

# 云纹干涉条纹倍增方法研究<sup>1)</sup>

戴福隆 卿新林

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

**摘要** 本文将云纹干涉法与载波法、倍增技术相结合, 提出一种位移场和应变场云纹干涉条纹倍增方法, 该方法使得云纹干涉法测量灵敏度提高四倍以上。文中对该方法给出了严格的理论推导和实验验证。

**关键词** 云纹干涉法, 载波, 倍增技术, 光栅频率, 错位, 实验力学

## 一、引言

细观力学的发展迫切要求实验力学提供在细观尺度上进行高灵敏度、全场和定量分析的有效实验手段, 以揭示不同材料细微结构的变形、损伤、断裂机理和发展演变的规律。云纹干涉法由于具有灵敏度高、条纹反差好、条纹分辨率高、量程大、条纹位置与试件重合、可以实时观测等一系列显著优点, 在其问世的短短十来年内, 无论在理论及方法研究方面, 抑或是在科学研究与工程实际应用方面都取得了迅速进展。然而, 随着细观力学研究的不断深入, 研究领域逐渐转向微观, 对光测力学方法测量灵敏度的要求越来越高。云纹干涉法目前已达到的灵敏度相当于 24001/mm 的栅线频率, 这个灵敏度比光波波长还短, 约为  $0.417 \mu\text{m}$ ; 若采用可见光范围内波长最短的紫光, 当入射角接近  $90^\circ$  时, 所形成的参考栅线频率约为 40001/mm, 灵敏度约为  $0.25 \mu\text{m}$ , 但此时光路调节困难, 会给实验带来许多不便。这种灵敏度限制了这些方法在细观力学领域中的广泛应用。用人工插值的方法固然可使灵敏度有一定提高, 但对应力应变变化梯度较大的地方, 人工插值势必带来很大误差。本文将云纹干涉法与载波法、倍增技术巧妙结合, 提出一种位移场云纹干涉条纹倍增方法, 再利用错位技术, 使得应变场条纹图同样得以倍增, 这种方法使得云纹干涉法的测量灵敏度有较大提高。

## 二、原理

### 1. 位移场条纹倍增

图 1 是双光束对称入射云纹干涉法光路图, 依据波前干涉理论, 当相干平面波  $O', R'$  以  $\theta = \arcsin(\lambda f)$  对称入射试件表面光栅时, 其  $\pm 1$  级衍射波  $O, R$  均沿试件栅线法线方向进行, 设  $\varphi_0(x, y), \varphi_R(x, y)$  表示由于试件栅变形引起的  $O, R$  的位相因子,  $O, R$  的

1) 本文研究内容获得国家自然科学基金委员会重点项目和清华大学结构工程与振动开放实验室资助。  
本文于 1992 年 6 月 9 日收到, 1992 年 9 月 3 日收到修改稿。

复振幅可以写为(本文在相干光分析中不计复振幅幅值的影响)

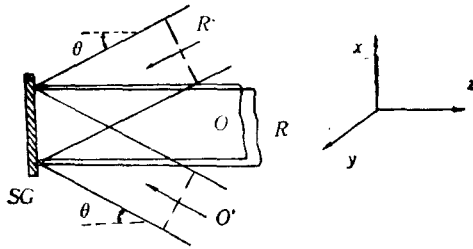


图1 云纹干涉法光路  
Fig. 1 Schematic diagram of a moiré interferometry system

$$\begin{aligned} O &= \exp[j\varphi_o(x, y)] \\ R &= \exp[j\varphi_R(x, y)] \end{aligned} \quad (1)$$

两束光形成干涉条纹,其光强分布为

$$\begin{aligned} I &= (O + R)(O + R)^* \\ &= 4\cos^2 \left[ \frac{1}{2} \varphi_{ab}(x, y) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\varphi_{ab} = \varphi_o(x, y) - \varphi_R(x, y)$ .

