

# 方腔中多孔介质自然对流 分叉的数值模拟

张树海

(中国空气动力研究与发展中心, 绵阳 621000)

**摘要** 本文用三次样条方法对充满饱和和多孔介质的方腔的底部加热时出现的对流分叉现象进行了数值模拟, 得到三个分叉点, 观察到了分叉点邻域内流动发展状态, 对稳定性与扰动幅度关系做了初步的探讨.

**关键词** 分叉, 热对流, 数值模拟

## 1. 引言

分叉是非线性动力系统中一个非常重要的物理现象, 它广泛地存在于流体力学中. Benard 对流、圆柱绕流及同心圆管中的旋转流动等都存在分叉现象. 与此类似, 多孔介质层中的自然对流也包含了分叉的结构<sup>[1]</sup>, 它不仅在石油、天然气的开发中起着重要的作用, 而且做为一种新型材料, 在航天、高层建筑中也引起了广泛的关注, 并需要对它的传热性能做一全面研究. 多孔介质层中的对流作为非线性动力系统吸引许多数学家、力学家及地学工作者做了大量的研究, 发现了多种流动状态. 研究表明, 随瑞利  $Ra$  数的不同, 将有下列三种流动<sup>[2-6]</sup>: (1)  $Ra < 4\pi^2$  时, 流体介质静止, 不出现流动; (2)  $Ra > 4\pi^2$  时, 出现稳定的热对流; (3) 如果  $Ra$  很大时, 还会出现脉动对流.

然而, 大多数工作研究的是对流和脉动出现的条件, 对稳定对流的结构及系统的非线性行为研究很少. 最近, 张涵信教授<sup>[7]</sup>用摄动方法详细地研究了这一问题, 从理论上严格地描述了它的分叉结构.

本文对大范围  $Ra$  数下充满饱和和多孔介质的方腔的底部加热时出现的对流进行了详细的数值模拟, 旨在弄清稳定对流的流动结构, 观察流动分叉出现和演变机理, 分析流动发展特性, 得到了与张涵信教授的摄动分析定性上一致的结果.

## 2. 控制方程及数值方法

多孔介质层中不可压缩 Boussinq 流体介质在遵从 Darcy 定律、忽略粘性拖曳力和内力时支配方程如下

$$\Delta\psi = -Ra\partial\theta/\partial x \quad (1)$$

$$\partial\theta/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta = \Delta\theta \quad (2)$$

本文于 1992 年 6 月 3 日收到第一稿, 1993 年 3 月 1 日收到修改稿.

其中  $\psi$  为流函数, 速度矢量  $\mathbf{u} = (u, v) = (\partial\psi/\partial y, -\partial\psi/\partial x)$ ,  $\theta$  为无量纲温度,  $\Delta$  为 Laplace 算子,  $\nabla$  为梯度.

边界条件为

$$x = 0, 1 : \quad \theta/x = 0, \psi = 0; \quad (3a)$$

$$y = 0 : \quad \theta = 1, \psi = 0; \quad (3b)$$

$$y = 1 : \quad \theta = 0, \psi = 0. \quad (3c)$$

水平线上的 Nusselt 数由下式给出

$$Nu = \int_0^1 (-\partial\theta/\partial y + v\theta) dx \quad (4)$$

方程 (1)-(3) 的数值模拟采用三次样条交替方向法<sup>[8]</sup>, (4) 式由三次样条分段积分求得.

### 3. 数值结果和分叉现象

本文的计算是从  $Ra$  等于 10 开始的, 其稳定结果是  $\theta = 1 - y, \psi = 0$ , 它是这一问题的平凡解. 当  $Ra$  大于等于 40 时, 出现了热对流, 但随  $Ra$  数的不同, 流场中出现了不同的涡. 图 1-图 3 是计算得到的几组  $Ra$  数下的典型流动状态, 分别包含有一个涡、两个涡和三个涡. 由分叉理论, 在它们之间应存在临界  $Ra$  数  $Ra_{c1}, Ra_{c2}, Ra_{c3}$ . 通过大量的计算, 得到三个临界点分别是 39.50, 119.34, 690.20. 它们是一次、二次、三次叉型分叉点.

