

# 用点源函数解受集中力圆板的非对称弯曲

王安稳

(海军工程学院材料力学教研室, 武汉 430033)

**摘要** 本文将作用于板上任意位置的一个垂直于板中面的集中力看作一个点源, 用 $\delta$ 函数表示, 导出了受集中力作用的圆板非对称弯曲微分方程的封闭式特解和级数式齐次解, 从而得出了适用于全板的统一的位移表达式。

**关键词** 圆板, 非对称弯曲, 集中力, 点源函数

## 1. 前言

在薄板的小挠度弯曲中, 根据线性理论可以应用迭加原理, 即任意横向载荷引起的板的位移都可以考虑为有限个或无限个(当载荷为分布力时)集中力所引起的位移的迭加。因此, 在集中载荷作用下圆板非对称弯曲的解, 可以看作是板的小挠度理论中的基本问题之一。

圆板在单个集中载荷作用下的非对称弯曲问题, 经典的解法<sup>[1,2]</sup>是沿过载荷作用点的圆周将板分为内外两部分, 即一个半径为 $r_0$  ( $r_0$ 为载荷作用点到板中心的距离)的较小的圆板和一个环板, 然后分别求出适用于两部分的级数解, 并由连接条件及边界条件确定出积分常数。在求解过程中, 需要用傅立叶级数来表达集中力 $P$ 。

本文将作用于圆板上任意位置的一个垂直于板平面的单位集中力看作一个点源, 用 $\delta$ 函数表示, 借助于二维拉普拉斯方程的基本解, 求得板弯曲四阶偏微分方程的一个封闭式特解和级数式齐次解, 得出了一个对整个圆板一致适用的解表达式。在求解的过程中无需将集中力展开为傅立叶级数。

## 2. 集中力 $P$ 作用下圆板的弯曲微分方程

图1(a)所示半径为 $R$ 的圆板, 用极坐标 $r$ 和 $\theta$ 表示变形前板中面上各质点的位置。有一横向集中力 $P$ 作用于板上 $M_0(r_0, \theta_0)$ 一点。

取板中面的挠度 $w = w(r, \theta)$ 为基本未知函数, 我们将图1(a)所示圆板的弯曲微分方程写为

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{P}{D} \delta(M, M_0) \quad (2.1)$$

其中, 拉氏算符

本文于1990年9月5日收到第一稿, 于1990年12月1日收到修改稿。

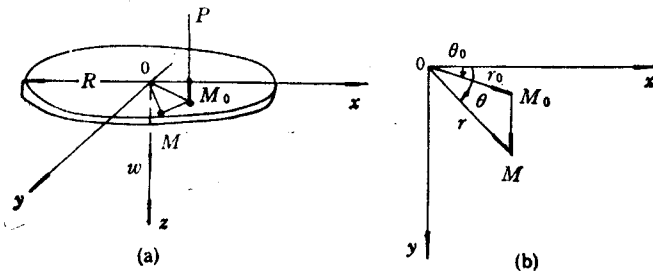


图 1

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.2)$$

二维  $\delta$  函数定义为

$$\delta(M, M_0) = \begin{cases} 0 & (\text{当 } M_0 \neq M) \\ \infty & (\text{当 } M_0 = M) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\iint_A \delta(M, M_0) dA_M = \begin{cases} 0 & (\text{当 } M_0 \notin A) \\ 1 & (\text{当 } M_0 \in A) \end{cases} \quad (2.4)$$

板的弯曲刚度,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.5)$$

(2.5)式中,  $h$  表示板厚,  $E$ 、 $\nu$  分别表示材料的弹性模量和泊松比。

### 3. 方程 (2.1) 的特解

首先求下列方程的特解

$$\nabla^2 \nabla^2 U = \delta(M, M_0) \quad (3.1)$$

令

$$V = \nabla^2 U \quad (3.2)$$

则方程(3.1)可以改写为

$$\nabla^2 V = \delta(M, M_0) \quad (3.3)$$

方程(3.3)的一个特解  $\tilde{V}$  即是二维拉普拉斯方程的基本解<sup>[3]</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \frac{1}{2\pi} \ln(r_{M_0 M}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

将(3.4)代入(3.2)式,得到

$$\nabla^2 U = \frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}) \quad (3.5)$$

我们求得方程(3.5)的一个特解为

$$\tilde{U} = \frac{1}{8\pi} [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)] [\ln(\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}) - 1] \quad (3.6)$$