设  $u$ 、 $w$  分别代表物体在  $x$  方向和  $z$  方向的位移,则

$$\varphi_o(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} [u \sin \theta + w(1 + \cos \theta)]$$

$$\varphi_R(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} [-u \sin \theta + w(1 + \cos \theta)]$$

$$\varphi_{ab} = \frac{4\pi}{\lambda} u \sin \theta \quad (3)$$

(3)式代入(2)式,得

$$I = 4\cos^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} u \sin \theta \right] \quad (4)$$

令

$$\frac{2\pi}{\lambda} u \sin \theta = N\pi$$

得

$$u(x, y) = \frac{N}{2f} \quad (5)$$

其中  $N$  为条纹级次

现给  $R'$  加上一载波  $\exp[-j2\pi(f_1x + f_2y)]$ , 此时  $R$  变为  $R''$

$$R'' = \exp[j\varphi_R(x, y) - j2\pi(f_1x + f_2y)] \quad (6)$$

这时两束衍射光波的合成光强  $I'$  为

$$\begin{aligned} I' &= (O + R'')(O + R'')^* \\ &= 4\cos^2 \left[ \frac{1}{2} \varphi_{ab}(x, y) + \pi(f_1x + f_2y) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

(3)式代入(7)式得

$$I' = 4\cos^2 \left[ \pi \left( \frac{2u \sin \theta}{\lambda} + f_1x + f_2y \right) \right] \quad (8)$$

令

$$\frac{2u \sin \theta}{\lambda} = f_1x + f_2y \quad (9)$$

由(5)得

$$f_1 = \frac{\partial N}{\partial x} \quad f_2 = \frac{\partial N}{\partial y}$$

(9)式代入(8)式,得

$$I' = 4\cos^2[\pi(f_x x + f_y y)] \quad (10)$$

其中

$$f_x = f_1 + f'_1, f_y = f_2 + f'_2$$

将上述(10)式所代表的光强分布记录在全息干版上,经处理后的全息干版可以看作一个变形的“试件栅”,利用“试件栅”的衍射效应及富里叶滤波,可使条纹倍增。图 2 为滤波装置简图。

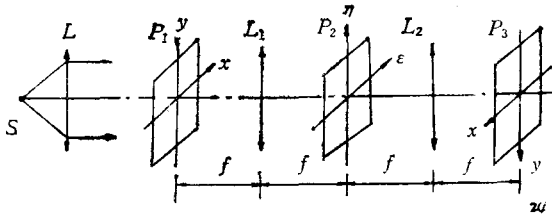


图 2 富里叶滤波光路  
Fig. 2 Schematic diagram of fourier filtering system

S source P<sub>1</sub> object plane P<sub>2</sub> spectrum plane  
P<sub>3</sub> image plane L collimating lens L<sub>1</sub> transforming lens L<sub>2</sub> image lens

准直光通过置于物平面 P<sub>1</sub> 上的“试件栅”,用透射函数 f<sub>0</sub>(x, y) 表示出射光的复振幅,将 f<sub>0</sub>(x, y) 用富里叶级数展开

$$f_0(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp[j2n\pi(f_x x + f_y y)] \quad (11)$$

经变换透镜 L<sub>1</sub> 后,在频谱面 P<sub>2</sub> 上光的复振幅 F<sub>0</sub>(ξ, η) 可用 f<sub>0</sub>(x, y) 的富里叶变换表示

$$F_0(\xi, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_0(x, y) \exp[-j2\pi(\xi x + \eta y)] dx dy \quad (12)$$

将(11)式代入(12)式,得

$$F_0(\xi, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\xi - nf_x, \eta - nf_y) \quad (12)$$

当 ξ ≠ nf<sub>x</sub> 或 η ≠ nf<sub>y</sub> 时,有

$$F_0(\xi, \eta) = 0$$

这表明在频谱面上,随不同的频率 (nf<sub>x</sub>, nf<sub>y</sub>) 而形成离散的衍射斑点, n 为衍射级次。

若在频谱面上的滤波孔只允许 ±n 级衍射通过,平行光通过“试件栅”后,与 ±n 级衍射相应光束的复振幅 E<sub>n</sub>、E<sub>-n</sub> 表示为

$$\left. \begin{aligned} E_n &= C_n \exp[j2n\pi(f_x x + f_y y)] \\ E_{-n} &= C_n \exp[-j2n\pi(f_x x + f_y y)] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

在像平面上,两束光的合成光强为

$$I_{\pm n} = 2C_n^2 [1 + \cos 2\pi(2nf_x x + 2nf_y y)] \quad (14)$$

把上式表示的光强分布记录在全息干版上,经处理后,干版可以看作频率为物平面上“试件栅”频率 2n 倍的另一“试件栅”。

若滤波时只允许 ±1 级衍射即 (f<sub>x</sub>, f<sub>y</sub>) 和 (-f<sub>x</sub>, -f<sub>y</sub>) 通过,则新得到的“试件栅”频率增为原来的二倍;若滤波时只允许 ±2 级衍射即 (2f<sub>x</sub>, 2f<sub>y</sub>) 和 (-2f<sub>x</sub>, -2f<sub>y</sub>) 通过,则“试件栅”的频率增为原来的四倍,以此类推。

