

# 带缩放式腿的四足步行机器人的 三足支撑步行的动力学分析

杨海兴 乐涵峰

(上海交通大学工程力学系, 200030, 上海)

**提要** 本文讨论带缩放式腿的四足步行机器人的三足支撑步行运动, 采用半逆解法预先规定运动学补充条件进行运动学分析, 应用达朗伯原理和若丹原理进行动力学分析, 并附加优化条件解决“超静定性”困难。所分析的结果用于计算一个具体机器人的动力学问题。

**关键词** 四足步行机器人, 动力学, 超静定, 变结构, 优化

## 一、前言

四足步行机器人步行运动的动力学研究所面临的是多变量、多自由度、非线性和带有特殊约束条件的复杂系统动力学问题。它具有两个重要特点, 一是“变结构”, 即系统的约束状况随步行运动而改变, 使系统的拓扑结构也随之改变, 由于支撑腿和摆动腿的周期性交替, 约束条件发生周期性变化; 二是多支点约束力的“超静定性”, 由于未知变量数超过独立的运动微分方程数<sup>[1,2]</sup>, 使动力学研究更为困难。

为研究四足步行机器人的步行运动, 作者曾对马的慢步运动进行实验观测<sup>[3]</sup>, 高速摄影分析表明, 马在慢步运动时三足支撑的静态过程和单侧双足支撑的动态过程交替进行, 文献[4]将这种慢步运动归结为三足支撑和单侧双足支撑两种基本步行。

本文讨论带缩放式腿的四足步行机器人的三足支撑步行运动。采用运动生物力学常用的半逆解法<sup>[5,6]</sup>, 根据对四足动物实际观测结果预先规定运动学补充条件, 如躯体直线平动、质心等高和摆动腿按规定规律摆动等, 以便于运动学分析。以机器人整体及腿为对象, 分别应用达朗伯原理和若丹原理<sup>[4]</sup>进行动力学分析, 并附加优化条件“安装于双腿支撑侧的电机输出功率平方和最小”以解决“超静定性”困难。所分析的结果用于计算躯体匀速平动的四足步行机器人的三足支撑步行运动, 给出足部正压力、摩擦力及水平、竖直控制推力的变化曲线, 得出了一些有意义的结论。

## 二、力学模型

四足步行机器人由躯体  $B$  和四条缩放式步行腿  $B_i (i = 1, \dots, 4)$  组成。每条腿由四根杆  $B_{ij} (j = 1, \dots, 4)$ , 三个滑块  $S_{ij} (j = x, y, z)$ , 一个足部  $C_{is}$  和三个关节  $C_{ij+5} (j = 1, 2, 3)$  组成。足部和关节几何尺寸较小, 视作质点。因此整个步行机器人由

本文于1990年11月23日收到第一稿, 于1991年8月3日收到修改稿。

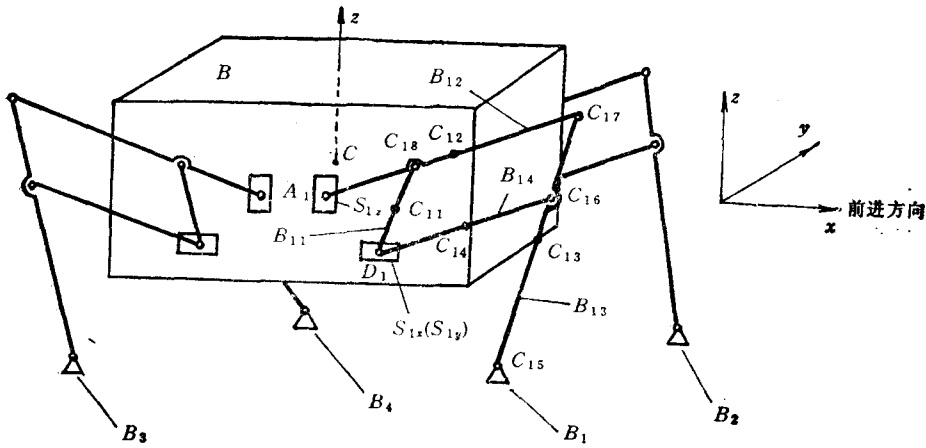


图 1 四足步行机器人模型

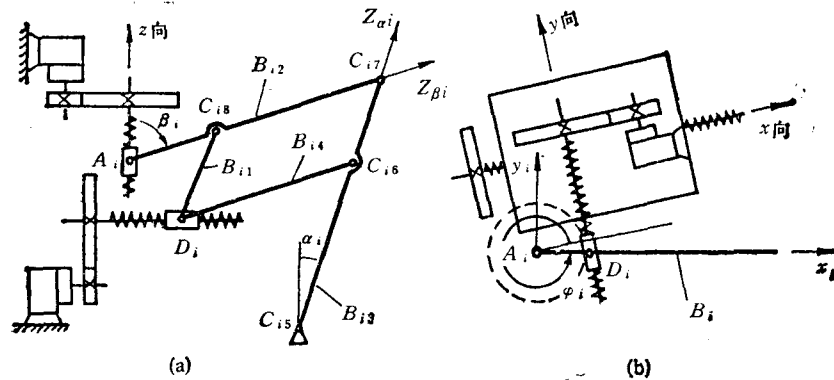


图 2 传动系统示意图

二十九个刚体和十六个质点所构成(图 1)。作以下基本假定

(1) 躯体为长方体, 设质心  $C$  与几何中心重合, 质量为  $m$ 。连体坐标系  $C_{zyx}$  各轴平行于躯体棱边, 分别指向前方、左侧和上方。

