

纵向不均匀磁场中等离子体的平衡¹⁾

李国炳 王吉峰

(大连理工大学应用数学系, 大连 116023)

摘要 讨论了由于纵向磁场不均匀引起的磁约束等离子体的变形。在表面电流分布与体电流分布情形下分别求得磁面变形与各参数之间的关系, 给出了等离子体平衡对于不均匀磁场参数相应的限制。

关键词 磁约束, 等离子体, 平衡位形, 纵向磁场, 磁面变形

引 言

磁约束聚变等离子体位形的研究表明, 开端系统和圆环形系统都各具有自己的优缺点。人们一直希望能把两者结合起来, 以达到扬长避短的目的。目前托卡马克位形约束性能较好, 但它纯圆环形的几何形状, 在实验与工程上确有许多不方便之处。能否在其间加入直线段以满足各方面的要求? 能否在其中某一段上降低纵向场的要求腾出空间, 用作别的安排? 显然, 要回答此问题, 就需要考虑非轴对称效应以及不均匀的纵向场对约束的影响。对于一个真实的位形, 人们总是希望在等离子体外面, 有一定宽度的真空区域, 以达到热绝缘的目的。因而, 我们应当考虑等离子体与真空交界处具有自由界面的问题; 在考虑等离子体平衡的同时要确定出这个自由面的形状来。为此, 我们要讨论的是一个带有直线段的、非轴对称的、纵向场沿着环方向不均匀的等离子体环的自由边界平衡问题。这是个颇为复杂的问题。为了简化问题, 我们首先假设等离子体环的曲率不大, 以曲率为小量进行展开逐级处理。其次, 我们把等离子体内部与外部真空区域的纵向磁场沿着环方向的分布, 看成是沿着环向平均后的纵向磁场与一个“扰动”场的叠加。这个扰动场是周期性的, 其大小比起平均场来是小量。我们在等离子体具有锐边界的表面电流情形, 或均匀体电流分布情形, 及电流分布呈抛物线形情形下分别讨论了平衡时等离子体内部与外部真空区域中的磁场分布与磁面形状。特别求出了等离子体的表面形状与磁场不均匀参数之间的关系。结果表明, 纵向磁场的不均匀性会引起等离子体磁面的变形, 变形的大小与外磁场的布置有关。在一定的外磁场形态下, 会产生与等离子体参数的“共振”, 平衡破坏。除去共振区域, 变形随着纵场不均匀性的波长而增大, 这一点也对平衡给出一定的限制。

1 坐标系, 方程与边界条件

我们考虑等离子体环的磁轴为平面曲线的情形。取沿磁轴的局部极坐标 ρ, θ, s

¹⁾ 国家自然科学基金资助课题

1994-01-20 收到。

组成的右手坐标系

$$dr = d\rho e_\rho + \rho d\theta e_\theta + (1 - k\rho \cos \theta) dS e_S \quad (1)$$

拉梅系数为 $H_\rho = 1$, $H_\theta = \rho$, $H_S = 1 - k\rho \cos \theta$. 其中 $k = k(s)$ 为磁轴曲率, S 为沿磁轴的弧长. 在锐边界表面电流情形, 等离子体内部与外部真空区域中, 磁场都有标势 Φ . 分别记为 Φ_i 和 $\Phi_e (\mathbf{B} = \nabla \Phi)$ 满足方程 $\nabla^2 \Phi_i = 0$, $\nabla^2 \Phi_e = 0$. 在如上的坐标系中, 方程为

$$\frac{1}{\rho(1 - k\rho \cos \theta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho(1 - k\rho \cos \theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1 - k\rho \cos \theta}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\rho}{1 - k\rho \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial S} \right) \right\} = 0 \quad (2)$$

在体电流分布情形, 真空区域中仍有如上的方程, 在等离子体内部, 物理量应当满足一般磁流体力学方程

$$\nabla p = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

边条件如下:

1) 在等离子体与真空界面上满足

$$\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7)$$

$$B_e^2 = 8\pi p + B_i^2 \quad (8)$$

2) 在真空区域外面的导体壳上满足

$$\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{n} = f(s, \theta) \quad (9)$$

这里 $f(s, \theta)$ 是确定的函数. 我们认为, 纵向场的不均匀性是由外加纵向磁场不均匀引起的. 在实际磁约束系统中, 外加纵向场是稳态的, 可以认为不受导体壳的影响, 因而其法向分量是已知的. 平衡时等离子体电流与导体壳相互作用产生的磁场是瞬态的, 它必须与导体壳相切, 因而总磁场在导体壳上的法向分量是已知的. 我们就是要在如上的边界条件下分别求解方程 (2)–(5) 来进行讨论的.

