

# 部分充液转子受侧向激励的精确解

陶明德 张 文

(复旦大学应用力学系, 上海 200433)

**摘要** 本文讨论当部分充液转子受到侧向激励时, 作用在转子上的扰动力. 首先我们在和转子固连的旋转坐标系中证明了扰动流动是无旋的, 然后在分析中把整个流动分解为常涡量的定常流动和无旋的扰动流动. 求得了自由面和作用在转子上的合力的显式表达式. 可见对于某一给定的充液比, 存在两个临界频率.

**关键词** 转子, 侧向激励, 临界频率, 充液比

## 1. 引言

工程上常涉及内腔部分充液的柔性转子, 当转子作无扰定常自旋时, 即使液体粘性充分小, 长时间后液体最终被均匀地甩向内壁四周形成一个同心圆液层, 并且随转子同步旋转. 当转子发生扰动运动时, 腔内旋转液体也被激起扰动运动, 两者发生耦合. 在某些转速范围内, 导致转子自激失稳. 这是典型的流-固耦合自激振荡. Kollmann<sup>[1]</sup> 在 1962 年最早对充液转子作了实验研究, Wolf<sup>[2]</sup> 在 1968 年则采用理想流体模型作了平行涡动分析, 导出了自转角速度的失稳阈值. 因此这种失稳被称为 Kollmann-Wolf 不稳定性. 由于流体的扰动运动是迭加在一个旋转流动上的, 故给理论分析带来了一定的难度.

本文从理论上分析了高速转子受侧向简谐位移激励引发的腔内自旋流体的扰动运动及其对转子的作用力. 我们首先证明了在高频扰动时粘性的影响可忽略以及在与转子固连的旋转坐标系中扰动流动是无旋的, 然后在分析中把整个流动分解为常涡量的定常流动和无旋的扰动流动, 求得了问题的精确解. 我们尚未见到过这类分析. 当位移激励的频率取某些特定值时, 扰动力成为无穷大, 相应的频率称为临界频率. 对于某一给定的充液比, 存在两个临界频率.

## 2. 运动方程和边界条件

图 1 为转子截面, 自转角速度  $\Omega$ , 转子腔室的内径  $a$ , 定常旋转时液体内径  $b$ . 取绝对坐标系  $oxy$ , 沿  $x$  方向的侧向位移激励为  $X(t) = \delta \cos \omega t$ ; 又取与转子同步旋转的极坐标系  $(r, \theta)$ , 坐标原点位于转子中心, 在该坐标系中粘性流体扰动运动的线化方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} - 2\Omega v_\theta - \Omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \delta \omega^2 \cos \omega t \cos(\theta + \Omega t) \\ + \nu \left( \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

本文于 1992 年 6 月 15 日收到第一稿, 1992 年 12 月 9 日收到修改稿.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} + 2\Omega v_r = & -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \delta \omega^2 \cos \omega t \sin(\theta + \Omega t) \\ & + \nu \left( \Delta v_{\theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

取无量纲量

$$\begin{aligned} v_r^* = \frac{v_r}{\delta \omega}, \quad v_{\theta}^* = \frac{v_{\theta}}{\delta \omega}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{\omega}, \\ p^* = \frac{p}{\rho \delta^2 \omega^2}, \quad t^* = t\omega, \quad r^* = \frac{r}{\delta} \end{aligned} \quad (3)$$

代入 (1) 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r^*}{\partial t^*} - 2\Omega^* v_{\theta}^* - \Omega^{*2} r^* = & -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \cos t^* \cos(\theta + \Omega^* t^*) \\ & + \frac{1}{\omega \delta^2} \left( \Delta v_r^* - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v_{\theta}^*}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}^*}{r^{*2}} \right) \end{aligned}$$

可见当扰动运动的  $Re$  数

$$Re = \frac{\omega \delta^2}{\nu} \gg 1 \quad (4)$$

时, 可忽略粘性项, 这表示此时惯性力与粘性力相比占优, 本文感兴趣的正是这类问题. 对 (2) 也可作同样处理. 于是 (1) 和 (2) 就简化为理想流体的线性扰动运动方程, 以后我们把这两式中的  $\nu$  取为零. 连续性方程为

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (5)$$

令

$$p = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (r^2 - b^2) + p' \quad (6)$$

左端第一项为定常自旋压力场,  $p'$  为扰动压力. 扰动流函数  $\psi$  满足

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}, \quad v_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

联立 (1) 和 (2) 来消去  $p'$ , 我们可得

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \psi) = 0$$

因为在未扰动时, 扰动涡量  $-\Delta \psi = 0$ , 因此扰动后有

$$\zeta = -\Delta \psi = 0$$

由此证得在所建立的旋转坐标系中观察到的扰动运动为无旋流动. 记速度势为  $\phi$ , 它是  $\psi$  的共轭调和函数.