(2) 规定右前腿为  $B_1$ , 右后腿为  $B_3$ , 左前腿为  $B_2$ , 左后腿为  $B_4$ 。

(3) 假定腿  $B_i$  的四根杆  $B_{ij}$  为同密度的均质杆, 其质心、质量和非零中心主惯量矩(沿杆向的主惯量矩忽略不计, 等于零)分别为  $C_{ij}, m_j$  和  $J_j (j = 1, \dots, 4)$ 。足部和关节的质量分别为  $m_j (j = 5, \dots, 8)$ 。滑块  $S_{ix}$  和  $S_{iy}$  相对躯体沿  $x$  和  $z$  向丝杠的移动分别由安装在躯体上的电机带动, 滑块  $S_{iy}$  安装在滑块  $S_{ix}$  上, 其相对  $S_{ix}$  沿  $y$  向丝杠的滑动由安装在  $S_{ix}$  上的电机带动(图 2)。杆  $B_{i2}$  和滑块  $S_{ix}$  通过铰  $A_i$  相联结, 杆  $B_{i1}$ 、 $B_{i4}$  和滑块  $S_{iy}$ 、 $S_{iz}$  通过铰  $D_i$  相联结,  $A_i C_{i8} = D_i C_{i5} = C_{i6} C_{i7} = L_1, D_i C_{i6} = C_{i5} C_{i6} = C_{i7} C_{i8} = L_2$ 。三足支撑步行时, 滑块  $S_{iy}$  没有沿  $y$  向的移动, 与滑块  $S_{ix}$  相固连, 两者可视作一刚体, 设其质量为  $m_9$ , 质心为  $C_{i9}$ ; 设滑块  $S_{i2}$  质量为  $m_{10}$ , 质心为  $C_{i10}$ ;  $D_i C_{i9} = d_{i9} j, A_i C_{i10} = d_{i10} j$ 。

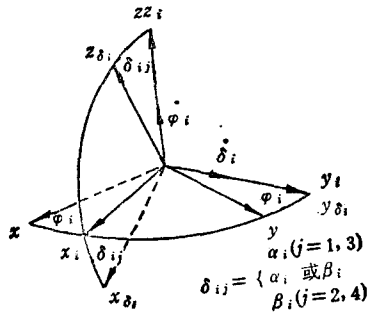


图3 坐标交换

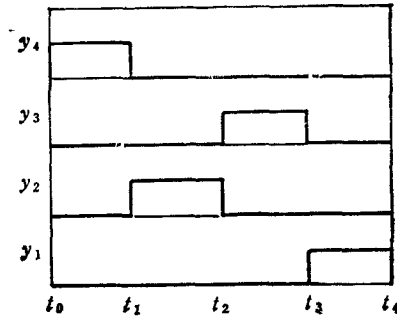


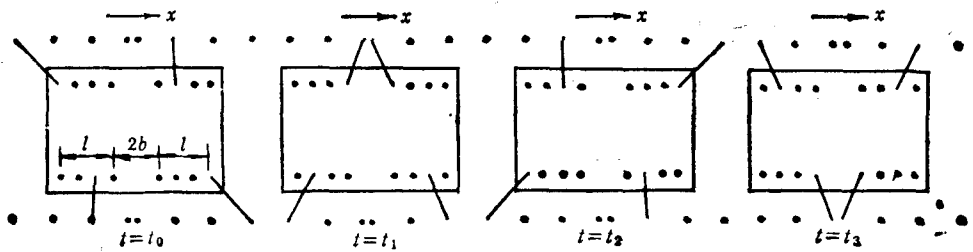
图4 状态函数图

(4) 步行腿  $B_i$  的四根杆构成腿平面,该平面与  $xz$  平面夹角为  $\varphi_i$ , 由于机构设计的限制, 各  $\varphi_i$  运动范围约为  $335^\circ \leq \varphi_1 \leq 360^\circ$ ,  $0^\circ \leq \varphi_2 \leq 25^\circ$ ,  $180^\circ \leq \varphi_3 \leq 205^\circ$ ,  $155^\circ \leq \varphi_4 \leq 180^\circ$ . 在腿平面内, 杆  $B_{i1}$  和  $B_{i3}$  与  $z$  轴的夹角为  $\alpha_i$ , 杆  $B_{i2}$  和  $B_{i4}$  与  $z$  轴的夹角为  $\beta_i$ , 绕  $y_i$  轴转动为正, 在运动过程中  $\beta_i$  恒大于  $\alpha_i$  (图2和图3). 设铰  $A_i$  和  $D_i$  相对  $C_{xyz}$  的坐标分别  $x_{A_i}, y_{A_i}, z_{A_i}$  和  $x_{D_i}, y_{D_i}, z_{D_i}$ .

(5) 躯体  $B$  保持直线平动, 其质心  $C$  保持高度  $h$  不变.

