

# 液固对流相变问题的焓式有限元法

林建国 赖国璋

(大连理工大学工程力学研究所, 大连 116023)

**提要** 本文基于焓的对流扩散方程, 提出一种求解具有糊状区液固相变对流传热问题的有限元方法, 避免了通常采用温度对流扩散方程进行数值求解所带来的许多困难, 对问题的解决更加自然、简便。算例表明, 本文提出的方法是有效且可行的。

**关键词** 焓, 糊状区, 对流传热, 相变, 有限元

## 1. 引言

液固相变对流传热问题非常广泛地存在于工业生产之中, 如铸造、冶炼、玻璃制品的成型, 土壤、海洋冰层的冻结, 化工产品的结晶析出等。因此, 对此问题进行深入研究具有重要的工程实际意义。

以前乃至今日, 人们在解决液固相变问题时, 往往忽略了热对流的影响<sup>[1,2]</sup>。然而, 在许多实际问题中, 对流的影响是十分显著的, 它能对产品的质量产生重大的影响<sup>[3]</sup>。目前, 国外对液固相变对流传热问题的研究十分活跃<sup>[3-7]</sup>, 相对说来, 国内这方面的工作起步较晚且少<sup>[8,9]</sup>。

在现有的求解方法中, 基本上都是基于温度的对流扩散方程进行的, 它存在着一个缺点就是在相变区内由于潜热释放使热量突然上升, 具体表现在方程中增加了一项潜热的时间导数项, 这给温度场的数值求解带来了许多困难, 一般在每步求解的过程中都要迭代多次, 计算工作量非常大。

本文采用焓的对流扩散方程进行数值求解, 因为焓是对温度的积分量, 方程中不产生附加项, 用于数值求解更自然, 由求得的焓值再确定温度分布, 可以不必迭代求解, 节省了计算时间, 对动量方程中模拟糊状区流动的源项的处理采取了一种有效的方法, 保证了这种数值方法得以顺利进行。本文具体的数值方法为作者发展的二阶时间精度的分裂步有限元法。算例表明, 本文方法是有效且可行的。

## 2. 控制方程

做为算例, 本文计算的平面问题 ( $\xi = 0$ ) 与 [5] 相同, 在此基础上, 又计算了与之对应的轴对称问题 ( $\xi = 1$ ), 如图 1 所示。

由于考虑到糊状区的存在, 故可将整个求解区域做为多孔介质处理。借助表观速度可以写出全域统一形式的控制方程如下:

本文于 1991 年 9 月 3 日收到第一次稿, 于 1992 年 1 月 6 日收到修改稿。

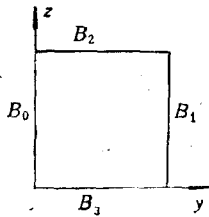
质量守恒方程:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \xi \frac{v}{y} = 0 \quad (1)$$

动量守恒方程:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + S_y + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \xi \left( \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y^2} \right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + S_z + S_b + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\xi}{y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3)$$



边界条件 Boundary Conditions

$B_1$  and  $B_3$ :  $\partial T / \partial n = 0$ ,  
 $v = w = 0$ .

$B_0$ :  $\xi = 0$   $T = -0.5$ ,  $v = w = 0$ .

$\xi = 1$   $\partial T / \partial n = 0$ ,  $\partial w / \partial n = 0$ ,  $v = 0$ .

$B_2$ :  $\xi = 0$   $T = 0.5$ ,  $v = w = 0$ .

$\xi = 1$   $T = -0.5$ ,  $v = w = 0$ .

初始条件 Initial Conditions

$T = 0.5$ ,  $v = w = 0$ .

图1 计算区域及初边值条件

Fig. 1 The Calculation Domain and the Boundary and Initial Conditions

焓与温度的关系为:

$$H = cT + L(1 - f_s) \quad (7)$$

至此,求解方程已经封闭,其初边值条件见图1.

### 3. 数值求解

采用时间离散为二阶精度的分裂步有限元法<sup>[4]</sup>求解上述控制方程,(2)(3)式中的  $S_y$ 、 $S_z$  两项均采用当前步的量,其它处理与[10]同。(6)式也采用二阶显示求解,得到当前步的焓值后,由(7)式显示求出当前步的温度,进而由(5)式确定当前步的固相分数,如此循环,便可以解得时间步进的结果。

本文因为是用有限元进行求解,(6)式的空间二阶导数项是对温度  $T$  进行的,故只需温度的边界条件就可以了。

### 4. 数值结果

为便于比较,本文二维的算例与[5]相同,基本参数的取值见[5]。图2是本文计算的二维结果,温度的九条等值线取值为从 -0.4 增值 0.1 至 0.4,固相线  $T = -0.1$  与液相线  $T = 0.1$  之间为糊状区,这些结果显示由于对流的存在使得液固相线产生变形,尤其是液相线底部的凸出十分显著。通过与文献[5]的比较发现,本文的结果在定性上与[5]一致,从定量上看,本文结果似乎更合理,图3是[5]的结果,从中可以看到在绝热边界