设扰动后液体自由面方程为  $r = b + \eta$ ,  $\eta$  为小量, 在自由面上的运动学条件为

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (r = b) \quad (7)$$

在自由面上的压力为零, 故  $[\frac{1}{2}\rho\Omega^2(r^2 - b^2) + p']|_{r=b} = 0$ , 略去高阶项可得

$$p'|_{r=b} = -\rho\Omega^2 b\eta \quad (8)$$

相对于旋转坐标系具有不变涡量的二维不定常流动存在 Bernoulli 积分<sup>[3]</sup>

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} + \Pi - \frac{\Omega^2 r^2}{2} + (\zeta + 2\Omega)\psi = c \quad (9)$$

其中  $\Pi$  为体力势, 此处  $\Pi = \ddot{X}r \cos(\theta + \Omega t)$ . (9) 式亦可从 (1) 和 (2) 直接积分得出. 利用 (8) 后, 再略去高阶项, 从 (9) 可得

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \Omega^2 b\eta + 2\Omega\psi = \delta\omega^2 b \cos\omega t \cos(\theta + \Omega t) \quad (10)$$

上式也是在自由面上的边界条件. 在转子内壁上

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0 \quad (r = a) \quad (11)$$

根据 (3) 再引进几个无量纲量

$$\phi^* = \frac{\phi}{\delta^2\omega}, \quad \psi^* = \frac{\psi}{\delta^2\omega}, \quad b^* = \frac{b}{\delta}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{\delta}$$

则所需的无量纲关系式有 (“\*” 已略去)

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{和} \quad \Delta\psi = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0 \quad (r = a) \quad (13)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial\eta}{\partial t} \quad (r = b) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \Omega^2 b\eta + 2\Omega\psi &= b \cos t \cos(\theta + \Omega t) \\ &= \frac{b}{4} [e^{i(t+\theta+\Omega t)} + e^{-i(t+\theta+\Omega t)} + e^{i(\Omega t+\theta-t)} + e^{-i(\Omega t+\theta-t)}] \\ &\quad (r = b) \end{aligned} \quad (15)$$

### 3. 求解

由于 (12)—(15) 都是线性关系, 故可利用迭加原理来求解, 即对应于 (15) 右端方括号中的每一项分别求解以后, 再把四个结果相加. 例如对于第一项, 可设

$$\phi_1 = \left(c_1 r + \frac{D_1}{r}\right) e^{i(t+\theta+\Omega t)}$$

由 (13) 得

$$\phi_1 = c_1 \left(r + \frac{a^2}{r}\right) e^{i(t+\theta+\Omega t)}$$

而

$$\psi_1 = \frac{c_1}{i} \left( r - \frac{a^2}{r} \right) e^{i(t+\theta+\Omega t)}$$

再设

$$\eta_1 = \eta_{01} e^{i(t+\theta+\Omega t)}$$

由 (14) 得

$$\eta_{01} = \frac{c_1(b^2 - a^2)}{ib^2(\Omega + 1)}$$

由 (15) 得

$$c_1 = \frac{-ib^2(1 + \Omega)}{4[(2 + \Omega)\Omega(a^2 - b^2) + (1 + \Omega)^2(a^2 + b^2)]}$$

对其他三项也同样处理, 可得合成波高为

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{\delta} = & \frac{1}{2 \left[ \frac{\Omega(\Omega + 2)}{(1 + \Omega)^2} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right]} \left( \frac{1}{1 + \Omega} \right)^2 \cos(t + \theta + \Omega t) \\ & + \frac{1}{2 \left[ \frac{\Omega(\Omega - 2)}{(1 - \Omega)^2} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right]} \left( \frac{1}{1 - \Omega} \right)^2 \cos(t - \theta - \Omega t) \end{aligned} \quad (16)$$