(6) 当一侧为双足支撑时, 另一侧后足和前足轮流支撑, 以保证每个时刻都有三个支点. 支撑情况以状态函数  $Y_j = 0$  (足腾空) 或  $1$  (足支撑) 表示, 如图4所示. 假定滑块  $S_{ix}$  在  $B_i$  支撑时的行程长度为  $l$ , 腾空时的行程长度略大于  $l$ . 不失一般性, 令  $t = t_0$  时右侧为双足支撑, 左侧后足  $B_4$  离地摆动, 此时刻滑块  $S_{1x}, S_{3x}, S_{2x}$  和  $S_{4x}$  距行程  $l$  的(前进方向)后端距离分别为  $l, 2l/3, l/3$  和  $0$ ;  $S_{4x}$  相对躯体向前移动(在行程  $l$  两端的短时间内为向后移动), 其余滑块向后移动.  $t = t_1$  时,  $B_4$  着地, 左侧前足  $B_2$  离地摆动, 此时刻滑块  $S_{1x}, S_{3x}, S_{2x}$  和  $S_{4x}$  距行程后端距离分别为  $2l/3, l/3, 0$  和  $l$ . 至  $t = t_2$  时,  $B_2$  着地, 转入左侧双足支撑阶段. 三足支撑步行的步态如图5所示. 若躯体匀速平动, 令  $t_1 - t_0 = \tau/4$ , 则左、右双足支撑的轮换周期为  $\tau/2$ , 步行周期为  $\tau$ .

(7) 只考虑支撑足沿步行运动方向的摩擦力.

图5 三足支撑步行步态 ( $t_i$  步态与  $t_0$  时相同)

### 三、运动学分析

三足支撑步行时,  $A_i, D_i$  铰的坐标中, 只有  $x_{D_i}$  恒为变量,  $z_{A_i}$  对腾空腿为变量,

为区别计令  $x_{D_i} = x_i$ ,  $z_{A_i} = z_i$ , 则由图 2(b) 分别计算得

$$\operatorname{ctg} \varphi_i = (x_i - x_{A_i}) / (y_{D_i} - y_{A_i}) \quad (1.1)$$

$$\dot{\varphi}_i = -\dot{x}_i(y_{D_i} - y_{A_i}) / [(x_i - x_{A_i})^2 + (y_{D_i} - y_{A_i})^2] \quad (1.2)$$

$$\ddot{\varphi}_i = -\frac{\ddot{x}_i(y_{D_i} - y_{A_i})}{(x_i - x_{A_i})^2 + (y_{D_i} - y_{A_i})^2} + \frac{2(x_i - x_{A_i})(y_{D_i} - y_{A_i})\dot{x}_i^2}{[(x_i - x_{A_i})^2 + (y_{D_i} - y_{A_i})^2]^2} \quad (1.3)$$

将图 2(a) 的矢径关系式  $\overrightarrow{CD_i} = \overrightarrow{CA_i} + \overrightarrow{A_iC_{i8}} + \overrightarrow{C_{i8}D_i}$  向  $x$  轴和  $z$  轴投影, 利用坐标变换导出

$$x_i = x_{A_i} + L_1(\sin \beta_i - \sin \alpha_i) \cos \varphi_i \quad (2.1)$$

$$z_{D_i} = z_i + L_1(\cos \beta_i - \cos \alpha_i) \quad (2.2)$$

根据上式并利用  $\cos \varphi_i = (x_i - x_{A_i}) / \sqrt{(x_i - x_{A_i})^2 + (y_{D_i} - y_{A_i})^2}$ , 整理得到

$$\alpha_i = \sigma_{i2} - \sigma_{i1} \quad (3.1)$$

$$\dot{\alpha}_i = -(\dot{x}_i \cos \varphi_i \sin \beta_i - \dot{z}_i \cos \beta_i) / L_1 \sin(\beta_i - \alpha_i) \quad (3.2)$$

$$\ddot{\alpha}_i = -\frac{L_1[\dot{\beta}_i^2 - \dot{\alpha}_i^2 \cos(\beta_i - \alpha_i)] + (\ddot{x}_i \cos \varphi_i - \dot{x}_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i) \sin \beta_i - \ddot{z}_i \cos \beta_i}{L_1 \sin(\beta_i - \alpha_i)} \quad (3.3)$$

$$\beta_i = \sigma_{i2} + \sigma_{i1} \quad (3.4)$$

$$\dot{\beta}_i = -(\dot{x}_i \cos \varphi_i \sin \alpha_i - \dot{z}_i \cos \alpha_i) / L_1 \sin(\beta_i - \alpha_i) \quad (3.5)$$

$$\ddot{\beta}_i = -\frac{L_1[\dot{\beta}_i^2 \cos(\beta_i - \alpha_i) - \dot{\alpha}_i^2] + (\ddot{x}_i \cos \varphi_i - \dot{x}_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i) \sin \alpha_i - \ddot{z}_i \cos \alpha_i}{L_1 \sin(\beta_i - \alpha_i)} \quad (3.6)$$

其中

$$\sigma_{i1} = \arcsin[\sqrt{(x_i - x_{A_i})^2 + (y_{D_i} - y_{A_i})^2 + (z_i - z_{D_i})^2} / 2L_1] \quad (4.1)$$

$$\sigma_{i2} = \operatorname{arctg}[(z_i - z_{D_i}) / \sqrt{(x_i - x_{A_i})^2 + (y_{D_i} - y_{A_i})^2}] \quad (4.2)$$

杆  $B_{ij}$  的角速度和角加速度可由图 2 和图 3 计算得到

$$\omega_{\delta_{ij}} = \dot{\varphi}_i \mathbf{k} + \dot{\delta}_{ij} \mathbf{j}_{\delta_{ij}} = \omega_{\delta_{ij}x} \mathbf{i}_{\delta_{ij}} + \omega_{\delta_{ij}y} \mathbf{j}_{\delta_{ij}} + \omega_{\delta_{ij}z} \mathbf{k}_{\delta_{ij}} \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_{\delta_{ij}} = d\omega_{\delta_{ij}}/dt = \varepsilon_{\delta_{ij}x} \mathbf{i}_{\delta_{ij}} + \varepsilon_{\delta_{ij}y} \mathbf{j}_{\delta_{ij}} + \varepsilon_{\delta_{ij}z} \mathbf{k}_{\delta_{ij}} \quad (5.2)$$