比较方程(2.1)和(3.1), 可知方程(2.1)的一个特解为

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \frac{P}{D} \tilde{U} \\ &= \frac{P}{8\pi D} [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)] [\ln(\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}) - 1]\end{aligned}\quad (3.7)$$

对于板平面内任一曲线  $\Gamma$  的  $(n, s)$  坐标 (图 2), 可以导出沿曲线  $\Gamma$  的横截面上的横剪力  $Q_n$  与位移  $w$  的关系式

$$Q_n = -D \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 w) \quad (3.8)$$

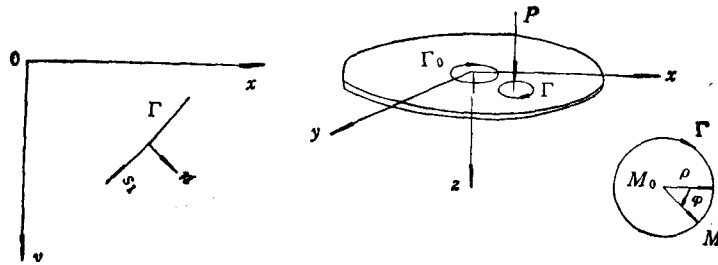


图 2

将曲线  $\Gamma$  取为以  $P$  的作用点  $M_0$  为圆心、以  $\rho$  为半径的小圆周。把(3.7)代入(3.8), 并利用(3.2)式, 得到

$$\begin{aligned}Q_n &= -D \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 \tilde{w}) \\ &= -D \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{P}{D} \nabla^2 \tilde{U} \right) \\ &= -\frac{P}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{MM_0})\end{aligned}\quad (3.9)$$

取闭路积分

$$\oint_{\Gamma} Q_n \cdot d\Gamma = \oint_{\Gamma} \left[ -\frac{P}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} (\ln \rho) \right] \cdot \rho d\varphi = -P \quad (3.10)$$

由此说明, 由(3.7)式所表示的方程(2.1)的特解  $\tilde{w}$  确实表征了  $M_0$  点有集中力  $P$  作用。

将圆板上任意点  $M$  与载荷作用点  $M_0$  的坐标分别用复数表示 (图 1b)。

$$Z = re^{i\theta}, \quad Z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \quad (3.11)$$

则(3.7)式可以写成

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \frac{P}{8\pi D} \cdot \text{Re}\{ [r^2 + r_0^2 - rr_0(e^{i(\theta-\theta_0)} + e^{-i(\theta-\theta_0)})] \\ &\quad \cdot [\ln(Z - Z_0) - 1] \}\end{aligned}\quad (3.12)$$

其中,  $\text{Re}\{ \}$  表示括号中表达式的实部。

当  $r > r_0$  即  $|Z| > |Z_0|$  时, 将  $\ln(Z - Z_0)$  展开成级数<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned}\ln(Z - Z_0) &= \ln Z + \ln\left(1 - \frac{Z_0}{Z}\right) \\ &= \ln Z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{Z_0}{Z}\right)^n\end{aligned}\quad (3.13)$$

将(3.13)、(3.11)代入(3.12),得到  $\tilde{w}$  的傅立叶展式:

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \frac{P}{8\pi D} \left\{ (r^2 + r_0^2) \ln r - r^2 - \left( 2r_0 r \ln r + \frac{r_0^3}{2r} - r r_0 \right) \cos(\theta - \theta_0) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{1}{n(n-1)} \frac{r_0^n}{r^{n-2}} - \frac{1}{n(n+1)} \frac{r_0^{n+2}}{r^n} \right] \cos n(\theta - \theta_0) \right\}\end{aligned}\quad (3.14)$$

当  $r < r_0$  即  $|Z| < |Z_0|$  时,将(3.7)式写成

$$\tilde{w} = \frac{P}{8\pi D} \operatorname{Re} \{ [r^2 + r_0^2 - r r_0 (e^{i(\theta-\theta_0)} + e^{-i(\theta-\theta_0)})] [\ln(Z_0 - Z) - 1] \},$$

并将其中的  $\ln(Z_0 - Z)$  展成下列级数

$$\ln(Z_0 - Z) = \ln Z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{Z}{Z_0}\right)^n,$$

可以导出  $\tilde{w}$  的下列傅立叶展式:

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \frac{P}{8\pi D} \left\{ (r_0^2 + r^2) \ln r_0 - r_0^2 - \left( 2r_0 r \ln r_0 + \frac{r^3}{2r_0} - r_0 r \right) \cos(\theta - \theta_0) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{1}{n(n-1)} \frac{r^n}{r_0^{n-2}} - \frac{1}{n(n+1)} \frac{r^{n+2}}{r_0^n} \right] \cos n(\theta - \theta_0) \right\}\end{aligned}\quad (3.15)$$