作用在转子上的扰动力由 (9) 来求得,  $x$  和  $y$  方向的合力为

$$F_x = \int_0^{2\pi} ap \Big|_{r=a} \cos(\theta + \Omega t) d\theta, \quad F_y = \int_0^{2\pi} ap \Big|_{r=a} \sin(\theta + \Omega t) d\theta$$

合力系数为

$$\left. \begin{aligned} f_x = \frac{F_x}{a^2} &= \pi[1 - G(\Omega) - G(-\Omega)] \cos t \\ f_y = \frac{F_y}{a^2} &= \pi[G(\Omega) - G(-\Omega)] \sin t \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

而

$$G(\Omega) = \frac{b^2(1 + \Omega)^2}{\Omega(\Omega + 2)(a^2 - b^2) + (1 + \Omega)^2(a^2 + b^2)}$$

#### 4. 结果

从 (17) 可知转子所受合力的变化情况, 即

(1) 对于没有充液的干转子显然有  $f_x = f_y = 0$ .

(2) 当充满液体 ( $b = 0$ ) 时, 不存在自由面, 故  $f_y = 0$ , 而水平分力就是由转子中液体的惯性力引起的.

(3) 在 (17) 中  $G(-\Omega)$  的分母可能为零, 而使  $f_x$  和  $f_y$  都为无穷大. 这时的激励频率称为临界频率  $\omega_c$

$$\omega_c = \frac{1}{\Omega_c} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{\frac{1 - b^2}{2}}}$$

这里的  $b$  为充液比, 即液体内径与腔室内径之比.  $\omega_c$  随  $b$  的变化见图 2, 对于某一  $b$  存在两个  $\omega_c$ .

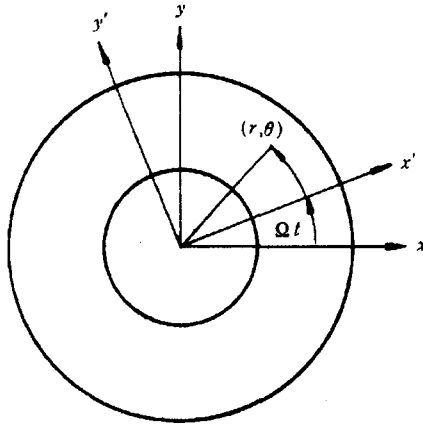


图 1 分析模型

Fig.1 Analytic model

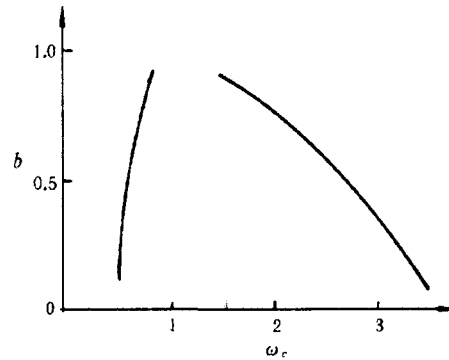


图 2  $\omega_c$ - $b$  的关系

Fig.2  $\omega_c$  vs.  $b$

### 参 考 文 献

- [1] Kollmann FG. Experimentelle und theoretische untersuchungen über die kritischen drehzahlen flüssigefüllter hohlkörper. *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, Ausgabe B, 1962, 28:115-123 und 147-153
- [2] Wolf JA. Whirl dynamics of a rotor partially filled with liquid. *Trans ASME J Appl Mech*, 1968, 35:678-682
- [3] 易家训. 流体力学. 章克本等译, 高等教育出版社, 北京, 1982:54-55

## EXACT SOLUTIONS FOR A PARTIALLY LIQUID-FILLED ROTOR TO BE EXCITED Laterally

Tao Mingde      Zhang Wen

(Department of Applied Mechanics, Fudan University, Shanghai 200433, China)

**Abstract** In this paper, the turbulent forces imposing on a rotor partilly filled with a liquid are discussed when the rotor is subjected to lateral excitation. First, we verify that the turbulent flow is irrotational in the rotating coordinate system fixed with the rotor and then the whole flow is resolved into the stable flow with constant vorticity and the irrotational turbulent flow in analysis. The explicit expressions of free surface and resultant forces imposing on the rotor are obtained. It is known that there are two critical frequencies for a given fill ratio.

**Key words** rotor, lateral excitation, critical frequency, fill ratio