其中

$$\omega_{\delta_{ij}x} = -\dot{\varphi}_i \sin \delta_{ij}, \quad \omega_{\delta_{ij}y} = \dot{\delta}_{ij}, \quad \omega_{\delta_{ij}z} = \dot{\varphi}_i \cos \delta_{ij} \quad (6.1)$$

$$\varepsilon_{\delta_{ij}x} = \dot{\varphi}_i \dot{\delta}_{ij} \cos \delta_{ij} - \ddot{\varphi}_i \sin \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{\delta_{ij}y} = \ddot{\delta}_{ij}, \quad \varepsilon_{\delta_{ij}z} = \dot{\varphi}_i \dot{\delta}_{ij} \sin \delta_{ij} + \ddot{\varphi}_i \cos \delta_{ij} \quad (6.2)$$

式(5)和(6)中,  $\delta_{ij} = \alpha_i (j=1, 3)$  或  $\beta_i (j=2, 4)$ 。

各杆  $B_{ij}$  的质心  $C_{ij} (j=1, \dots, 4)$ , 各质点  $C_{ij} (j=5, \dots, 8)$ , 以及滑块质心  $C_{ij} (j=9, 10)$  的矢径、速度和加速度为

$$\mathbf{r}_{CC_{ij}} = x_{ij} \mathbf{i} + y_{ij} \mathbf{j} + z_{ij} \mathbf{k} \quad (7.1)$$

$$\mathbf{v}_{CC_{ij}} = \mathbf{v}_C + d\mathbf{r}_{CC_{ij}}/dt = v_{ijx} \mathbf{i} + v_{ijy} \mathbf{j} + v_{ijz} \mathbf{k} \quad (7.2)$$

$$\mathbf{a}_{C_{ij}} = \mathbf{a}_C + d^2\mathbf{r}_{CC_{ij}}/dt^2 = a_{ijx} \mathbf{i} + a_{ijy} \mathbf{j} + a_{ijz} \mathbf{k} \quad (7.3)$$

与式(6)类同, 式(7)中各分量也均可用  $\varphi_i, \alpha_i, \beta_i$  和  $x_i, z_i$  以及它们的导数表示。

由式(1)、(3)、(4)可知,  $\varphi_i, \alpha_i, \beta_i$  及其导数的变化规律由  $x_i, z_i$  及其导数确定。因此, 只要知道滑块  $S_{ix}$  和  $S_{iz}$  相对躯体的运动规律(即  $x_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{z}_i, \ddot{x}_i, \ddot{z}_i$ ), 即可确定三足支撑步行时每条腿的运动规律。

## 四、支撑腿和摆动腿滑块的运动规律

不失一般性,仅讨论  $t_0 - t_1$  阶段。支撑腿  $B_i(i=1,2,3)$  的足部固定不动,由图 1、2 和式(2.1)得到

$$r_{c_i,c}|_x = L_2(\sin \alpha_i - \sin \beta_i) \cos \varphi_i - x_i = \frac{L_2}{L_1} x_{A_i} - \frac{L_1 + L_2}{L_1} x_i \quad (8)$$

上式对时间连续求导,可得到躯体质心  $C$  在三足支撑步行运动中沿  $x$  方向行进的速度和加速度

$$v_c = -\frac{L_1 + L_2}{L_1} \dot{x}_i, \quad a_c = -\frac{L_1 + L_2}{L_1} \ddot{x}_i \quad (9)$$

式(9)反映了带缩放式腿的四足步行机器人的运动特征;躯体沿某一轴平动的速度或加速度等于支撑腿沿该轴的滑块移动速度或加速度的负值与缩放比  $(L_1 + L_2)/L_1$  的乘积。这一结论同样适用于躯体沿  $y$  轴或  $z$  轴的平动。

支撑腿滑块的运动规律由基本假定(5)、(6)和式(9)确定

$$\dot{x}_i = -L_1 v_c / (L_1 + L_2) (i=1,2,3), \quad v_c = a_c t + v_{c0} \quad (10.1)$$

$$x_1 = \begin{cases} b + l(t - t_0), \\ b + 2l/3(t - t_1) \end{cases} \quad x_2 = x_1 - 2l/3, \quad x_3 = x_1 - 2b - 4l/3 \quad (10.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= 0, \\ z_i &= \text{const.} = z_0 (i=1,2,3) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中  $l$  和  $b$  的定义见图 5。由式(10.2)得到  $x_1|_{t_1} - x_1|_{t_0} = -l/3$ , 将式(10.1)在  $t_0$  至  $t_1$  时间内积分,得到

$$t_1 - t_0 = \begin{cases} l(L_1 + L_2)/3L_1 v_{c0} & (a_c = 0) \\ [\sqrt{v_{c0}^2 + 2a_c l(L_1 + L_2)/3L_1} - v_{c0}]/a_c & (a_c \neq 0) \end{cases} \quad (12)$$

摆动腿  $B_4$  滑块的运动规律可自行设计,但必须满足一定条件。其中滑块  $S_{4x}$  的运动规律必须满足支撑腿和摆动腿交替的边界条件

$$\left. \begin{aligned} x_4|_{t=t_0} &= -(b+l), & x_4|_{t=t_1} &= -b \\ \dot{x}_4|_{t=t_0} &= -L_1(a_c t_0 + v_{c0})/(L_1 + L_2), & \dot{x}_4|_{t=t_1} &= -L_1(a_c t_1 + v_{c0})/(L_1 + L_2) \\ \ddot{x}_4|_{t=t_0} &= -L_1 a_c / (L_1 + L_2), & \ddot{x}_4|_{t=t_1} &= -L_1 a_c / (L_1 + L_2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

