

# 横截性理论在碰撞振动系统 结构稳定问题中的应用

谢建华

(西南交通大学, 成都, 610031)

**摘要** 本文利用横截性理论研究了碰撞振动系统中的结构稳定问题。讨论了结构稳定、稳定、失稳及分叉之间的关系。

**关键词** 碰撞振动、结构稳定、横截性、分叉

## 一、引言

碰撞振动是工程中一种常见现象。如在振动落砂机、气动微震压实造型机、微机打印机机头和冲击消振器等机械或机构中均存在碰撞问题。首先要考虑的是周期运动的存在性、稳定性及对参数扰动的抗干扰性。对该类问题国内外进行较广泛的研究<sup>[1-7]</sup>。文[1]、[2]对单自由度系统周期解小范围稳定性进行研究。大范围问题的研究可见著名的“弹跳小球”模型<sup>[3]</sup>。对多体碰撞振动系统, [4]、[5]给出确定任一复杂周期运动的一般方法及稳定性判别准则。文[6]、[7]考虑了弹性体碰撞振动问题。

以上的研究主要是针对系统个别性质的。碰撞振动系统是多参数系统。对这多参数系统的“通有 (generic)”性质尚无研究。本文以一类碰撞振动系统为例, 利用微分拓扑中的基本横截定理 (Elementary Transversality Theorem) 及惠特尼嵌入定理 (Whitney Embedding Theorem), 证明了“仅具有非退化周期解以及周期解数目对微小扰动不变”是该模型的一个“通有”性质, 即具有上述性质的系统在所有系统构成的空间中形成一个稠密开子集。我们还证明了非横截相交、失稳及分叉对应于同一奇异性条件。并给出局部分叉问题的简便算法。

## 二、力学模型和周期解

图 1(a) 是惯性式振动落砂机的力学模型<sup>[2]</sup>。在运动过程中, 铸型  $m$  周期地被撞击而脱离落砂机栅格  $M$ , 然后又自由下落, 再次与栅格发生碰撞。图 1(b) 表示栅格与铸型的位移随时间的变化规律。其中实线表示周期运动, 虚线表示受扰运动。我们设碰撞恢复系数  $R \approx 0$ 。另外为叙述方便, 我们仅限研究  $T$  周期解。  $T$  表示激振力的周期。当  $M$  与  $m$  分离时,  $M$  的振动方程

$$M\ddot{x} + cx + kx = F_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (2.1)$$

本文于 1990 年 12 月 20 日收到第一稿, 于 1991 年 5 月 12 日收到修改稿。

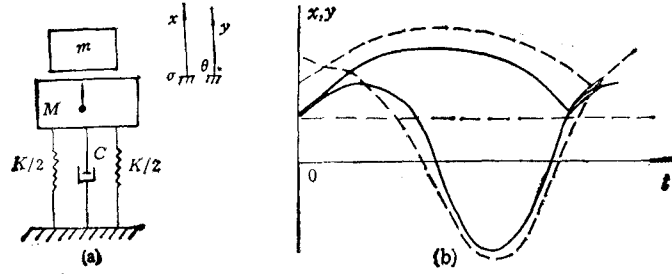


图 1

$m$  的运动微分方程

$$\ddot{y} = -g \tag{2.2}$$

令  $x_1 = x, \dot{x}_2 = \dot{x}, x_3 = y, \dot{x}_4 = \dot{y}$ , 则(2.1)、(2.2)合写成

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, \delta) \tag{2.3}$$

其中  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ ,  $A$  为  $4 \times 4$  阶常数矩阵。由常微分方程组理论, (2.3) 满足  $x(0) = x_0$  的解为

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau, \delta)d\tau \tag{2.4}$$

当  $M$  与  $m$  发生碰撞时, 由碰撞理论知

$$\left. \begin{aligned} x_2^+ &= \frac{1-\mu R}{1+\mu}x_2^- + \frac{\mu(1+R)}{1+\mu}x_4^- \\ x_4^+ &= \frac{1+R}{1+\mu}x_2^- + \frac{\mu-R}{1+\mu}x_4^- \end{aligned} \right\} \tag{2.5}$$