2 表面电流情形

考虑曲率 $k(s)$ 与等离子体柱的横向特征长度 a 的乘积 $ka \ll 1$, 将 (2) 式按小量 ka 展开, 在零阶近似下有

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial S^2} = 0 \quad (10)$$

纵向磁场 $B_s = B_{s0} + B_{s1}(\rho, \theta, s)$, 其中 B_{s0} 是纵向磁场沿环向与极向的平均值. 我们假设 $B_{s1} \ll B_{s0}$, 相应地 $\Phi_0 = \Phi_{00} + \Phi_{01}$, 其中 Φ_{00} 为平均场对应的磁标势, 它满足方程

$$\frac{\partial^2 \Phi_{00}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_{00}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Phi_{00}}{\partial s^2} = 0 \quad (11)$$

边界条件为相应的均匀纵向场情形下的边条件, 其解为

$$\Phi_{00e} = B_{se0} \cdot S + B_{\theta_0}(a)a\theta$$

$$\Phi_{00i} = B_{si0}S$$

相应的磁场为

$$\begin{aligned} B_{e0} &= (0, B_{\theta_0}(a)a/\rho, B_{se0}) \\ B_{i0} &= (0, 0, B_{si0}) \end{aligned} \quad (12)$$

Φ_{01} 满足方程

$$\frac{\partial^2 \Phi_{01}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_{01}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi_{01}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{01}}{\partial S^2} = 0 \quad (13)$$

设

$$f(s, \theta) = E_{\rho e} e^{i(m\theta + ls)}, \quad \Phi_{01} = \Phi_{01}(\rho) e^{i(m\theta + ls)} \quad (14)$$

则

$$\frac{d^2 \Phi_{01}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d \Phi_{01}}{d\rho} - \left(\frac{m^2}{\rho^2} + l^2 \right) \Phi_{01} = 0 \quad (15)$$

有解

$$\Phi_{01i} = C I_m(l\rho) e^{i(m\theta + ls)} \quad (16)$$

$$\Phi_{01e} = [A I_m(l\rho) + B K_m(l\rho)] e^{i(m\theta + ls)} \quad (17)$$

其中 A 、 B 、 C 为待定常数. 边条件 (6)–(9) 中的 n 为相应的面的法向量. 这里, 我们假设等离子体柱的表面方程为

$$\rho = a + \xi e^{i(m\theta + ls)} \quad (18)$$

其中 a 为平均半径, ξ 为等离子体表面的位移. 假设 $\xi \ll a$, 利用 (6)–(9), (14), (18), 我们可得

$$A I'_m(l) + B K'_m(l) = i \left(1 + \frac{m}{l} B_{\theta_0}(1) \right) \xi \quad (19)$$

$$A I'_m(lb) + B K'_m(lb) = B_{\rho e}/l \quad (20)$$

$$C I'_m(l) = i \xi h \quad (21)$$

$$i \left(1 + \frac{m}{l} B_{\theta_0}(1) \right) [A I_m(l) + B K_m(l)] - \frac{\xi}{l} B_{\theta_0}^2(1) = i C I_m(l) \cdot h \quad (22)$$

这里把所有的量都写成无量纲形式了，在无量纲化过程中，磁场的特征量取 B_{se0} ，长度的特征量为等离子体平均半径 a 。由(19)–(22)可以解出

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad C = \frac{ih\xi}{I'_m(l)} \quad (23)$$

其中 $h = \frac{B_{si0}}{B_{se0}}$, $\Delta = I'_m(l)K'_m(lb) - I'_m(lb)K'_m(l)$ (24)