将一个频率为 (nf<sub>1</sub>, nf<sub>2</sub>) 的参考栅放在滤波光路中的像平面上,即可得到倍增为 2n

倍的云纹干涉条纹。

设参考栅的屏函数为

$$t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C'_n \exp[j2n'\pi(nf'_1x + nf'_2y)]$$

$\pm n$  级衍射光通过参考栅后, 出射光的复振幅表示为:

$$\begin{aligned} E_0 &= E_{\pm n} t(x, y) \\ &= K \exp[j2n\pi(f_1x + f_2y)] \\ &\quad + K \exp[-j2n\pi(f_1x + f_2y)] + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

式中的前二项代表只携带有试件变形信息、没有载波影响、几乎沿参考栅法线方向传播的光束, 第三项及以后各项都含有高频载波成份, 其传播方向偏离参考栅法线方向。前二项所代表的光波相互干涉, 光强分布为

$$I_0 = 2K^2[1 + \cos 2n\pi(2f_1x + 2f_2y)] \quad (16)$$

当  $2n\pi(2f_1x + 2f_2y) = 2N'\pi$  ( $N'$  为整数) 时,  $I_0$  取最大值, 即有亮纹出现。

根据(9)式有

$$\frac{2u \sin \theta}{\lambda} = f_1x + f_2y = \frac{N'}{2n}$$

则

$$u(x, y) = \frac{N'}{4nf} \quad (17)$$

比较(17)式与(5)式, 得知通过上述处理后, 条纹倍增为  $2n$  倍, 相应的灵敏度由  $2f$  提高到  $4nf$ , 当取  $n = 2$  时, 灵敏度提高四倍。

若把(14)式所表示的光强分布记录在全息干版上, 则经处理后的干版相当于一个频率为  $(2nf_x, 2nf_y)$  的试件栅, 当把它与一个频率为  $(2nf_1, 2nf_2)$  的参考栅对准重叠时, 根据几何云纹中减型云纹原理, 同样可得倍增为  $2n$  倍后的云纹条纹。

## 2. 应变场条纹倍增

由(13)式可知, 在富里叶滤波光路中, 当频谱面上的滤波孔只允许  $\pm n$  级衍射通过时, 则在像平面上的光强分布为

$$I_{\pm n1} = 2C_n^2[1 + \cos 2\pi(2nf_x x + 2nf_y y)] \quad (18)$$

根据(9)、(10)两式, (14)式可以改写为

$$\begin{aligned} I_{\pm n1} &= 2C_n^2[1 + \cos 4n\pi(f_x x + f_y y)] \\ &= 2C_n^2 \left[ 1 + \cos 4n\pi \left( \frac{2u \sin \theta}{\lambda} + f_1x + f_2y \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

将上述光强分布记录在全息干版上, 然后再将干版沿  $x$  方向错位  $\Delta x$ , 在富里叶滤波光路中物像比为 1:1, 对错位后的干版进行第二次曝光, 其光强分布为

$$I_{\pm n2} = 2C_n^2 \left[ 1 + \cos 4n\pi \left( \frac{2u(x + \Delta x, y) \sin \theta}{\lambda} + f_1 \cdot (x + \Delta x) + f_2y \right) \right]$$

两次曝光后总光强为

$$\begin{aligned}
 I_{\pm} &= I_{\pm n_1} + I_{\pm n_2} \\
 &= 4C_n^2 \left\{ 1 + \cos 2n\pi \left[ \frac{2u(x + \Delta x, y) \sin \theta}{\lambda} + \frac{2u(x, y) \sin \theta}{\lambda} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + f'_1(x + \Delta x) + f'_1 x + 2f'_2 y \right] \right. \\
 &\quad \left. \cdot \cos 2n\pi \left[ \frac{2u(x + \Delta x, y) \sin \theta}{\lambda} - \frac{2u(x, y) \sin \theta}{\lambda} + f'_1 \Delta x \right] \right\} \quad (19)
 \end{aligned}$$