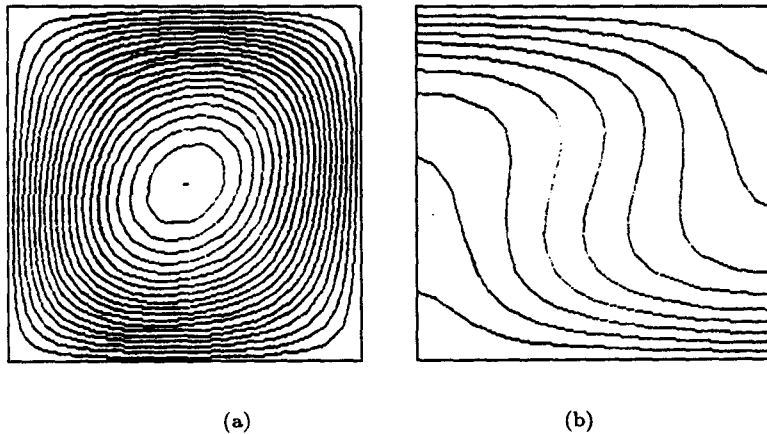


图 1  $Ra=100$  的稳定流线 (a) 和等温线 (b)

Fig.1 Steady-state (a) streamlines and (b) isotherms for  $Ra=100$

这种多涡结构与张涵信<sup>[7]</sup>用摄动分析得到的结果定性上是一致的. 所得到的  $Ra_{c1}$  相当一致, 但  $Ra_{c2}, Ra_{c3}$  则有所差异, 这主要基于下面两个事实:

(1) 文<sup>[7]</sup>的分析是在平凡解上的一次摄动分析, 对一次分叉点来说是精确的, 但对二次、三次分叉点的强非线性会有差异.

(2) 非线性系统的稳定性与扰动历程及扰动的幅度有很大关系<sup>[9]</sup>.

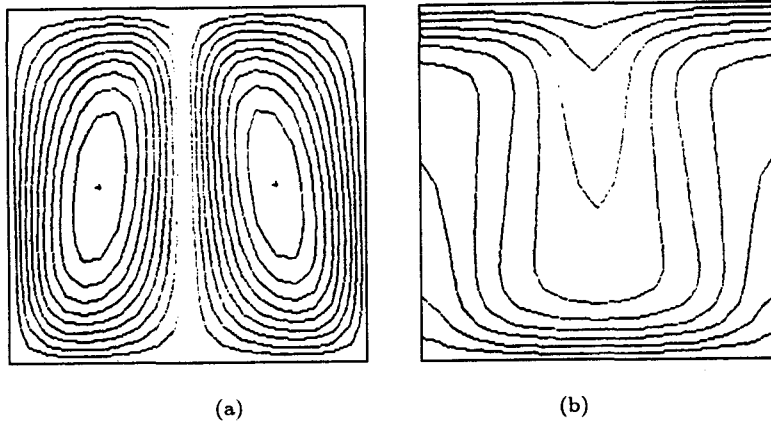


图 2  $Ra=200$  的稳定流线 (a) 和等温线 (b)

Fig.2 Steady-state (a) streamlines and (b) isotherms for  $Ra=200$

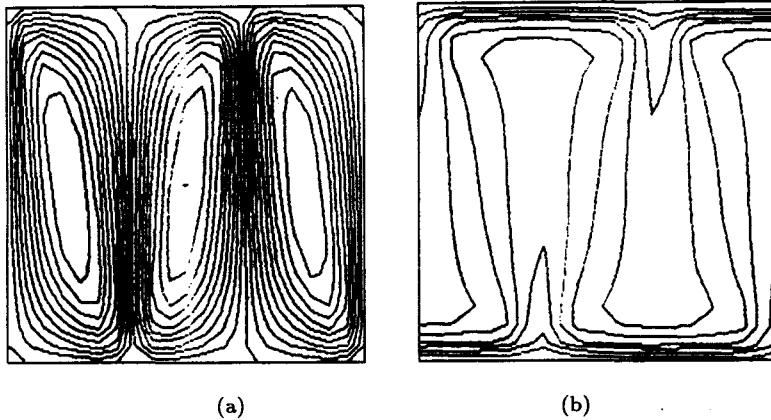


图 3  $Ra=800$  的稳定流线 (a) 和等温线 (b)

