

# 复合材料正交叠层板最终拉伸强度的 细观统计分析<sup>1)</sup>

曾庆敦 马 锐\* 范赋群  
(华南理工大学工程力学系, 广州 510641)

**摘要** 本文对复合材料正交叠层板  $[0/90/0]$  的最终拉伸破坏行为进行了研究. 首先, 提出一种修正的剪滞分析方法, 求解叠层中由  $90^\circ$  层的基体开裂和  $0^\circ$  层的部分纤维断裂相互作用所导致的应力重新分布; 然后, 采用随机临界核统计模型, 对叠层板的最终破坏进行了细观统计分析. 对  $[0_2/90_m]_s$ 、 $[0_4/90_m]_s$  碳 / 环氧和  $[0_4/90_m]_s$  玻璃 / 环氧的计算结果表明, 估计的最终拉伸强度与现有的实验结果有较好的符合.

**关键词** 正交叠层, 最终破坏, 剪滞分析, 随机临界核, 破坏概率

## 引 言

叠层强度是复合材料强度问题的代表, 是个非常复杂的问题. 在大多数情况下, 叠层的破坏是一个具有明显变化的破坏过程, 而且是随机的. 沿用传统强度理论的观念来处理此类问题, 往往会遇到一些不可克服的困难, 因为强度数据本身就不是材料常数, 具有所谓的就位 (in situ) 特性、协同效应、叠层效应等. 它们与复合材料中的随机缺陷、损伤机理和破坏过程等密切相关, 传统强度理论无法考虑这些因素. 然而, 采用当今较为流行的细观统计理论来研究复合材料的强度与破坏, 可以克服传统强度理论的一些不足之处, 并能较好地揭示复合材料的细观破坏机制.

关于复合材料正交叠层板拉伸破坏问题的研究, 已有不少的文献报导<sup>[1-8]</sup>, 这些文章大多侧重于研究叠层板中  $90^\circ$  层裂纹的起始和演化、出现多重开裂至裂纹饱和 (即所谓的特征损伤状态<sup>[9]</sup>, 简称 CDS), 形成了多种理论和相应的计算方法. 但对 CDS 出现后  $0^\circ$  层的细观破坏 (纤维累积断裂至破坏) 机理的研究, 目前还是一片空白, 其原因在于叠层中由  $90^\circ$  层的基体开裂和  $0^\circ$  层的纤维断裂相互作用所导致的应力重新分布问题的求解相当困难及未建立有便于分析其破坏过程的细观统计力学模型.

为适应细观力学的发展, 文献 [10] 对单向复合材料的纵向拉伸破坏提出了一种称之为随机扩大临界核的统计模型. 该模型认为, 复合材料的破坏是由许多随机微裂纹 (或损伤) 逐渐随机累积和随机扩大而形成的临界核所导致. 分析和计算结果证

<sup>1)</sup> 国家自然科学基金资助项目.

\* 现在深圳南海石油开发建设公司工作.

本文于 1993 年 5 月 24 日收到第一稿, 1993 年 10 月 29 日收到修改稿.

实了这个模型比起链式模型<sup>[11]</sup>及其它方法更合理、更现实,并能用来分析层间杂交叠层复合材料的拉伸第一破坏<sup>[12]</sup>及最后破坏<sup>[13]</sup>.它考虑了:材料中存在随机分布的裂纹(或损伤、缺陷)源;随机裂纹源随机稳定地增加数量和扩大范围(包括相继断裂纤维的数目——横向,和相应的拔出长度——纵向),以形成随机临界核(核外纤维的应力大于纤维的强度,临界核必然失稳扩展);复合材料中只要至少形成一个这样的随机临界核,就必然发生破坏.

本文将假设正交叠层中 $90^\circ$ 层已出现横向裂纹,采用剪滞理论分析 $0^\circ$ 各层及其中的某些纤维断裂而导致的应力重分布,然后采用随机临界核模型对 $0^\circ$ 层的细观破坏过程进行细观统计分析,并考虑固化残余应力对叠层最终拉伸强度的影响.所得的理论结果将与现有的实验数据进行比较,以证实本文理论的合理性和正确性.

### 一、正交叠层的细观应力分析

设如图1(a)所示的 $[0_n/90_m]$ 正交叠层板在 $0^\circ$ 方向承受拉伸荷载作用,随着荷载的逐步增加,在 $90^\circ$ 层内首先产生平行于该层纤维方向的基体开裂,裂纹数量随荷载的增加而增加,直到一个饱和状态,即CDS<sup>[9]</sup>.CDS的出现标志着基体开裂初期阶段的结束.随后的进一步加载将伴随其它损伤模式的出现(诸如层间分层,纤维与基体界面脱胶,纤维断裂和拔出,以及它们的组合).通常,正交叠层的最后破坏起始于 $0^\circ$ 层的部分纤维断裂,此类应力重分布问题可采用剪滞理论求解<sup>[14]</sup>.