为此,引入参数  $T = t_1 - t_0, t^* = t - t_0$ , 规定

$$\begin{aligned} x_4 &= A_1 \sin \frac{\pi}{2T} t^* + A_2 \cos \frac{\pi}{2T} t^* + A_3 \sin \frac{\pi}{T} t^* \\ &+ A_4 \cos \frac{\pi}{T} t^* + A_5 \sin \frac{3\pi}{2T} t^* + A_6 \cos \frac{3\pi}{2T} t^* \end{aligned} \quad (14.1)$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \frac{\pi}{2T} \left( A_1 \cos \frac{\pi}{2T} t^* - A_2 \sin \frac{\pi}{2T} t^* + 2A_3 \cos \frac{\pi}{T} t^* - 2A_4 \sin \frac{\pi}{T} t^* \right. \\ &\left. + 3A_5 \cos \frac{3\pi}{2T} t^* - 3A_6 \sin \frac{3\pi}{2T} t^* \right) \end{aligned} \quad (14.2)$$

$$\ddot{x}_4 = -\frac{\pi^2}{4T^2} \left( A_1 \sin \frac{\pi}{2T} t^* + A_2 \cos \frac{\pi}{2T} t^* + 4A_3 \sin \frac{\pi}{T} t^* + 4A_4 \cos \frac{\pi}{T} t^* + 9A_5 \sin \frac{3\pi}{2T} t^* + 9A_6 \cos \frac{3\pi}{2T} t^* \right) \quad (14.3)$$

将式(14)代入边界条件(13), 得到包含全部  $A_i (i = 1, \dots, 6)$  的代数方程, 求解此代数方程, 导出

$$\left. \begin{aligned} A_5 &= (9\rho_1 - 7\rho_2 + 6\rho_3 + 6\rho_4 + 2\rho_5)/16, & A_6 &= A_5 - (\rho_1 + \rho_2 + 2\rho_5)/8 \\ A_1 &= (4\rho_2 + \rho_5 - 5A_5)/3, & A_2 &= (4\rho_1 + \rho_5 + 5A_6)/3 \\ A_3 &= (\rho_3 - A_1 - 3A_5)/2, & A_4 &= \rho_1 - A_2 - A_6 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= -(b+l), \quad \rho_2 = -b, \quad \rho_3 = -\frac{2L_1(t_1-t_0)(a_c t_0 + v_{c0})}{\pi(L_1+L_2)} \\ \rho_4 &= -\frac{2L_1(t_1-t_0)(a_c t_1 + v_{c0})}{\pi^2(L_1+L_2)}, \quad \rho_5 = -\frac{4L_1(t_1-t_0)^2 a_c}{\pi^2(L_1+L_2)} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

摆动腿腾空摆动时, 足部会离开地面。因此在确定滑块  $S_{4x}$  的运动规律之后, 还需确定滑块  $S_{4x}$  的运动规律。滑块  $S_{4x}$  运动规律的确定应该遵循以下原则

- (i) 足部  $C_{s4}$  离地有一定高度以保证实现步行运动;
- (ii) 足部  $C_{s4}$  着地时速度为零以避免发生冲击和碰撞。为此规定

$$z_4 = \lambda(t-t_0)^2(t-T)^2 + z_0 \quad (17.1)$$

$\lambda$  的取值取决于所要求的足部离地面的高度。则有

$$\ddot{z}_4 = -\lambda(t-t_0)^2(t-T)^3[3(t-T) + 4(t-t_0)] \quad (17.2)$$

$$\dot{z}_4 = -2\lambda(t-t_0)(t-T)^2[3(t-T) + 2(t-t_0)][(t-T) + 3(t-t_0)] \quad (17.3)$$

### 五、动力学分析

应用达朗伯原理, 在躯体质心  $C$ , 杆  $B_{ij}$  的质心  $C_{ij} (j = 1, \dots, 4)$ , 各质点  $C_{ij} (j = 5, \dots, 8)$ , 以及滑块质心  $C_{ij} (j = 9, 10)$  上加惯性力主矢

$$\mathbf{F}_c^* = -m\mathbf{a}_c \mathbf{i} \quad (18.1)$$

$$\mathbf{F}_{c_{ij}}^* = -m_j a_{ijx} \mathbf{i} - m_j a_{ijy} \mathbf{j} - m_j a_{ijz} \mathbf{k} \quad (i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 10) \quad (18.2)$$

在具有转动角速度的杆  $B_{ij}$  上加上惯性力主矩

$$\mathbf{M}_{ii}^* = M_{\delta_{ijx}}^* \mathbf{i}_{\delta_{ij}} + M_{\delta_{ijy}}^* \mathbf{j}_{\delta_{ij}} + M_{\delta_{ijz}}^* \mathbf{k}_{\delta_{ij}} \quad (19)$$

$\mathbf{i}_{\delta_{ij}}, \mathbf{j}_{\delta_{ij}}, \mathbf{k}_{\delta_{ij}}$  [ $\delta_{ij} = \alpha_i (j = 1, 3)$  或  $\beta_i (j = 2, 4)$ ] 是杆  $B_{ij}$  的中心主轴坐标系单位矢量, 因此式(19)中各分量具有简洁形式<sup>[7]</sup>:

$$M_{\delta_{ijx}}^* = -J_i (\varepsilon_{\delta_{ijx}} - \omega_{\delta_{ijy}} \omega_{\delta_{ijz}}), \quad M_{\delta_{ijy}}^* = -J_i (\varepsilon_{\delta_{ijy}} + \omega_{\delta_{ijx}} \omega_{\delta_{ijz}}), \quad M_{\delta_{ijz}}^* = 0 \quad (20)$$