其中  $\mu = m/M, x_2^-, x_4^-$  分别表示  $M$  和  $m$  碰撞前的速度,  $x_2^+, x_4^+$  表碰撞后的速度。碰撞时位移连续条件为

$$x_1^+ = x_1^-, x_3^+ = x_3^- \tag{2.6}$$

(2.5)、(2.6)合写成

$$x^+ = Px^- \tag{2.7}$$

其中  $P$  是  $4 \times 4$  阶矩阵, 且  $\det P = R \neq 0$ 。周期运动的碰撞发生在  $T$  时刻, 此时系统状态向量为  $x^-(T)$ 。利用(2.7), 可求出相邻两次碰撞后瞬时的状态向量之间的关系

$$x^+ = Pe^{AT}x_0 + P \int_0^T e^{A(T-\tau)}f(\tau, \delta)d\tau$$

周期运动必需满足  $x^+ = x_0$ , 故有方程

$$x_0 = (I - Pe^{AT})^{-1}P \int_0^T e^{A(T-\tau)}f(\tau, \delta)d\tau \tag{2.8}$$

我们在上式中已设在某参数区域中,  $(I - Pe^{AT})$  非奇异。记投影算子  $\pi_i: R^4 \rightarrow R, \pi_i(x) = x_i (i = 1, \dots, 4)$ 。利碰撞时位移连续  $x_1 = x_3$ , 由(2.8)得

$$\begin{aligned} \pi_1(I - Pe^{AT})^{-1}P \int_0^T e^{A(T-\tau)}f(\tau, \delta)d\tau \\ = \pi_3(I - Pe^{AT})^{-1}P \int_0^T e^{A(T-\tau)}f(\tau, \delta)d\tau \end{aligned}$$

或简记  $g(\delta) = 0$ . 若  $g$  有  $k$  个互相不同的根  $\delta_i (i = 1, \dots, k)$ , 那么系统有  $k$  个周期运动.

### 三、结构稳定性

我们再从几何观点考察确定周期解的过程.  $\Pi = \{x \in R^4, x_1 = x_3\}$  表示  $R^4$  中的三维超平面. 当然也是  $R^4$  的一个闭子流形. 其参数化为

$$\varphi: R^3 \rightarrow R^4, \varphi(t_1, t_2, t_3) = (t_1, t_2, t_1, t_3)$$

因此

$$\Pi = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$$

其中  $e_1 = (1, 0, 1, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0, 0)^T, e_3 = (0, 0, 0, 1)^T$  是  $\Pi$  的基向量. 方程(2.8)表示为  $R^4$  中的一闭曲线. 其参数化为

$$x_0: S^1 \rightarrow R^4, x_0(\delta) = (I - Pe^{At})^{-1}P \int_0^T e^{A(T-\tau)} f(\tau, \delta) d\tau$$

$S^1$  表示单位圆. 用  $x_0(S^1)$  表示  $S^1$  在  $x_0$  下的像. 则  $x_0(S^1) \cap \Pi$  是周期解集合(图 2).

我们记  $C^\infty(S^1, R^4)$  为  $S^1$  到  $R^4$  中光滑映射的全体, 按  $C^\infty$ —Whitney 拓扑构成拓扑空间<sup>[8]</sup>. 映射  $x_0 \in C^\infty(S^1, R^4)$  与  $R^4$  中子流形  $\Pi$  横截相交定义为<sup>[8]</sup>

- (1)  $x_0(S^1) \cap \Pi = \emptyset$  (空集), 或
- (2)  $(dx_0)_{\delta_j} R + \Pi = R^4, (j = 1, \dots, k)$ .

用  $x_0 \pitchfork \Pi$  表示  $x_0$  与  $\Pi$  横截相交. 图 3.1(a)、(b)、(c) 都是横截相交的情形. 而图 4 中的  $x_0$  与  $\Pi$  非横截相交.

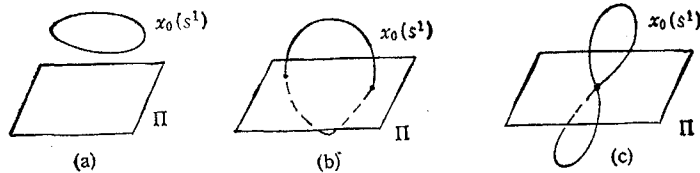


图 2

引理 1 (Elementary Transversality Theorem)<sup>[8]</sup> 若记  $T_\Pi = \{x_0 \pitchfork \Pi, x_0 \in C^\infty(S^1, R^4)\}$ , 则  $T_\Pi$  是  $C^\infty(S^1, R^4)$  的一个稠密开子集.