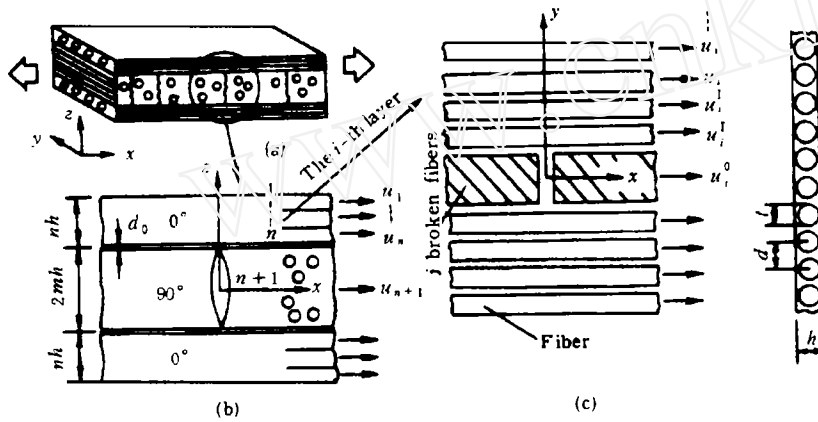


图1 正交叠层和分析模型  
Fig.1 Cross-ply laminate and analytical model

从叠层板中取出一个如图1(b)所示的代表性单元( $0^\circ$ 层中可能出现的裂纹未在图中示出).设 $90^\circ$ 和 $0^\circ$ 层之间传递剪应力的纯树脂薄层的厚度为 $d_0$ ,各单层的厚度均为 $h$ ,则 $90^\circ$ 层和 $0^\circ$ 层的厚度分别为 $2mh$ 和 $nh$ .为了简便起见,本文将代表性单元中已存在贯穿的横向裂纹的 $90^\circ$ 层视为一个等效层.此层的位移用 $u_{n+1}$ 表示,而 $0^\circ$ 各单层的位移分别用 $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n$ 表示.

为了求解 $0^\circ$ 层中由纤维断裂所导致的应力重分布,再从代表性单元中取出如图1(c)所示的第 $i$ 层( $0^\circ$ 层).假设第 $i$ 层中已有 $j$ 条纤维发生了相继断裂.考虑到已断裂纤维在其同层邻近产生的应力扰动一般在离断口相隔2至3根纤维的区域外就微

乎其微了<sup>[15,16]</sup>, 因此, 本文将第  $i$  层中的纤维分为 4 组: 第 1 组为  $j$  条已断纤维 (断裂核<sup>[15,16]</sup>); 第 2 组为断口最邻近的两条完整纤维; 第 3 组为次邻近的两条纤维; 第 4 组为其它纤维. 假设各组纤维的应力或应变各自相同, 并设各组纤维的位移分别为  $u_i^0, u_i^I, u_i^{II}, u_i$ , 其中  $u_i$  为不受断裂核影响的第  $i$  层位移 (事实上, 根据剪滞假定<sup>[14]</sup>,  $u_i$  也是该层纤维的位移). 在建立上述前 3 组纤维的剪滞方程时, 除要考虑同层纤维间的基体剪应力作用, 还应考虑层间基体剪应力的影响. 设纤维的杨氏模量和截面面积分别为  $E$  和  $A$ , 基体剪切模量为  $G$ ,  $0^\circ$  各层的纤维间距均为  $d$ , 所设坐标如图 1 所示. 所得的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} jEA \frac{d^2 u_i^0}{dx^2} + 2 \frac{Gh}{d} (u_i^I - u_i^0) + \frac{Gdj}{h} (u_{i+1} - u_i) - \frac{Gdj}{h} (u_i - u_{i-1}) &= 0 \\ EA \frac{d^2 u_i^I}{dx^2} + \frac{Gh}{d} (u_i^{II} - 2u_i^I + u_i^0) + \frac{Gd}{h} (u_{i+1} - u_i) - \frac{Gd}{h} (u_i - u_{i-1}) &= 0 \\ EA \frac{d^2 u_i^{II}}{dx^2} + \frac{Gh}{d} (u_i - 2u_i^{II} + u_i^I) + \frac{Gd}{h} (u_{i+1} - u_i) - \frac{Gd}{h} (u_i - u_{i-1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