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= iK'_m(lb)\left(1 + \frac{m}{l}B_{\theta_0}(1)\right)\xi - K'_m(l)\frac{B_{\rho e}}{l} \\ \Delta_2 &= \frac{B_{\rho e}}{l}I'_m(l) - i\left(1 + \frac{m}{l}B_{\theta_0}(1)\right)I'_m(lb)\xi \\ \xi &= \frac{i\left(1 + \frac{m}{l}B_{\theta_0}(1)\right)B_{\rho e}[I_m(l)K'_m(l) - K_m(l)I'_m(l)]}{l\left(1 + \frac{m}{l}B_{\theta_0}(1)\right)^2[K_m(l)I'_m(lb) - I_m(l)K'_m(lb)] - \Delta B_{\theta_0}^2(1) + \frac{h^2lI_m(l)\cdot\Delta}{I'_m(l)}} \end{aligned} \quad (25)$$

当 $m = 0$ 时 $\left(1 + \frac{m}{l}B_{\theta_0}(1)\right) = 1$ 有

$$\xi = \frac{iB_{\rho e}[I_0(l)K'_0(l) - K_0(l)I'_0(l)]}{l[K_0(l)I'_0(lb) - I_0(l)K'_0(lb)] - B_{\theta_0}^2(1)\cdot\Delta + \frac{h^2lI_0(l)\Delta}{I'_0(l)}} \quad (26)$$

若 $l \ll 1$, $lb \ll 1$ 有

$$\xi = \frac{2ibB_{\rho e}}{l} \frac{1}{(b^2 - 1)B_{\theta_0}^2(1) - 2 - 2(b^2 - 1)h^2} \quad (27)$$

若 $h = 1$, $\xi = \frac{2ibB_{\rho e}}{l} \left[\frac{1}{(b^2 - 1)B_{\theta_0}^2 - 2b^2} \right]$ (28)

当 $B_\theta \ll 1$

$$\xi = -\frac{i}{lb}B_{\rho e} \quad (29)$$

上式中 ξ 与 lb 成反比，说明长波易引起磁面变形，同时导体壳离开越远，变形就越小。如果要限制 ξ 不超过某一值，那么在确定的导体壳半径 b 时，应对 l 做一定的限制。

当 $m = 1$ 时

$$\xi_1 = \frac{i\left(1 + \frac{1}{l}B_{\theta_0}\right)B_{\rho e}[I_1(l)K'_1(l) - K_1(l)I'_1(l)]}{l\left(1 + \frac{1}{l}B_{\theta_0}\right)^2[K_1(l)I'_1(lb) - I_1(l)K'_1(lb)] - \Delta B_{\theta_0}^2 + \frac{h^2lI_1(l)\Delta}{I'_1(l)}} \quad (30)$$

其中 $B_{\theta_0} = B_{\theta_0}(1)$ 。当 $l \ll 1$, $lb \ll 1$ 时

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{b^2 - 1}{2l^2b^2}, \quad I_1(l)K'_1(l) - K_1(l)I'_1(l) \doteq \frac{-1}{l} \\ K_1(l)I'_1(lb) - I_1(l)K'_1(lb) &= \frac{b^2 + 1}{2lb^2} \end{aligned}$$

这时

$$\xi_1 = \frac{-i(l + B_\theta)B_{\rho e}}{(l + B_\theta)^2 \frac{b^2 + 1}{2b^2} + \frac{b^2 - 1}{2b^2}(h^2 l^2 - B_\theta^2)} \quad (31)$$

当 $h = 1$ 时

$$\xi_1 = \frac{-ib^2 B_{\rho e}}{b^2 l + B_\theta} \quad (32)$$

$B_\theta \ll 1$

$$\xi_1 = -i \frac{B_{\rho e}}{l} \quad (33)$$

这时位移 ξ 与 l 成反比. 当 $m = -1$ 时

$$\xi_{-1} = \frac{-ib^2 B_{\rho e}}{b^2 l - B_\theta} \quad (34)$$

在 $l = B_\theta/b^2$ 时 $\xi \rightarrow \infty$, 在此附近平衡破坏.