由引理 1 知当  $x_0 \in T_\Pi$  时,  $x_0$  由于微小扰动产生的新的映射  $x'_0 \in T_\Pi$ . 因此  $x_0$  与  $\Pi$  横截相交是“通有 (generic)”性质. 在第五节中, 我们证明了, 当  $x_0 \pitchfork \Pi$  时, 系统或无周期运动或任一周期运动都是非退化的. 但这还不足以保证  $x_0(S^1) \cap \Pi$  与  $x'_0(S^1) \cap \Pi$  存

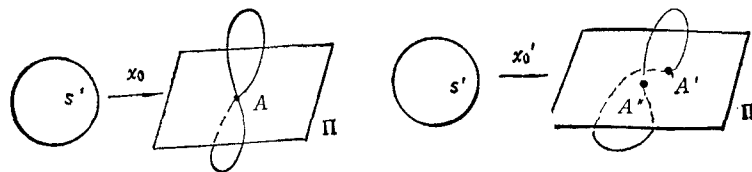


图 3

在一一对应关系。因为存在图 3 所示的不稳定映射  $x_0$ 。它的任何微小扰动都可能会使像的自交点分开。但下面的引理 2 告诉我们这类映射是“稀少”的。

引理 2 (Whitney Embedding Theorem)<sup>[8]</sup> 设  $X, Y$  为光滑流形,  $X$  是紧的。若  $\dim Y \geq 2\dim X + 1$ , 则集合  $T^1 = \{f, f \in C^\infty(X, Y), f \text{ 是嵌入}\}$  是  $C^\infty(X, Y)$  稠密开子集, 且  $f$  是嵌入当且仅当  $f$  为稳定映射。

$f$  是嵌入是指  $f$  在  $X$  上的每一点具有最大秩且  $f$  是  $X$  到  $f(X)$  上的同胚。

因为  $S^1$  是紧流形,  $4 = \dim R^4 \geq 2\dim S^1 + 1 = 3$ , 故由引理 2 知, 将  $S^1$  一对一地映射成  $R^4$  中的简单闭曲线的  $x_0$  构成了  $C^\infty(S^1, R^4)$  中的一个稠密开集  $T^1$ 。  $T_\Pi \cap T^1$  依然是  $C^\infty(S^1, R^4)$  的稠密开集。当  $x_0 \in T_\Pi \cap T^1$  时,  $x_0(S^1) \cap \Pi$ , 与  $x_0$  对应的周期解数目对微小参数扰动不变。可称系统是结构稳定的。

当  $x_0$  与  $\Pi$  非横截相交时, 即存在  $\delta_j, j \in (1, \dots, k)$ , 满足  $x_0(\delta_j) \in \Pi$ ,  $\frac{dx_0}{d\delta} \Big|_{\delta_j}$  与  $e_1, e_2, e_3$  线性相关, 或者说  $\frac{dx_0}{d\delta} \Big|_{\delta_j} \in \Pi$ 。图 4 (a)、(b) 表示两种典型情形。我们知道非横截相交不是通有性质。任何微小扰动都可能使  $x_0(S^1)$  与  $\Pi$  横截相交。如图 4 (a)、(b) 虚线所示。图 4 (a) 表示原来系统的一个周期解, 当参数有微小扰动时, 或消失或分叉为两个周期解。图 4 (b) 类似。因此使  $x_0 \cap \Pi$  不成立的参数值是临界值或分叉值。此时对应的周期解是退化的。

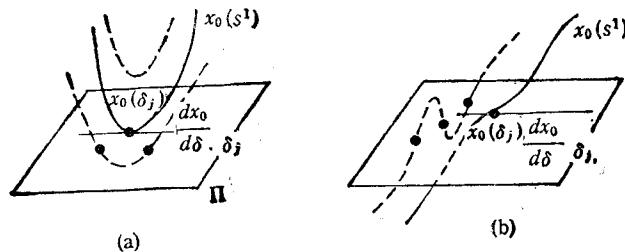


图 4

#### 四、周期解的稳定性

考虑相空间  $R^4$ 。相点在区域  $x_3 \geq x_1$  中运动。  $\Pi$  是碰撞区域。(图 5)。广义极限环  $\widehat{ABCA}$  表示周期运动。相点达到  $\Pi$  时发生跳跃, 然后分离。设在增广相空间  $R^4 \times R$  中,  $A, A', A''$  点的坐标分别为  $(x_0, 0), (x', 0), (x'', T)$ 。