#### 4. 方程(2.1)的齐次解

##### 1. 齐次解的一般表达式

方程(2.1)的关联齐次方程

$$\nabla^2 \nabla^2 w_0 = 0 \quad (4.1)$$

的解  $w_0$  应为角变量  $\theta$  的周期函数,且应是  $(\theta - \theta_0)$  的偶函数. 因此,取

$$w_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \cos n(\theta - \theta_0) \quad (4.2)$$

把(4.2)代入(4.1),得到关于  $f_n(r)$  的一系列常微分方程:

$$\begin{aligned}f_n^{(4)}(r) + \frac{2}{r} f_n^{(3)}(r) - \frac{1 + 2n^2}{r^2} f_n^{(2)}(r) \\ + \frac{1 + 2n^2}{r^3} f_n^{(1)}(r) + \frac{n^4 - 4n^2}{r^4} f_n(r) = 0\end{aligned}\quad (4.3)$$

方程(4.3)的一般解为

$$\left. \begin{aligned}f_0(r) &= a_0 + b_0 \ln r + c_0 r^2 + d_0 r^2 \ln r \\ f_1(r) &= a_1 + b_1 r^{-1} + c_1 r^3 + d_1 r \ln r \\ f_n(r) &= a_n + b_n r^{-n} + c_n r^{n+2} + d_n r^{2-n}, \quad n \geq 2\end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

其中  $a_n, b_n, c_n, d_n$  为积分常数.  $r = 0$  时,  $w_0$  与  $\partial w_0 / \partial r$  的值有界,且  $w_0$  在  $r = 0$  点的值与  $\theta$  无关,因此必须令

$$b_0 = b_n = d_n = 0, \quad n \geq 1$$

由此(4.2)式成为

$$\begin{aligned} w_0(r, \theta) &= a_0 + c_0 r^2 + d_0 r^2 \ln r \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + c_n r^{n+2}) \cos n(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$w_0$  仅代表边界力对位移的影响。因此, 将(4.5)代入(3.8), 取积分路径  $\Gamma_0$  为以板中心为圆心的小圆周, 必须有

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_0} Q_n d\Gamma_0 &= -\oint_{\Gamma_0} D \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 w_0) d\Gamma_0 \\ &= -\int_0^{2\pi} D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w_0) \cdot r d\theta \\ &= -8\pi D d_0 = 0 \end{aligned}$$

由此得出  $d_0 = 0$ ,  $w_0$  的表达式(4.5)成为

$$w_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + c_n r^{n+2}) \cos n(\theta - \theta_0) \quad (4.6)$$

将特解(3.7)与齐次解(4.6)相加, 我们得到方程(2.1)的一般解

$$\begin{aligned} w &= \tilde{w}(r, \theta) + w_0(r, \theta) \\ &= \frac{P}{8\pi D} [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)] [\ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} - 1] \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + c_n r^{n+2}) \cos n(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (4.7)$$

解(4.7)在板的全域内 ( $0 \leq r < R$ ) 内一致有效。

## 2. 系数 $a_n, c_n$ 的确定

### 1) 边缘夹支的圆板

如板的边缘为夹支, 则对应的边界条件为

$$(w)_{r=R} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=R} = 0$$

将(4.7)代入上式, 并将  $\tilde{w}$  的表达式按(3.14)展开, 可以定出(4.6)式中的系数  $a_n, c_n$ ,

$$a_n = -\frac{P}{8\pi D} R^{-n} \bar{a}_n, \quad c_n = -\frac{P}{8\pi D} R^{-(n+2)} \bar{c}_n \quad (4.8)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_0 &= r_0^2 \ln R - \frac{R^2 + r_0^2}{2} \\ \bar{c}_0 &= R^2 \ln R - \frac{R^2 - r_0^2}{2} \\ \bar{a}_1 &= 2Rr_0 - 2r_0 R \ln R - \frac{r_0^3}{R} \\ \bar{c}_1 &= \frac{r_0^3}{2R} - r_0 R \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_n &= \left(\frac{r_0}{R}\right)^n \left(\frac{1}{n-1} R^2 - \frac{1}{n} r_0^2\right) \\ \bar{c}_n &= \left(\frac{r_0}{R}\right)^n \left(\frac{1}{n+1} r_0^2 - \frac{1}{n} R^2\right), \quad n \geq 2 \end{aligned} \right\}$$