3 体电流分布情形

在按曲率展开的零阶近似下, 我们来考虑纵向磁场沿环向不均匀对平衡产生的影响. 假设

$$B_s = B_{s0}(\rho) + B_{s1}(\rho, \theta, s) \quad (35)$$

其中 $B_{s1} \ll B_{s0}$

$$B_{s1}(\rho, \theta, s) = B_{s1}(\rho) e^{i(m\theta + ls)} \quad (36)$$

我们把这种磁场位形看成是纵向场为 $B_{s0}(\rho)$ 的这种平衡位形的“扰动”, 而相应的磁面位置之差就是磁面的“变形”

$$\xi = \xi(\rho) e^{i(m\theta + ls)} \quad (37)$$

压力的改变为

$$p_1 = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 \quad (38)$$

这相当于假设“扰动后”的磁面的压力等于相应的“平均位形”的未扰动磁面上的压力. 我们假设在按曲率展开的零阶近似下, 边界条件具有 $e^{i(m\theta + ls)}$ 的形式. 由基本方程组(3)–(5) 经过线性化后可得

$$B_{\rho 1} = \frac{i\xi}{\rho} (m B_{\theta 0} + l \rho B_{s0}) \quad (39)$$

$$B_{s1} = \frac{4\pi}{C} \xi j_{\theta 0} + \frac{1}{l^2 \rho^2 + m^2} \left\{ \xi l (m B_{\theta 0} - l \rho B_{s0}) - l \rho (m B_{\theta 0} + l \rho B_{s0}) \frac{d\xi}{d\rho} \right\} \quad (40)$$

$$B_{\theta 1} = -\frac{4\pi}{C} \xi j_{s0} - \frac{m}{l^2 \rho^2 + m^2} \left\{ -\frac{\xi}{\rho} (m B_{\theta 0} - l \rho B_{s0}) + (m B_{\theta 0} + l \rho B_{s0}) \frac{d\xi}{d\rho} \right\} \quad (41)$$

$$j_{\rho 1} = \frac{j\xi}{\rho} (m j_{\theta} + l \rho j_{s0}) \quad (42)$$

$$j_{s1} = -\xi \frac{dj_{s0}}{d\rho} - \frac{l\rho}{l^2\rho^2 + m^2} (mj_{\theta0} + l\rho j_{s0}) \frac{d\xi}{d\rho} + \frac{l(mj_{\theta0} + l\rho j_{s0})(mB_{\theta0} - l\rho B_{s0})}{(l^2\rho^2 + m^2)(mB_{\theta0} + l\rho B_{s0})} \xi \quad (43)$$

$$j_{\theta1} = \frac{C}{4\pi} \left[\frac{\partial B_\rho}{\partial S} - \frac{\partial B_{S1}}{\partial \rho} \right] \quad (44)$$

ξ 满足的方程如下

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\rho(mB_{\theta0} + l\rho B_{s0})^2}{l^2\rho^2 + m^2} \frac{d\xi}{d\rho} \right] + \frac{\xi l^2}{l^2\rho^2 + m^2} \cdot \left\{ \frac{2(m^2 B_{\theta0}^2 - l^2 \rho^2 B_{s0}^2)}{l^2\rho^2 + m^2} \right. \\ & \left. - \frac{l^2 \rho^2 + m^2 - 1}{l^2\rho^2} (mB_{\theta0} + l\rho B_{s0})^2 - \frac{8\pi}{C} \rho (j_{\theta0} B_{s0} - j_{s0} B_{\theta0}) \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

在真空区域方程与边条件都与表面电流情形一样。我们假设相应的“平均位形”(即零阶近似)是电流为均匀分布的情形

$$B_{\theta0} = \frac{2\pi}{C} j_0 \rho \quad (46)$$

我们记

$$\frac{B_{\theta0}}{B_{s0}} = \frac{2\pi}{C} \frac{j_0 a}{B_{s0}} \cdot \frac{\rho}{a} = \frac{1}{2} \alpha \cdot \frac{\rho}{a} \quad (47)$$

其中

$$\alpha = \frac{4\pi a j_0}{C B_{s0}} \quad (48)$$

以 B_{s0} 与 a (等离子体平均半径) 为无量纲化时的特征量, 方程与边条件无量纲形式为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m\alpha}{2} + l \right)^2 \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\left(\frac{\rho^3}{\rho^2 l^2 + m^2} \right) \frac{d\xi}{d\rho} \right] + \frac{\xi l^2}{l^2 \rho^2 + m^2} \\ & \left[\frac{2 \left(\frac{m^2 \alpha^2}{4} - l^2 \right) \rho^2}{l^2 \rho^2 + m^2} - \frac{(l^2 \rho^2 + m^2 - 1) \left(\frac{m\alpha}{2} + l \right)^2}{l^2} - \alpha^2 \rho^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & \rho = 0 \quad \xi = 0 \\ & \rho = 1 \quad \xi = \xi_a \end{aligned} \quad (50)$$