Fig.3 Steady-state (a) streamlines and (b) isotherms for  $Ra=800$

图 4 是  $Ra_{c2}$  邻域内流动随时间的演变过程. 其中左图是  $Ra=119.33$  的流场, 右图是  $Ra=119.35$  的流场. 很明显, 流场开始形成了单涡, 即一级分叉解, 由数值误差引起的小扰动在临界点的左测最终衰减至消失, 而在其右侧增长使流动二次分叉. 因此, 二次分叉点的确定应以一级解为基础, 而在平凡解上的一次摄动结果会出现较大的误差. 计算表明, 扰动并不象线性分析那样是单调变化的, 小扰动在分叉点左邻域开始是递增的, 到某一时刻后才开始衰减, 这说明线性分析的结果会偏低. 事实上, 一个非线性系统的稳定性即是对扰动的抵抗能力不仅仅依赖于初始状态, 而且与扰动的幅度及历程有关. 如圆柱绕流实验, 每个实验都有一定的扰动, 但由于其幅度不同, 所得到的从层流到湍流转捩雷诺数有很大的差别.

为模拟分叉点与扰动幅度的关系, 在计算中引入如下扰动波

$$\psi = \varepsilon \sin[(m + 1)\pi x] \sin(\pi y), \quad \theta = \varepsilon(m + 1)\pi \cos(m\pi x) \sin(\pi y)/(mRa)$$

( $m$  等于稳定时的涡数), 改变其振幅, 得到不同的临界  $Ra$  数如图 5 所示. 我们把此

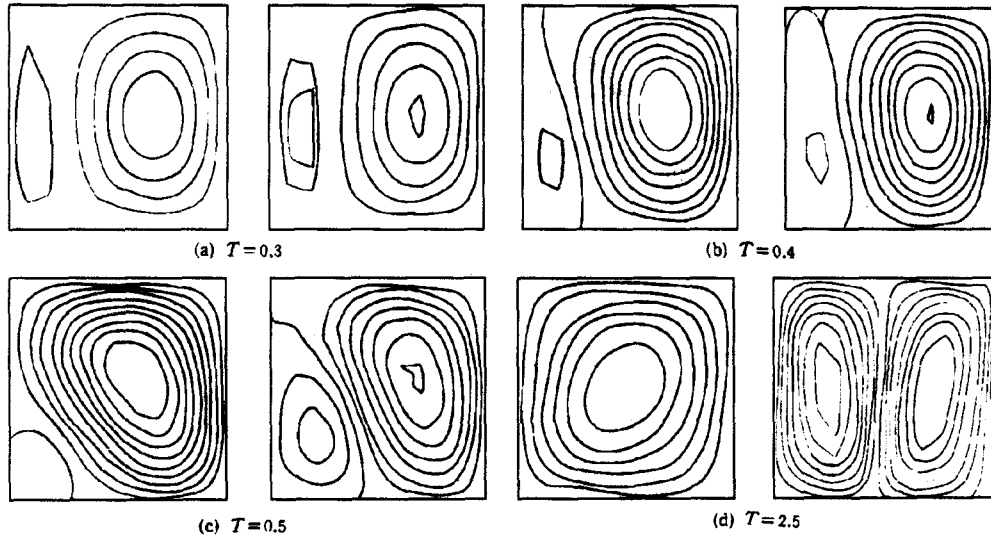


图 4  $Ra_{c2}$  邻域内流场发展过程

Fig.4 The development of flow field in the vicinity of  $Ra_{c2}$

曲线称为条件稳定曲线，它把第 I 象限划分为三个区域 I、II、III，它们分别是单涡、双涡和三涡区。它给出条件稳定的最小分叉数值是： $Ra_{c2} = 77.25$ ,  $Ra_{c3} = 158.39$ ，此值则是全局稳定界限。