其中  $J_i$  为杆  $B_{ij}$  的非零中心主惯量矩。式(19)也可向  $C_{xyz}$  坐标系投影, 若令  $M_{ii}^*, M_{iiy}^*, M_{iiz}^*$  为  $\mathbf{M}_{ii}^*$  在  $C_{xyz}$  上的投影, 则有

$$\left. \begin{aligned} M_{iix}^* &= M_{\delta_{ijx}}^* \cos \delta_{ij} \cos \varphi_i - M_{\delta_{ijy}}^* \sin \varphi_i \\ M_{iiy}^* &= M_{\delta_{ijx}}^* \cos \delta_{ij} \sin \varphi_i + M_{\delta_{ijy}}^* \cos \varphi_i \\ M_{iiz}^* &= -M_{\delta_{ijz}}^* \sin \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 4) \quad (21)$$

设各腿足部  $C_{i5}$  受到正压力为  $N_i = N_i k$ , 摩擦力为  $F_i = F_i i$ ,  $C$  和各  $C_{ij}$  处重力为  $W = -mgk$  和  $W_j = -m_j g k$  ( $i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 10$ ). 以  $t=t_0$  至  $t=t_1$  阶段为例, 此时  $N_4 = F_4 = 0$ , 对机器人整体应用动静法, 列出在  $C_{xyx}$  坐标系中除  $\sum F_y = 0$  外的五个方程, 注意到  $y_{15} = y_{35} = -y_{25}$ , 解得

$$N_2 = (P_3 - P_4)/2 \quad (22.1)$$

$$N_1 = [P_5 - x_{25}N_2 - x_{35}(P_2 - N_2)]/(x_{15} - x_{35}) \quad (22.2)$$

$$N_3 = P_3 - N_1 - N_2 \quad (22.3)$$

$$F_2 = (P_1 - P_2)/2 \quad (22.4)$$

$$F_1 + F_3 = (P_1 + P_2)/2 \quad (22.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= ma_c + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{10} m_j a_{ijx} \\ P_2 &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{10} m_j (a_{ijx} y_{ij} - a_{ijy} x_{ij}) - \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{ijx}^* \\ P_3 &= mg + 4 \sum_{j=1}^{10} m_j g + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{10} m_j a_{ijx} \\ P_4 &= \left\{ \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{10} m_j [a_{ijy} z_{ij} - (a_{ijx} + g)y_{ij}] + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{ijx}^* \right\} / y_{25} \\ P_5 &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{10} m_j [(a_{ijx} + g)x_{ij} - a_{ijx} z_{ij}] + P_1 z_{15} - \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{ijy}^* \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

由于多支点约束力的“超静定性”,  $F_1$  和  $F_3$  不能由方程(22)完全确定, 为此需要根据某种优化条件增加补充方程。通常选择的优化条件为: 总能量消耗最小, 铰的控制力矩最小, 某个支承足的支承力最小, 或支承足的总变形能最小等等。本文采用的优化条件为: 安装于双腿支承侧的电机的输出功率平方和最小。假定滑块  $S_{ix}$  和  $S_{ix}$  上的控制推力分别为  $F_{D_i}$  和  $F_{A_i}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), 则优化条件为使以下目标函数

$$P = (F_{D_1} \dot{x}_1)^2 + (F_{D_3} \dot{x}_3)^2 \quad (24)$$

取极小值。因为  $\dot{x}_1 = \dot{x}_3$ , 因此  $P$  取极小值的充要条件为

$$F_{D_1} = F_{D_3} \quad (25)$$

控制推力  $F_{D_i}$  和  $F_{A_i}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) 可通过对缩放式腿  $B_i$  应用若丹原理(即虚功率形式的动力学普遍方程)<sup>[4]</sup>进行计算。解除地面对支撑腿的约束, 以约束力  $N_i$  和  $F_i$  替代, 在滑块  $S_{ix}$  和  $S_{ix}$  上给出  $F_{D_i}$  和  $F_{A_i}$  (图 6), 并分别给出虚速度  $\Delta \dot{x}_i$  和  $\Delta \dot{z}_i$ , 则相应的虚角速度  $\Delta \dot{\phi}_i, \Delta \dot{\alpha}_i, \Delta \dot{\beta}_i$  和  $\Delta \omega_{\delta_{ijx}}, \Delta \omega_{\delta_{ijy}}, \Delta \omega_{\delta_{ijz}}$  可分别由式(1.2)、(3.2)、(3.5)和(6.1)取速度变更<sup>[4]</sup>得到。同样, 各  $C_{ij}$  点的虚速度  $\Delta v_{ijx}, \Delta v_{ijy}$  和  $\Delta v_{ijz}$  可由式(7.2)取速度变更得到, 但须令  $\Delta v_c = 0$ , 因为根据若丹原理, 此时躯体作为对各腿  $B_i$  的约束物体是“凝固”的。

对腿  $B_i$  应用若丹原理

$$\sum_{k=1}^n (\dot{\vec{r}}_k - m_k \ddot{\vec{r}}_k) \cdot \Delta \dot{\vec{r}}_k = 0 \quad (26)$$