$\widehat{A'B'C'A''}$  表示受扰运动。方程(2.3)满足初条件的解

$$x = x(t, x'), \quad x(0, x') = x' \quad (4.1)$$

在  $B'$  点发生碰撞。此时满足

$$x_1(t, x') = x_3(t, x') \quad (4.2)$$

我们设

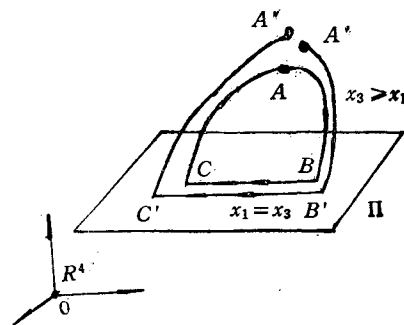


图 5

$$\left[ \frac{\partial x_1(t, x')}{\partial t} - \frac{\partial x_3(t, x')}{\partial t} \right] \Big|_{(t_0, x_0)} = [x_2(t, x') - x_1(t, x')] \Big|_{(t_0, x_0)} \approx 0 \quad (4.3)$$

上式表示周期运动在碰撞时  $m$  与  $M$  具有非零的相对速度。由隐函数定理, 存在光滑函数  $t = t(x')$ , 满足  $t_0 = t(x_0)$ , 当  $\|x' - x_0\| < \delta$  时,  $x_1(t(x'), x') \equiv x_3(t(x'), x')$  恒成立。

碰撞后, 相点  $C^1$  的坐标为  $Px(t(x'), x')$ 。一个周期  $T$  后, 相点  $A''$  的坐标为

$$x'' = x(T - t(x'), Px(t(x'), x'), t(x')) \quad (4.4)$$

周期解满足

$$x_0 = x(T - t(x_0), Px(t(x_0), x_0), t(x_0)) \quad (4.5)$$

记  $\Delta x' = x' - x_0, \Delta x'' = x'' - x_0, \Delta t(\Delta x') = t(x_0 + \Delta x') - t_0$ , 则由 (4.4) 得小扰方程

$$\Delta x'' = G(\Delta x') = H\Delta x' + o(\Delta x') \quad (4.6)$$

其中  $H = \frac{\partial G}{\partial x}(0)$ 。由 Perron<sup>[9]</sup> 定理, 稳定条件为

$$\rho(H) < 1 \quad (4.7)$$

$\rho(H)$  表示  $H$  的谱半径。

以上分析是在增广相空间中取 Poincaré 截面  $\sigma_1 = R^4 \times \{\pi T\}$ , 得到 Poincaré 映射 (4.6) 式。Poincaré 截面的取法不是唯一的。例如可取  $\sigma_2 = \Pi \times R$ ,  $R$  表示时间轴。我们证明这两种取法是等价的。

在  $\Pi$  上取坐标  $(x_1, x_2, x_4)$ 。在  $\sigma_2$  上取扰动

$$\Delta y' = \begin{bmatrix} x_1^+(t(x_0 + \Delta x'), x_0 + \Delta x') - x_1^+(t_0, x_0) \\ x_2^+(t(x_0 + \Delta x'), x_0 + \Delta x') - x_2^+(t_0, x_0) \\ x_4^+(t(x_0 + \Delta x'), x_0 + \Delta x') - x_4^+(t_0, x_0) \\ t(x_0 + \Delta x') - t_0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

式中  $[x_1^+(t_0, x_0), x_2^+(t_0, x_0), x_4^+(t_0, x_0)]^T, [x_1^+(t(x_0 + \Delta x'), x_0 + \Delta x'), x_2^+(t(x_0 + \Delta x'), x_0 + \Delta x'), x_4^+(t(x_0 + \Delta x'), x_0 + \Delta x')]^T$  分别表示  $C, C'$  点的坐标。(4.8) 定义了变换

$$\Delta y' = h(\Delta x') \quad h: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2, \quad h(0) = 0 \quad (4.9)$$

容易证明  $h$  是局部微分同胚。在此变换下, (4.6) 变成

$$\Delta y' = G'(\Delta y') \quad G' = h \circ G \circ h^{-1} \quad (4.10)$$

此变换关系可用下面交换图表示。因此  $G$  与  $G'$  等价。 $G'$  的线性部分的计算可见文 [2]。

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 & \xrightarrow{G} & \sigma_1 \\ h \downarrow & & h \downarrow \\ \sigma_2 & \xrightarrow{G'} & \sigma_2 \end{array}$$

## 五、局部分叉问题

如图 4 所示, 当系统参数为临界值时, 微小的参数变化将引起解的个数变化。最简单的退化情形是所谓余维一奇异性。对应于线性部分  $H$  具有一个模为 1 的特征根, 而其余均小于 1。分叉图仅由不高于三次的项所确定。在所有系统构成的空间中, 具有余维一奇异性的系统形成余维一流形, 而单参数系统为一维流形。它们横截相交也是“通有”性质。

因此研究余维一分叉时,仅取单参数系统.