ξ_a 由下列方程确定

$$AI'_m(l) + BK'_m(l) = i \left(1 + \frac{m}{l} B_{\theta0}(1) \right) \xi_a \quad (51)$$

$$AI'_m(lb) + BK'_m(lb) = B_{pe}/l \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & i(l + mB_{\theta0}(1)) [AI_m(l) + BK_m(l)] - \xi_a B_{\theta0}^2(1) \\ & = \frac{h}{l^2 + m^2} \left\{ l \xi_a (mB_{\theta0}(1) - lh) - l(mB_{\theta0}^{(1)} + lh) \frac{d\xi}{d\rho} \Big|_{\rho=1} \right\} \\ & + \frac{\alpha}{2} \left\{ -h\alpha \xi_a - \frac{m}{l^2 a^2 + m^2} [-\xi_a (mB_{\theta0}(1) - lh)] \right. \\ & \left. + (mB_{\theta0}(1) + lh) \cdot \frac{d\xi}{d\rho} \Big|_{\rho=1} \right\} + \frac{\alpha^2}{4} \xi_a \end{aligned} \quad (53)$$

当 $m = 0$ 时 (49) 式为

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho B_{s0}^2 \frac{d\xi}{d\rho} \right) - \xi \left\{ \frac{\rho^2 l^2 + 1}{\rho^2} B_{s0}^2 + \frac{8\pi}{\rho} \frac{dp_0}{d\rho} \right\} = 0 \quad (54)$$

有解析解

$$\xi = \xi_a \cdot \frac{I_1(e\rho)}{I_1(e)} \quad (55)$$

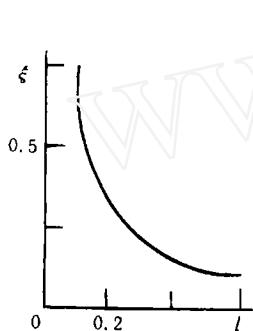
其中

$$e^2 = l^2 - \alpha^2$$

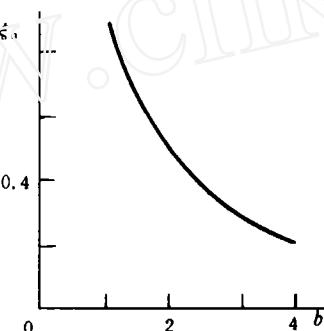
利用 (51)–(53) 可解出

$$\xi_a = \frac{iB_{pe}[I'_0(l)K_0(l) - K'_0(l)I_0(l)]}{\left\{ \Delta - h^2 \left[1 + \frac{I_0(e) + I_2(e)}{2I(e)} \cdot e \right] - \frac{\alpha^2 h^2}{4} + B_{\theta e 0}^2(1) + \frac{l}{\Delta} [K'_0(lb)I_0(l) - I'_0(lb)K_0(l)] \right\}} \quad (56)$$

(56) 式的计算结果如图 1,2 所示.

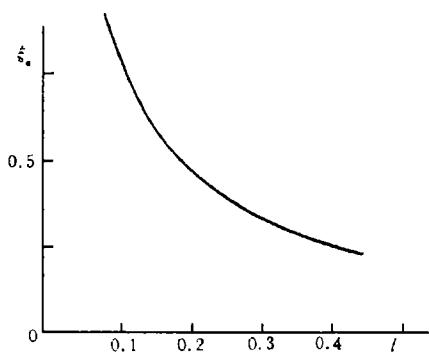


$b = 1.5, \alpha = 0.05, B_{pe} = 0.1, h = 1$
图 1
Fig.1

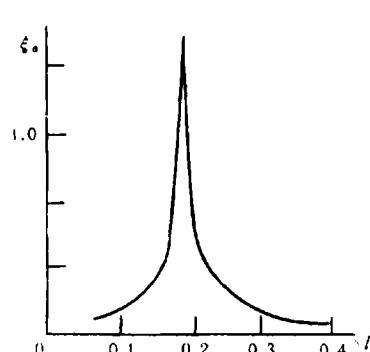


$l = 0.1, \alpha = 0.05, h = 1, B_{pe} = 0.1$
图 2
Fig.2

当 $m = 1$ 时, 用数值法求解 (49)–(53), 结果见图 4–6. 图 3 为表面电流情形的 (30) 式.