可解得

$$F_{D_i} = \Theta |_{\Delta \dot{x}_i=1, \Delta \dot{z}_i=0}, F_{A_i} = \Theta |_{\Delta \dot{x}_i=0, \Delta \dot{z}_i=1} (i = 1, \dots, 4) \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \Theta = & - \sum_{j=1}^4 (M_{\delta_{ijx}}^* \Delta \omega_{\delta_{ijx}} + M_{\delta_{ijy}}^* \Delta \omega_{\delta_{ijy}}) \\ & + F_i \Delta v_{i5x} + N_i \Delta v_{i5z} \\ & + \sum_{j=1}^{10} m_j [a_{ijx} \Delta v_{ijx} + a_{ijy} \Delta v_{ijy} \\ & + (a_{ijz} + g) \Delta v_{ijz}] (i = 1, \dots, 4) \quad (28) \end{aligned}$$

对于支撑腿  $B_1$  和  $B_3$ , 有

$$\begin{aligned} \Delta v_{i5x} &= \frac{L_1 + L_2}{L_2} \Delta \dot{x}_i, \\ \Delta v_{i5z} &= \frac{L_1 + L_2}{L_2} \Delta \dot{z}_i (i = 1, 3) \quad (29) \end{aligned}$$

将上式代入式(27)第一式,再代入式(25),整理得到

$$F_1 - F_3 = P_6 \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} P_6 = & \frac{L_1}{L_1 + L_2} \left\{ \sum_{j=1}^4 (M_{\delta_{1jx}}^* \Delta \omega_{\delta_{1jx}} + M_{\delta_{1jy}}^* \Delta \omega_{\delta_{1jy}} - M_{\delta_{3jx}}^* \Delta \omega_{\delta_{3jx}} - M_{\delta_{3jy}}^* \Delta \omega_{\delta_{3jy}}) \right. \\ & - \sum_{j=1}^{10} m_j [a_{1jx} \Delta v_{1jx} + a_{1jy} \Delta v_{1jy} + (a_{1jz} + g) \Delta v_{1jz} - a_{3jx} \Delta v_{3jx} \\ & \left. - a_{3jy} \Delta v_{3jy} - (a_{3jz} + g) \Delta v_{3jz}] \right\} \Big|_{\substack{\Delta \dot{x}_i=1 \\ \Delta \dot{z}_i=0}} \quad (31) \end{aligned}$$

于是由式(22.5)和(31)解出

$$F_1 = (P_1 + P_2 + 2P_6)/4, F_3 = (P_1 + P_2 - 2P_6)/4 \quad (32)$$

由式(22)和(32)求出  $F_i$  和  $N_i (i = 1, 2, 3)$ , 加上已知腾空腿的  $F_4 = N_4 = 0$ , 代入式(27),即得到滑块  $S_{ix}$  和  $S_{iz}$  的控制推力  $F_{D_i}$  和  $F_{A_i}$ .

## 六、计算结果

实际机器人模型取如下参数

$$\begin{aligned} m &= 51\text{kg}, m_1 = 1.17\text{kg}, m_2 = 1.37\text{kg}, m_3 = 0.48\text{kg}, m_4 = 0.88\text{kg} \\ m_5 &= 0.6\text{kg}, m_6 = m_7 = m_8 = 0.2\text{kg}, m_9 = 3.95\text{kg}, m_{10} = 1.42\text{kg} \\ L_1 &= 0.15\text{m}, L_2 = 0.45\text{m}, l = 0.18\text{m}, b = 0.12\text{m} \\ x_{A_1} &= x_{A_2} = -x_{A_3} = -x_{A_4} = 0.06\text{m}, y_{A_2} = y_{A_4} = -y_{A_1} = -y_{A_3} = 0.25\text{m} \\ y_{D_2} &= y_{D_4} = -y_{D_1} = -y_{D_3} = 0.28\text{m}, z_{D_i} = -0.05\text{m} (i = 1, \dots, 4) \\ d_{19} &= d_{39} = -d_{29} = -d_{49} = 0.09\text{m}, d_{110} = d_{310} = -d_{210} = -d_{410} = 0.06\text{m} \end{aligned}$$