图 5 表明，扰动幅度越小，其分叉点越大。理想的条件稳定曲线是以横轴和全局稳定界限为渐近线的曲线，但由于数值扰动，数值模拟得到的是与横轴相交的曲线，其交点正是在数值格式中存在的扰动幅度下的临界点。众所周知，每个计算方法都有截断误差，它可以分解成各种波数的扰动波，但幅度都很小，而且不同的算法都不同，因此，不同的格式，如不附加扰动，将得到不同的分叉点。文 [1,2] 的计算也证实了这一点。图 6 是  $Nu$  数与  $Ra$  数及其涡数的关系曲线。

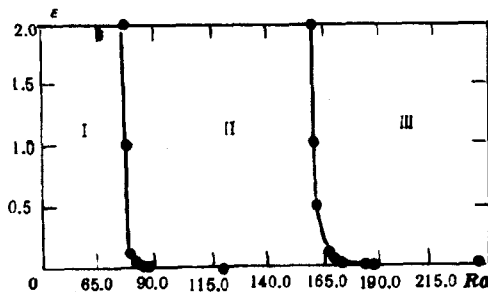


图 5 条件稳定曲线

Fig.5 Conditional stability curve, showing three types of flow field: I. one vortex; II. two vortices; III. three vortices

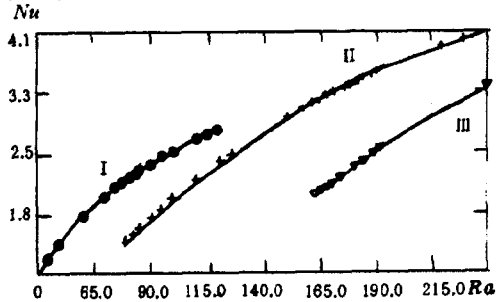


图 6 Nusselt 数与  $Ra$  数及涡结构的关系

Fig.6 The Nusselt number as a function of  $Ra$  number for: I. one vortex; II. two vortices; III. three vortices

#### 4. 结束语

(1) 本文用三次样条法计算了大范围  $Ra$  数的多孔介质层中稳定对流的分叉结

构, 得到了三个分叉点, 观察到了流体介质在分叉点邻域内演变历程.

(2) 对条件稳定性进行了初步的研究, 模拟了两条件稳定曲线.

在本文的研究过程中, 得到张涵信教授悉心指导和韩隆恒研究员的大力帮助, 对此表示衷心的感谢.

### 参 考 文 献

- [1] Robillard L. *Numerical Heat Transfer*, 1988, 13: 91-110
- [2] Caltagirone J P. *J. Fluid Mech.*, 1975, 72: 269-288
- [3] Caltagirone J P, Bories S. *J. Fluid Mech.*, 1983, 155: 267-285
- [4] Elder J W. *J. Fluid Mech.*, 1967, 27: 273-280
- [5] Wooding R A. *J. Fluid Mech.*, 1967, 27:607-623
- [6] Hone R N. *J. Fluid Mech.*, 1974, 66:339-352
- [7] 张涵信. 中国空气动力研究与发展中心报告, 1991
- [8] 王璞. 空气动力学学报, 1983, (3): 17-29
- [9] Joseph D D. *Stability of Fluid Motion (I, II)*, 1976

## NUMERICAL SIMULATION OF CONVECTIVE BIFURCATION FOR A SQUARE POROUS CAVITY

Zhang Shuhai

(*China Aerodynamics Research and Development Centre.*  
*Mianyang 621000, China*)

**Abstract** The convective bifurcation of fluid through porous media in a square cavity heated from below is simulated numerically by the cubic spline method. This paper gives three critical points and presents the preliminary results for conditional stability.

**Key words** bifurcation, convection, numerical simulation