$m = 1, b = 1.5, B_{pe} = 0.1$
图 3
Fig.3



$m = 1, \alpha = 0.05, b = 1.5, B_{pe} = 0.1$
图 4
Fig.4

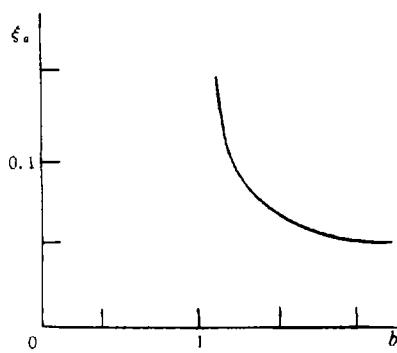
 $m = 1, l = 0.1, \alpha = 0.05$

图 5

Fig.5

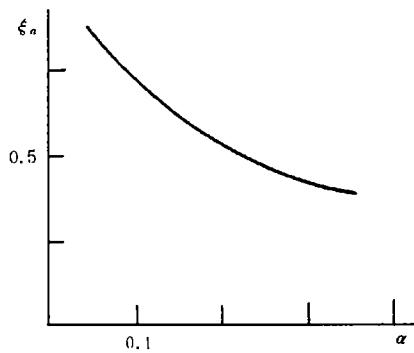
 $m = 1, l = 0.3, b = 1.5, B_{\theta e} = 0.1$

图 6

Fig.6

如果零阶近似下纵向电流分布为

$$j_{s0} = j_0(1 - \rho^2/a^2) \quad (57)$$

$m = 0$ 的方程为

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d\xi}{d\rho} \right] - \xi \left[l^2 + \frac{1}{\rho^2} - \alpha^2 (1 - \rho^2) \left(1 - \frac{\rho^2}{2} \right) \right] = 0 \quad (58)$$

由相应的边界条件可得

$$\xi_a = \frac{\xi'(1) - d_1}{C_1} \quad (59)$$

$$\text{其中 } C_1 = \frac{l}{h^2} \frac{K'_0(lb)I_0(l) - I'_0(lb)K_0(l)}{\Delta} + \frac{B_{\theta e 0}^2(1)}{h^2} - 1 - \frac{5}{16}\alpha^2$$

$$d_1 = \frac{iB_{\theta e}}{h^2} \frac{K'_0(l)I_0(l) - I'_0(l)K_0(l)}{\Delta} \quad (60)$$

数值计算结果与图 1,2 很接近.

4 结果与讨论

我们求得了由于纵向场不均匀而引起的磁面变形. 对于沿极向均匀的情形 ($m = 0$) 等离子体的变形随着 l 的增大而减小, 这说明长波不均匀性最容易导致磁面的变形, 为了使等离子体表面的“扰动”变形不超过一定的限度, 只好对波长作一定的限制, 对于 θ 方向非均匀的情形, 等离子体磁面的变形会在外加纵向场的某个参数下发生“共振”, 这时平衡遭到破坏. 因而, 为了抑制不稳定性的附加场会对平衡产生不利影响, 需要加以注意. 环形效应显然是很重要的, 但环形效应用当同时计及与各种不均匀模式的耦合, 这方面的工作正在进行中.

最后对宫野同志在数值计算方面的有益的讨论与建议表示感谢.

参 考 文 献

- 1 В.Д. Шафранов. Nuclear Fusion 4(1964): 114
- 2 В.Д. Шафранов. Nuclear Fusion 4(1964): 232

PLASMA EQUILIBRIUM IN A NON-UNIFORM TOROIDAL MAGNETIC FIELD

Li Guobing Wang Jifeng

(Dept. of Applied Mathematics, Dalian Institute of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract The distortion of magnetic confined plasma, caused by non-uniformity in toroidal magnetic field, was discussed. For the cases of surface and volume current distribution, the relationships between the distortion of magnetic surfaces and various parameters were obtained. A restriction on the non-uniformity in magnetic field was given for the equilibrium of a plasma.

Key words magnetic confinement plasma, equilibrium configuration, toroidal magnetic field, magnetic surface distortion