

表 1 平面应力单向拉伸问题

L_{AB}/L_{BC}	一般边界元		本文解		精确解	
	$u_x(A)$	$q_y(A)$	$u_x(A)$	$q_y(A)$	$u_x(A)$	$q_y(A)$
1	0.9085	0.3003	0.9100	0.2996	0.9100	0.3000
3/7	0.9191	0.2621	0.9097	0.3040	0.9100	0.3000
1/9	0.9370	0.2123	0.9101	0.3035	0.9100	0.3000

表 2 矩形板弯曲 $q_x(A)$

L_{AB}/L_{CD}	一般边界元	本文解	精确解
1	0.9807	1.001	1.000
1.5	1.010	1.004	1.000
2.0	1.208	1.014	1.000

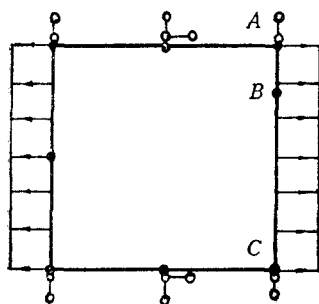


图 3

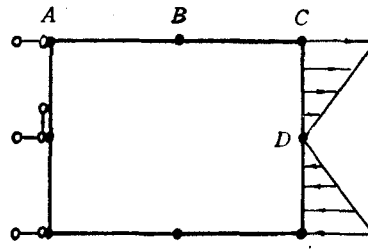


图 4

六、讨 论

1. 本文提出的方法可适用于高阶奇异性的边界积分方程。根据其奇异性阶次, 权函数 $g(P)$ 的选取以恰好消去其最高奇异性为宜。如本文讨论的平面问题, 取 $g(P)=1$, 这样含 $1/r$ 阶的奇异性项通过两次积分, 能解析地表示出来。

2. 由数值结果表明,本文方法导出的系数矩阵稳定性极好,即使在边界网格划分十分不规则的情况下,稀疏的边界网格仍然得出较高的计算精度,尤其是位移值更佳,这是一般边界元法所不及的。

3. 本文的数值积分并不增加计算工作量。由重积分变换成线积分,对任意边界积分方程均可适用。作者认为,这种以迭加思想建立起来的边界积分方程具有一定的应用和推广价值。

参 考 文 献

- [1] Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo (1984), 447—453.
- [2] Lin Jun, Beer, G. and Meek, J. L., Efficient evaluation of integrals of order $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ using Gauss quadrature, *Engineering analysis*, 2, 3 (1985), 118—123.
- [3] Brebbia, C. A. and Walker, S., *Boundary element techniques in engineering*, Butterworths, London (1979).
- [4] Bezine, G. and Gamby, D., A new integral equation formulation for plate bending problems, *Recent advances in boundary element methods*, (C. A. Brebbia, Ed.), Pentech press, London, (1978), 327—342.
- [5] Stern, M., A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems, *Int. J. solids structures*, 15, (1979), 769—782.
- [6] Stefano Alliney and Antonio Tralli, A weak formulatin of boundary integral equations, with application to elasticity problems, *Appl. Math. Modelling*, 18, April, (1984), 75—80.
- [7] Hatmann, F., *Progress in Boundary Element Method*, (Ed. by Brebbia), Chapter 4(1981).
- [8] 雷小燕,黄茂光,回转体弹塑性扭转问题的一种边界积分方程法, *固体力学学报*, 4(1985)445—465.

A NEW BOUNDARY INTEGRAL FORMULATION WITH NO SINGULARITY

Lei Xiaoyan, Wang Xiuxi and Huang Maokuang

(Dept. of Mechanics, Univ. of Sci. & Tech. of China)

Abstract The paper presents how the higher order singularity of a boundary integral equation can be reduced. The approach will be discussed in some detail with the plane elasticity. Numerical results for the meshes of unequal length boundary elements are reported. Higher precision both for deflection and force is obtained than that for general boundary element method.

Key words boundary integral formulation, singularity