本文所研究模型的周期解由下方程确定

$$\left. \begin{aligned} (Pe^{AT} - I)x + P \int_0^T e^{A(T-\tau)} f(\tau, \delta) d\tau &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

选择某一参数为分叉参数,如频率比  $\xi$ . (5.1)可写成

$$F(x, \delta, \xi) = 0 \quad (5.2)$$

$F$  关于  $x, \delta$  的雅可比矩阵

$$A_0 = \frac{\partial F(x, \delta, \xi)}{\partial (x, \delta)} = \begin{bmatrix} Pe^{AT} - I & P \int_0^T e^{A(T-\tau)} f_\delta(\tau, \delta) d\tau \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中  $P \int_0^T e^{A(T-\tau)} f(\tau, \delta) d\tau \in R^4, e = (1, 0, -1, 0)$ . 我们记  $A_0 = A(x_0, \delta_0, \xi_0)$ , 其中  $(x_0, \delta_0, \xi_0)$  满足(5.2), 即  $x_0(\delta_0) \in \Pi$ . 不难证明

$$\det A_0 = \pm c \left( \frac{dx_1(\delta)}{d\delta} - \frac{dx_3(\delta)}{d\delta} \right) \Big|_{\delta=\delta_0} \quad (5.3)$$

其中  $c$  为非零常数. 因此

$$\det A_0 \neq 0 \iff [x_0(S^1) \cap \Pi] \Big|_{x_0(\delta_0)} \quad (5.4)$$

当  $\det A_0 \neq 0$  时,由隐函数定理知,存在光滑函数  $x(\xi), \delta(\xi)$  满足方程(5.2). 因此解光滑依赖于参数  $\xi$ . 当  $\det A_0 = 0$  时,由(5.4)知,  $x_0(S^1)$  与  $\Pi$  非横截相交. 我们设  $(Pe^{AT} - I)|_{\xi_0}$  非奇异. 因此零为  $A_0$  的简单特征根. 由(5.3)

$$g'_\delta(\delta_0, \xi_0) = x'_{1\delta}(\delta_0, \xi_0) - x'_{3\delta}(\delta_0, \xi_0) = 0 \quad (5.5)$$

我们分别考虑两种情形

$$(1) \quad g(0, 0) = g_\delta(0, 0) = g_\xi(0, 0) = g_{\delta\delta}(0, 0) = 0, g_{\delta\delta\delta} \cdot g_{\delta\xi} < 0$$

$$(2) \quad g(0, 0) = g_\delta(0, 0), g_{\delta\delta} \cdot g_{\delta\xi} \neq 0$$

(1), (2)的正则型<sup>[10]</sup>分别为

$$(1)' \quad \delta^3 - \delta\xi = 0$$

$$(2)' \quad \pm \delta^2 - \xi = 0$$

或者说(1)、(2)分别是正则型(1)'、(2)'识别问题的解. 即(1)~(1)', (2)~(2)'. 这里~表示等价关系. (1)、(1)'; (2)、(2)'的分叉图如下图. 显然(1)、(2)分别与图 3.3 (b)、(a)

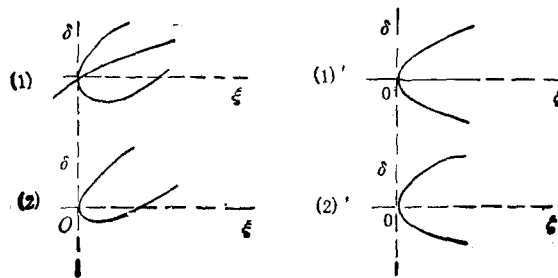


图 6

相对应。

## 六、举 例

我们再考虑图 7(a) 所示模型<sup>[1]</sup>。振动台在水平方向作简谐振动。小球与振动台的两壁作碰撞。不计摩擦。取与振动台固结的动系  $oxy$ ，加惯性力后，对应模型 (7.1)(b)。