式中  $(2f'_1 x + 2f'_2 y)$  为快变化的位相函数, 相当于高频载波成份, 将具有上述光强分布的底版置于高通滤波系统中, 可以获得满足下列条件的暗条纹位移场

$$\cos 2n\pi \left[ \frac{2u(x + \Delta x, y) \sin \theta}{\lambda} - \frac{2u(x, y) \sin \theta}{\lambda} + f'_1 \Delta x \right] = 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 \text{当 } 2n\pi \left[ \frac{2u(x + \Delta x, y) \sin \theta}{\lambda} - \frac{2u(x, y) \sin \theta}{\lambda} + f'_1 \Delta x \right] &= \frac{2n' + 1}{2} \pi \\
 n' &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (21)
 \end{aligned}$$

时, 可以获得暗条纹. 据(21)式可知

$$\begin{aligned}
 u(x + \Delta x, y) - u(x, y) &= \frac{2n' + 1}{4n} \cdot \frac{\lambda}{2 \sin \theta} - f'_1 \Delta x \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \\
 u(x + \Delta x, y) - u(x, y) &= \frac{2n' + 1}{8nf} - \frac{f'}{2f} \Delta x \quad (22)
 \end{aligned}$$

则

$$\varepsilon_x = \frac{2n' + 1}{8n} P \cdot \frac{1}{\Delta x} - \frac{f'}{2f} \quad (23)$$

其中  $P = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{1}{f}$ ,  $P$  为栅线节距,  $f$  为栅频.

由(23)可以看出, 相邻两根条纹之间的应变差值

$$\Delta \varepsilon_x = \frac{2}{8n} P \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{P}{4n} \cdot \frac{1}{\Delta x} \quad (23)'$$

比较(23)'与文献[1]中(8.40)式, 可以看出此时应变场条纹的灵敏度提高  $2n$  倍, 即应变场条纹倍增为  $2n$  倍.

从(17)式与(23)式可以看出:  $n$  越大, 对提高灵敏度越有利. 但一般说来, 随着衍射级次的增大, 衍射斑点的光强减弱得很快, 并且受透镜孔径有限尺寸影响,  $n$  不可能象理论分析那样可以取得无限大.

在(11)式中, 我们把  $f_0(x, y)$  看作一个严格的周期函数, 这只是为了使理论分析简单化. 事实上,  $f_0(x, y)$  并非严格周期函数, 从(9)式可以看出:  $f_1, f_2$  都随坐标变化, 这就导致  $(f_x, f_y)$  随坐标变化. 但是,  $f'_1, f'_2$  是一个恒值, 只要我们保证  $f'_1, f'_2 \gg f_1, f_2$ ,  $f_0(x, y)$  就可以看作一个准周期函数, 在频谱面上得到衍射斑点并不是象(12)'所表示的那样是一个严格的点, 而是一个有一定宽度的衍射斑. 当  $f'_1, f'_2$  足够大, 以致在频谱面上能把各衍射斑分开, 使得滤波成为可能, 上述推导依然成立.

同样的方法可以使  $\nu$  场干涉条纹倍增。在上述倍增  $\epsilon_x$  场条纹时,若错位沿  $y$  方向进行,则得到  $\partial u/\partial y$  场倍增条纹图,同样可以得到  $\epsilon_y$  与  $\partial \nu/\partial x$  场倍增后的条纹图。

### 三、实 验

#### 1. 位移场条纹倍增实验验证

本文以测量三点弯曲高梁  $u$  场来作为这一方法的验证。试件是 Ce-TZP 结构陶瓷加工而成其尺寸如图 3 所示,试件表面复制为  $1200 \text{ l/mm}$  的正交位相型反射光栅。

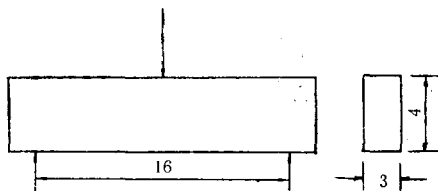


图 3 三点弯曲梁(单位: mm)

Fig. 3 Three points bending beam

实验步骤如下:  
(1) 按图 1 布置光路,调节  $R'$  与  $O'$  光,使其正、负一级衍射沿试件表面法线方向行进。

(2) 未加载前,通过一特殊装置给  $R'$  以加载波,记录下此时  $R'$  与  $O'$  的  $\pm 1$  级衍射在试件表面处的相干光强分布,处理后的干版可以看作一参考栅。

(3) 卸去(2)中所加载波,给试件加载,调节加载装置,以消除刚体转动影响,记录下此时  $u$  场条纹图。  
(4) 给  $R'$  光施加与(2)中相同载波,记录下此时  $R'$  与  $O'$  的  $\pm 1$  级衍射在试件表面处的相干光强分布,经显、定影处理后,底版可以看作一变形的试件栅。在这里施加载波时用的是(2)中所用的特殊的施加载波装置,以保证两次所加载波相同。