其中  $S_y$ 、 $S_z$  为模拟糊状区的源项,其形式为:

$$S_y = -AV, S_z = -AW, A = Df_s^2 / [(1 - f_s)^2 + q] \quad (4)$$

上式中  $F_s$  为固相分数,它与温度  $T$  之间的关系采用一种较简单的线性表达式<sup>[5]</sup>:

$$F_s = \begin{cases} 0 & T \geq T_0 \\ (T_0 - T) / (T_0 - T_m) & T_0 > T \geq T_m \\ 1 & T < T_m \end{cases} \quad (5)$$

(3)式中的  $S_b$  代表热浮力项。

能量守恒方程:

本文采用焓的对流扩散方程,其形式为:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{K}{\rho} \frac{1}{y^\xi} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( y^\xi \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( y^\xi \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (6)$$

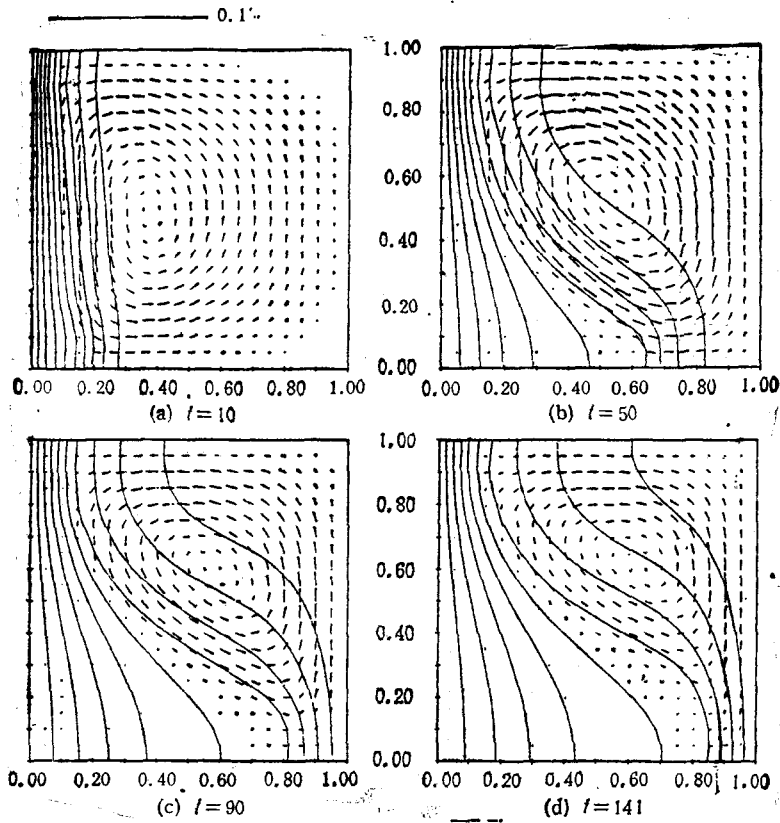


图 2 二维速度场及等温线分布。

Fig. 2 2-D Velocity Fields and Isothermals  
 $D = 1600, q = 0.001, K = 0.001$

上的温度法向导数并不为零,仅从这一点来说,[5]的结果在定量上是不够准确的。

图 4 是本文计算的轴对称问题结果,从中可以看到,刚开始由于外边界的低温与初始的高温形成对流使得外边界一侧的流动向下,中心处的流动向上,随着时间的增加,冷壁下部出现低温区而首先凝固,等温线产生变形,随后,凝固区逐渐增大,液相线底部的凸出也越加突出,当整个底部全部凝固后,液相流动区域便逐渐向中心上方收缩,直至整个区域全部凝固,所有点的温度均与外边界一致。由于轴对称问题还没有可供比较的结果,故对本文的结果还不能做出定量的结论,但从定性上来说,结果是合理的。