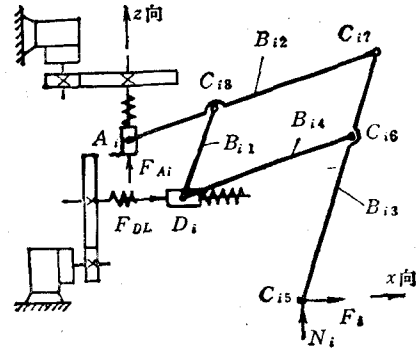


图 6 用若丹原理计算  $F_{D_i}$  和  $F_{A_i}$



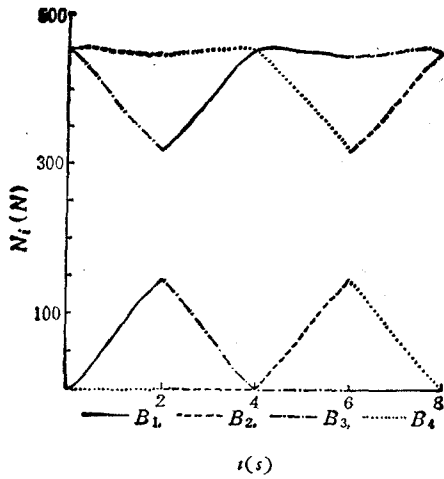


图7 足部正压力变化曲线

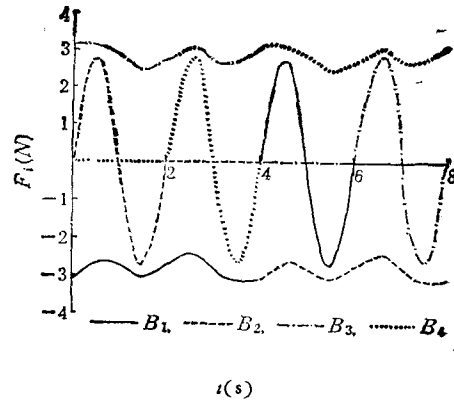


图8 足部摩擦力变化曲线

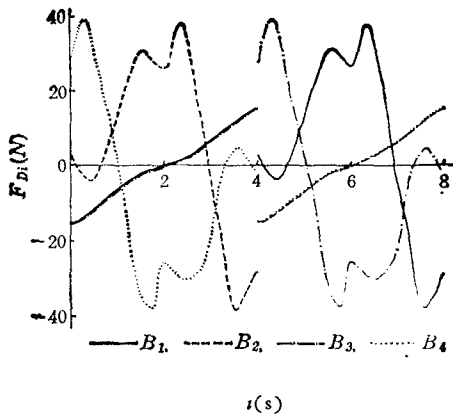


图9 水平控制推力变化曲线

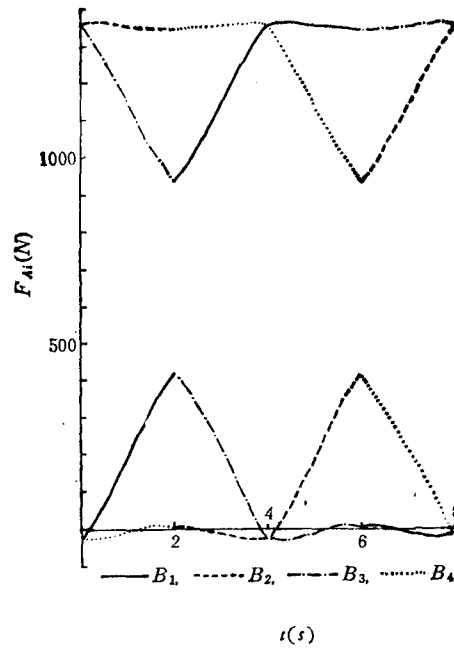


图10 竖直控制推力变化曲线

假定机器人以  $v_c = 0.12\text{m/s}$  (即  $432\text{m/h}$ ) 的速度沿  $x$  方向匀速平动, 质心  $C$  距支撑腿足部平面 ( $t_0$  至  $t_1$  阶段为  $C_{15}$ 、 $C_{25}$ 、 $C_{35}$  所组成的平面) 高度  $h$  保持在  $0.15\text{m}$ . 由式(12)得到  $t_1 - t_0 = 2\text{s}$ , 因此周期  $\tau = 4(t_1 - t_0) = 8\text{s}$ . 计算在一周期内各腿的正压力、摩擦力、竖直和水平控制推力随时间变化曲线如图7—图10所示. 由图中可看出: 1) 足部正压力  $N_i$  和竖直控制推力  $F_{A_i}$  在  $\tau/4(2\text{s})$  和  $3\tau/4(6\text{s})$  时发生跳跃, 而足部摩擦力  $F_i$  和水平控制推力  $F_{D_i}$  在  $0$  和  $\tau/2(4\text{s})$  时发生跳跃; 2) 在匀速运动情况下, 足部摩擦力  $F_i$  较小; 3) 水平控制推力远小于竖直控制推力.

当  $v_c$  取值大于  $v_{c,m} = 0.128 \text{ m/s}$  (即  $460.8 \text{ m/h}$ ) 时, 计算表明足部正压力出现负值, 表明机器人无法实现三足支撑步行。也就是说, 对于确定参数的四足步行机器人, 其三足支撑步行具有一个极限速度。要提高其运动速度, 必须改进步态或采用双足支撑的动态步态。

### 参 考 文 献

- [1] Smith P G, Kane T R. On the dynamics of the human body in free fall. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1968, 35
- [2] 刘延柱. 运动生物力学的力学模型问题. *力学与实践*, 1983, 5, 3: 6—9
- [3] 王伟民, 杨海兴, 刘延柱. 马的步态实验和分析 *上海交通大学学报*, 1991, 25, 2: 72—83
- [4] 刘延柱, 杨海兴. 四足动物步行运动的定性分析, *生物力学的研究和应用*. 广州: 华南理工大学出版社, 1990
- [5] Вукобратович М. Шагающие роботы и антропоморфные механизмы, Мир. М. 1976.
- [6] Белецкий В В. Двухногая Ходьба, Наука, М. 1984.
- [7] 刘延柱, 杨海兴. *理论力学*. 北京: 高等教育出版社, 1991

## DYNAMIC ANALYSIS OF THE WALKING SUPPORTED BY THREE FEET OF A QUADRUPED WALKING MACHINE WITH PANTOGRAPH LEGS

Yang Haixing Le Hanfeng

(Shanghai Jiao Tong University)

**Abstract** The walking supported by three feet of a quadruped walking machine with pantograph legs is discussed in this paper. The semi-inverse solution is supplied for the kinematic analysis. The kinematic supplementary conditions are determined in advance. D'Alembert's principle and Jourdain's principle are supplied for the dynamic analysis. The difficulty of statical indeterminateness is overcome by introducing the optimum conditions. The dynamic problems of an actual quadruped walking machine are calculated.

**Key words** quadruped walking machine, dynamics, statical indeterminateness, unsteady structure, optimization