(5) 将(2)中所得参考栅放入图 2 所示富里叶滤波光路的物平面上,在其频谱面上分别让  $\pm 1$  级衍射、 $\pm 2$  级衍射通过滤波孔,在像平面上就得到频率增为二倍和四倍的参考栅。

(6) 将(4)所得变形“试件栅”放入富里叶滤波光路的物平面上,在频谱面上让  $\pm 1$  级衍射、 $\pm 2$  级衍射分别通过滤波孔,在像平面上得到频率增为二倍和四倍的“试件栅”。

(7) 将(5)、(6)所得到的二倍频、四倍频栅版分别对准重叠在一起,就得到条纹密度增为二倍和四倍的云纹干涉条纹,如图版 I 照片 1 所示。

或者进行如下过程同样可得倍增后的云纹干涉条纹:

(1) 将上述(4)中得到的变形“试件栅”放在富里叶滤波光路中的物平面上,在频谱面上让  $\pm 1$  级衍射通过滤波孔,分别入射置在像平面上的频率为  $f'$  的参考栅,该参考栅按上述(2)中所述预制,然后在参考栅法线方向对沿法线方向传播的两束光在参考栅处的干涉条纹成像,即得密度增为二倍的云纹干涉条纹。

(2) 类似地,若在频谱面上让  $\pm 2$  级衍射通过滤波孔,在成像面上放置频率为  $2f'$  的参考栅,则可得到条纹密度增为四倍的云纹干涉条纹。

#### 2. 应变场干涉云纹倍增方法实验验证

这里以环氧树脂对顶受压圆盘为例,研究  $\epsilon_x$  干涉条纹图,以对应变场干涉云纹倍增方法进行实验验证。环氧树脂圆盘直径为  $40 \text{ mm}$ ,厚度为  $5 \text{ mm}$ ,圆盘的一边复制有  $1200 \text{ l/mm}$  的正交位相型反射光栅。

实验过程如下:

(1) 按图1布置光路, 调节  $R'$  与  $O'$ , 使其正、负一级衍射沿试件表面法线方向传播。试件在载荷作用下发生形变, 两  $\pm 1$  级衍射光在试件表面相互干涉, 形成干涉云纹。此时在光路中给  $R'$  加一载波, 即给  $R'$  光附加一线性函数  $f(x, y)$  的虚位移, 照相底版记录下  $\pm 1$  级衍射光在试件表面处的相干光强分布, 然后将底版沿  $x$  方向错位  $\Delta x$ , 对底版进行第二次曝光, 将两次曝光后的底版显、定影处理后置于高通滤波系统中, 便可获得  $e_x$  的全场条纹图。

(2) 按(1)中相同的方法对底版进行第一次曝光, 然后对底版进行显、定影处理, 处理后的底版置于富里叶滤波光路中的物平面上, 在谱平面上让  $\pm 1$  级衍射通过滤波孔, 对置于像平面上的照相底版进行曝光, 然后将照相底版沿  $x$  方向错位  $\Delta x$ , 对其进行第二次曝光, 将双曝光后的底版显、定影处理后置于高通滤波光路中, 便可获得条纹倍增为二倍的  $e_x$  全场条纹图。

类似地, 利用  $\pm n$  级衍射, 便可得到条纹倍增为  $2n$  倍的  $e_x$  全场条纹图。

图版 I 照片 2(a)、(b) 分别是倍增前和倍增后的  $e_x$  全场条纹图。

#### 四、结 语

本文把云纹干涉法与载波法、倍增技术、错位技术巧妙地结合起来, 提出的一种云纹干涉条纹倍增方法能有效地提高云纹干涉法的测量灵敏度。使得云纹干涉法的测量灵敏度达到  $0.1\mu\text{m}$  或更高。这一方法将有助于云纹干涉法在细观力学领域中的广泛应用。从上面的理论分析可以看出: 通过反复倍增, 测量灵敏度可以达到更高量级。采用实验中所介绍的加载波和预制参考栅方法, 可以自动消除由于初始栅不规则而造成的初始条纹的影响。很显然, 这一方法在细观力学研究领域中具有广阔的应用前景。