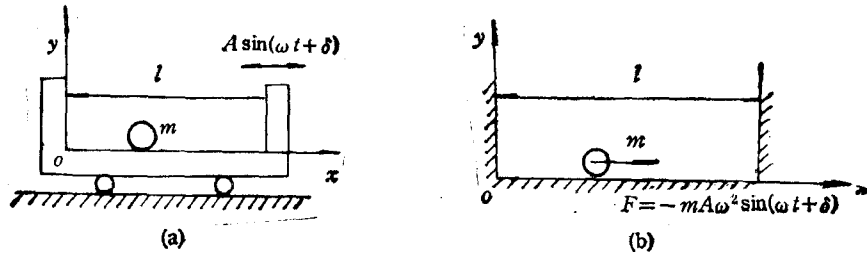


图 7

小球的相对运动微分方程

$$m\ddot{x} = -mA\omega^2 \sin(\omega t + \delta) \quad (6.1)$$

满足初始条件  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$  的解为

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta) + (v_0 - A\omega \cos \delta)t - A \sin \delta \quad (6.2)$$

我们仅确定每个力变化周期小球分别与左右壁各碰一次的对称周期运动。当  $t = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)_-$  时,  $x = l, \dot{x} = v\left(\frac{\pi}{\omega}\right)_-$ 。当  $t = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)_+$  时,  $x = l, \dot{x} = v\left(\frac{\pi}{\omega}\right)_+$ 。碰撞定律为

$$-Rv\left(\frac{\pi}{\omega}\right)_- = v\left(\frac{\pi}{\omega}\right)_+.$$

周期运动必需满足  $v\left(\frac{\pi}{\omega}\right)_+ = -v_0$ 。由以上条件不难得到确定相位角的方程

$$g(\delta) = \sin(\delta + \phi) + E = 0 \quad (6.3)$$

其中  $\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1+R}{1-R}\right)$ ,  $E = \frac{l}{2A\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2} \frac{1+R}{1-R}\right)^2}}$ 。  $g(\delta)$  的图形如图 8 所示。

示。当  $E < 1$  时, 系统有两个周期解。当  $E = 1$  时, 两个周期解合二为一。当  $E > 1$  时, 则无周期解。

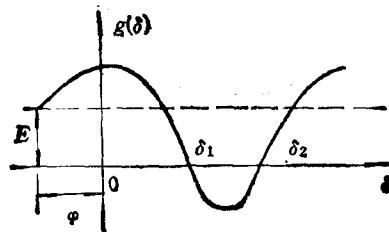


图 8

感谢舒仲周教授的指导。

### 参 考 文 献

- [1] Masri S F, Caughey T R. *JAM, ASME*, 1966, 88: 586—592.
- [2] 舒仲周, 谢建华. 西南交通大学学报, 1985, 3: 14—25.
- [3] Holmes P J. *J. Sound Vib.*, 1982, 84: 173—189.
- [4] 舒仲周, 振动工程学报, 1990, 3, (3): 42—51.
- [5] Shu Zhongzhou (舒仲周), *Proc. Conf. ICDVC, Peking, China, 1990: 930—936.*
- [6] Masri S F. *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, 1973, 99, (4): 669.
- [7] Cabannes H. *Journale de Mécanique*, 1981, 20, (1): 41—57.
- [8] Golubitsky M, Guillemin V. *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer—Verlag 1973: 56—57, 61—63.
- [9] LaSalle J P. *The Stability of Dynamical Systems*, SIAM, Philadelphia, USA 1976: 18.
- [10] Golubitsky M, Schaeffer D G. *Singularities and Group in Bifurcation Theory*, Springer—Verlag 1985, 1: 93—96.
- [11] Ock Hyun Kim, Byung Ho Lee, *Mechanics Research Communications*, 1983, 10, (3): 151—156.

## APPLICATION OF THE TRANSVERSALITY THEORY ON THE PROBLEMS OF STRUCTURAL STABILITY OF IMPACT VIBRATION SYSTEMS

Xie Jianhua

(Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031)

**Abstract** This paper discusses the structural stability of impact vibration systems by means of the transversality theory. Relationships among structural stability, loss of stability and bifurcation are also discussed.

**Key words** impact vibration, structural stability, transversality, bifurcation