5. 结论

本文基于焓的对流扩散方程,提出了一种求解具有糊状区液固相变对流传热问题的数值方法,具有简便易行,节省计算时间的优点,对复杂形状的计算区域具有很强的适应

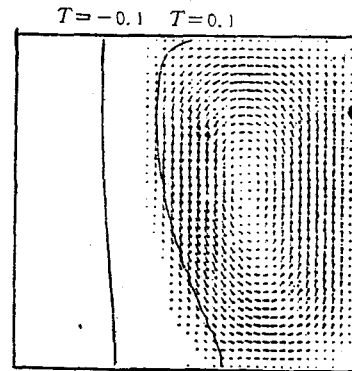
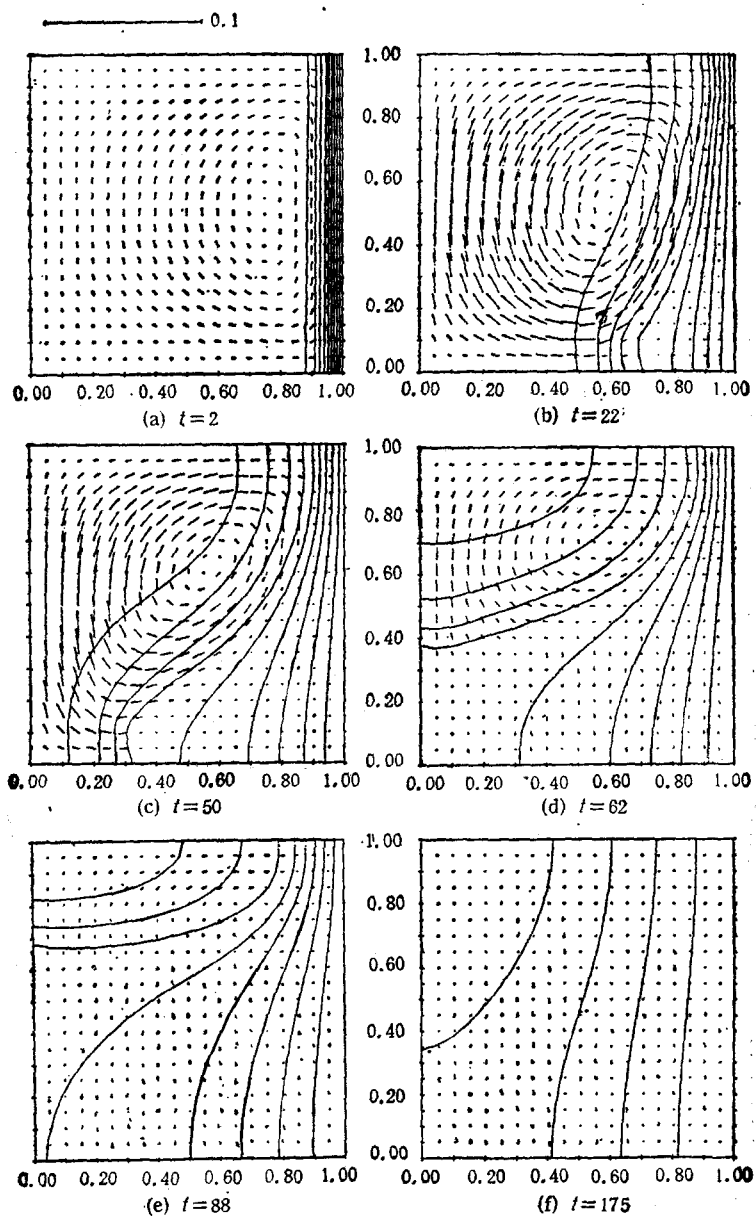


图 3 文 [5] 的结果  
 Fig. 3 The Results from [5]

图 4  $\xi = 1$  轴对称速度场及等温线分布Fig. 4 Axisymmetrical Velocity Fields and Isotherms at  $\xi = 1$ 

$D = 160, q = 0.001, k = 0.001$

能力,算例表明,本文结果比已有的结果[5]更为合理。

## 参 考 文 献

- [1] Tamma K. K. and Namburu R. R. *Int J for Numer Methods in Eng*, 1990, 30: 803—820
- [2] Droux J. J. *Computer Methods in Appl. Mech and Eng.*, 1991, 85: 57—74
- [3] Dantzig J. A. *Int J for Numer Methods in Eng*, 1989, 28: 1769—1785
- [4] Bennon W. D. and Incropera F. P. *Int J. Heat Mass Transfer*, 1987, 30: 2171
- [5] Voller A. R. and Prakash C. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1987, 30: 1709
- [6] Voller, V. R. Brent A. D. and Prakash T. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1989: 32: 1719
- [7] Bennon W. D. and Incropera F. P. *Numer Heat Transfer*, 1988, 13: 277
- [8] 徐达鸣, 哈尔滨工业大学博士论文, 1989年4月
- [9] 赵勇, 清华大学博士论文, 1991年1月
- [10] 林建国、赖国璋, 二阶时间分裂法求解 N-S 方程及对流传热问题. *水动力学研究与进展*, 1992, 7(3)

## FINITE ELEMENT METHOD BASED ON ENTHALPY FORMULATION OF CONVECTION-DIFFUSION FOR LIQUID-SOLID PHASE CHANGE PROBLEMS

Lin Jianguo    Lai Guozhang

(*Institute of Engineering Mechanics Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*)

**Abstract** A finite element method based on enthalpy formulation of convection-diffusion is developed for numerical solution of liquid-solid phase change problems. It avoids many difficulties which will appear when temperature formulation be used. The basic feature of the proposed method lies in its naturality and the simplicity. The test problems of freezing in a thermal cavity (planar and axisymmetrical problems) under natural convection are used to demonstrate the reliability and the efficiency of this method.

**Key words** enthalpy, mushy region, convect heat transfer, FEM, phase change