#### 参 考 文 献

- [1] 戴福隆等. 现代光测力学, 北京, 科学出版社, 1990
- [2] Goodman J W. 富里叶光学导论, 北京: 科学出版社, 1979, 中译本
- [3] Gaskill J D. 线性系统·富里叶变换·光学. 北京: 人民教育出版社, 1981, 中译本
- [4] Chiang F P. Techniques of optical spatial filtering applied to the processing of moiré-fringe patterns. *Exp Mech*, 1969, 6(11): 523
- [5] Post D. Developments in moiré interferometry. *Opt. Eng.*, 1982, 21(3): 458
- [6] Dai F L, Mekelvie J and Post D. An interpretation of moiré interferometry from wavefront interference theory. *Proc SPIE*, 1988: 954
- [7] Post D. Sharpening and multiplication of moiré fringes. *Exp Mech*, 1967, 7(4): 154

## MULTIPLICATION OF MOIRE INTERFEROMETRY FRINGES

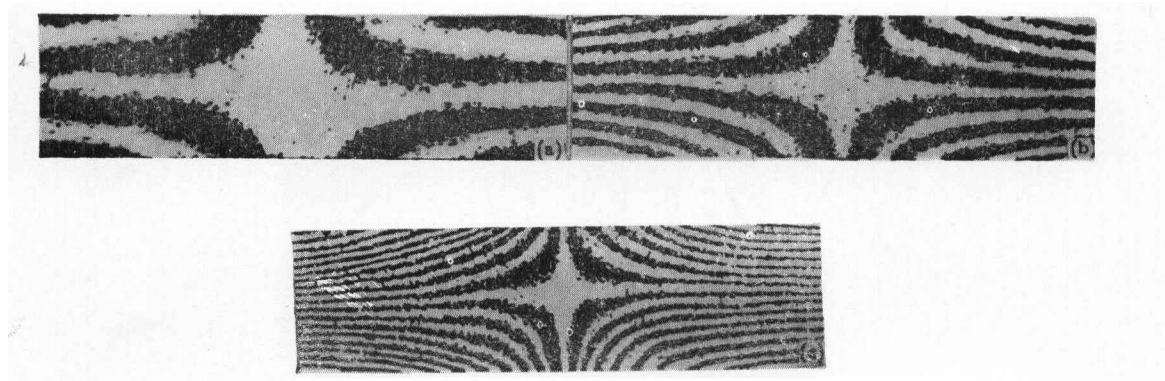
Dai Fulong, Qing Xinlin

*(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)*

**Abstract** A ingenious combination of moire interferometry, carrier method and multiplication techniques is first proposed for multiplying moire interferometry fringes, including displacement fields and strain fields. The measuring sensitivity of moire interferometry method may be raised by more than 4 times, by this multiplication method. Rigorous theoretical analysis is given. Experimental demonstration is conducted successfully in this paper.

**Key words** moire interferometry, carrier, multiplication, grating frequency, shearing

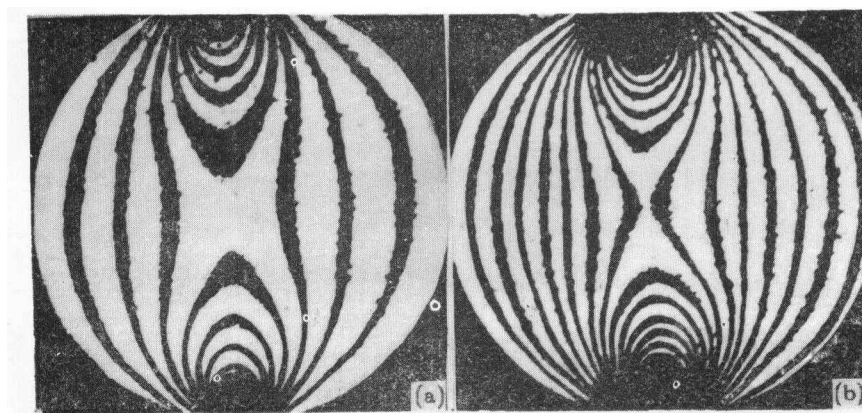




照片1 等 $n$ 线条纹图

Photo 1 Fringe patterns of  $N_x$

- (a) the original fringe pattern
- (b) the fringe pattern of multiplying 2 times
- (c) the fringe pattern of multiplying 4 times



照片2  $\epsilon_x$  条纹图

Photo 2 Fringe patterns of  $\epsilon_x$

- (a) the original fringe pattern
- (b) the fringe pattern of multiplying 2 times