将(4.8)代入(4.7),我们得到边缘为夹支的圆板承受集中力  $P$  时的位移

$$\begin{aligned} w &= \frac{P}{8\pi D} [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)] [\ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} - 1] \\ &\quad - \frac{P}{8\pi D} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \bar{a}_n \left(\frac{r}{R}\right)^n + \bar{c}_n \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \right] \cos n(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中,  $(r_0, \theta_0)$  表示  $P$  作用点  $M_0$  (图 1) 的坐标,  $\bar{a}_n, \bar{c}_n$  由(4.9)式确定. (4.10)中的级数式在区间  $r \leq R$  上绝对收敛.

当  $r < r_0$  时,将(4.10)式右端对应(3.7)式  $\tilde{w}$  的部分按(3.15)展开;当  $r > r_0$  时,将  $\tilde{w}$  按(3.14)展开,即得出本问题的经典解<sup>[2]</sup>.

在(4.10)式中,令  $r_0 = 0$ , 得出边界夹支的圆板当中心有集中力  $P$  作用时的位移表达式

$$w(r) = \frac{P}{8\pi D} \left( \frac{R^2 - r^2}{2} + r^2 \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right) \quad (4.11)$$

(4.11)同文献[2]中的解相同.

## 2) 边缘为简支的圆板

如边缘为简支,则对应边界条件为

$$\begin{aligned} (w)_{r=R} &= 0 \\ (M_r)_{r=R} &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]_{r=R} = 0 \end{aligned}$$

上式中  $M_r$  表示  $r =$  常数的圆周截面上的弯矩.

采用与 1) 中相同的步骤,可以得出简支圆板受集中力  $P$  作用时,位移  $w$  的表达式仍如(4.10). 所不同的是其中的系数  $\bar{a}_n, \bar{c}_n$  由下式确定.

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_0 &= r_0^2 \ln R - R^2 - \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} (R^2 - r_0^2) \\ \bar{c}_0 &= R^2 \ln R + \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} (R^2 - r_0^2) \\ \bar{a}_1 &= \frac{4+2\nu}{3+\nu} r_0 R - \frac{1+\nu}{3+\nu} \frac{r_0^3}{R} - 2Rr_0 \ln R \\ \bar{c}_1 &= -\frac{1+\nu}{3+\nu} r_0 R - \frac{1-2\nu}{6+2\nu} \frac{r_0^3}{R} \\ \bar{a}_n &= \frac{3+\nu}{(n-1)(2n+1+\nu)} \frac{r_0^n}{R^{n-2}} - \frac{1+\nu}{n(2n+1+\nu)} \frac{r_0^{n+2}}{R^n} \\ \bar{c}_n &= -\frac{1+\nu}{n(2n+1+\nu)} \frac{r_0^n}{R^{n-2}} - \frac{1-\nu}{(n+1)(2n+1+\nu)} \frac{r_0^{n+2}}{R^n} \quad n \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

在(4.10)式和(4.12)式中,令  $r_0 = 0$ , 得到简支圆板中心有集中力  $P$  作用时的位移.

$$w(r) = \frac{P}{8\pi D} \left[ r^2 \ln \left( \frac{r}{R} \right) + \frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} (R^2 - r^2) \right] \quad (4.13)$$

(4.13)式也与文献[2]中的解相同.

### 参 考 文 献

- [1] Chou P Ch, and Pagano N J. *Elasticity: Tensor, Dyadic, and Engineering Approaches*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, (1967).
- [2] 铁摩辛柯, S., 沃诺斯基, S. 《板壳理论》,《板壳理论》翻译组译,科学出版社, 1977.
- [3] 复旦大学数学系,《数学物理方程》,第二版,上海科学技术出版社, 1961.
- [4] 斯米尔诺夫, B. N., 《高等数学教程》,第三卷,第二分册,叶彦谦译,人民教育出版社,1958.

## SOLUTION TO ASYMMETRIC BENDING OF CIRCULAR PLATES UNDER SINGLE LOAD BY USING POINT-SOURCE FUNCTION

Wang Anwen

**Abstract** In the present paper, the point-load normal to the middle surface, located at a arbitrary place on a plate, is taken as a point source and expressed as the  $\delta$ -function. In the paper is derived the non-homogeneous solution in closed form and homogeneous solution in series form of the differential equation for the bending of the circular plate under single load, thus obtaining the uniform displacement expression valid for the whole plate.

**Key words** circular plate, asymmetric bending, single load, point-source function