上式中的第 3、4 项为层间剪应力的影响. 对于表层单层, 即  $i=1$ , 应去掉 (1) 式中的第 4 项. (1) 式中的  $u_i (i=1, 2, \dots, n+1)$  可由图 1(b) 所示的分析模型中求得, 考虑对称性, 引出的平衡方程是

$$\left. \begin{aligned} E_L A_L \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{GW}{h} (u_2 - u_1) &= 0 \\ E_L A_L \frac{d^2 u_i}{dx^2} + \frac{GW}{h} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) &= 0 \quad (i \neq 1 \text{ 或 } n+1) \\ E_T A_T \frac{d^2 u_{n+1}}{dx^2} + \frac{2GW}{d_0} (u_n - u_{n+1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中,  $W$  为试样宽度 (如单层中等间距平行排列的纤维条数为  $N$ , 则  $W = Nd$ ),  $E_L$  和  $E_T$  分别为单向板的径向和横向有效模量,  $A_L (= hNd)$  和  $A_T (= 2mhNd)$  分别为  $0^\circ$  单层和  $90^\circ$  等效层的横截面面积.

设  $E_L = EV_f (V_f = A/dh$  是纤维体积分数), 则  $E_L A_L = EV_f hNd = EAN$ , 再引入无量纲参数

$$\left. \begin{aligned} u_i^k &= \sqrt{EAd/Gh} U_i^k \quad (k = 0, I, II) \\ u_i &= \sqrt{EAd/Gh} U_i \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1) \\ x &= \sqrt{EAd/Gh} \xi, \quad D_0 = d/d_0, \quad D^2 = d^2/h^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

可将 (1)、(2) 式进行简化. 假定在代表性单元中的边界条件与原叠层板中的边界条

件相同, 可得到以下两组方程

$$\left. \begin{aligned} j \frac{d^2 U_i^0}{d\xi^2} + 2(U_i^I - U_i^0) + jD^2(U_{i+1} - U_i) - jD^2(U_i - U_{i-1}) &= 0 \\ \frac{d^2 U_i^I}{d\xi^2} + (U_i^{II} - 2U_i^I + U_i^0) + D^2(U_{i+1} - U_i) - D^2(U_i - U_{i-1}) &= 0 \\ \frac{d^2 U_i^{II}}{d\xi^2} + (U_i - 2U_i^{II} + U_i^I) + D^2(U_{i+1} - U_i) - D^2(U_i - U_{i-1}) &= 0 \\ U_i^I|_{\xi=0} = U_i^{II}|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{dU_i^0}{d\xi}|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{dU_i^k}{d\xi}|_{\xi \rightarrow \infty} = 1 \quad (k = 0, I, II) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 U_1}{d\xi^2} + D^2(U_2 - U_1) &= 0 \\ \frac{d^2 U_i}{d\xi^2} + D^2(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) &= 0 \quad (i \neq 1 \text{ 或 } n+1) \\ R \frac{d^2 U_{n+1}}{d\xi^2} + DD_0(U_n - U_{n+1}) &= 0 \\ U_i|_{\xi=0} = 0 (\text{完整层}), \quad \frac{dU_i}{d\xi}|_{\xi=0} = 0 (\text{断裂层}), \quad \frac{dU_i}{d\xi}|_{\xi \rightarrow \infty} = 1 (\text{所有层}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中

$$R = \frac{E_T A_T}{EA} \cdot \frac{d}{2W} = \frac{E_T \cdot 2mhW}{EA} \cdot \frac{d}{2W} = m \frac{E_T}{EA/(dh)} = m \frac{E_T}{LV_f} = m \frac{E_T}{E_L} \quad (6)$$

由 (5) 式解得  $U_i(\xi) (i = 1, 2, \dots, n, n+1)$ , 代入 (4) 式可求得  $U_i^k(\xi) (k = 0, I, II)$ . 第  $i$  层纤维的规范化应变和应力由下式给出

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &\equiv \frac{du_i}{dx} \Big|_x / \frac{du_i}{dx} \Big|_\infty = \left( \frac{dU_i}{d\xi} \right)_\xi \\ \sigma_i &\equiv E \frac{du_i}{dx} \Big|_x / \left( E \frac{du_i}{dx} \Big|_\infty \right) = \left( \frac{dU_i}{d\xi} \right)_\xi \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

应变和应力集中因子分别由  $\varepsilon_i(0)$  和  $\sigma_i(0)$  给出, 由 (7) 式可见, 两者是相同的. 如果第  $i$  层中无一纤维断裂 (即  $j = 0$ ), 则此层中的纤维由于  $90^\circ$  等效层的基体开裂或某些  $0^\circ$  单层的破坏而导致的应力集中因子为

$$K_{i,0} = \sigma_i(0) = \frac{dU_i}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \quad (8)$$

同理可求得第  $i$  层中有  $j$  条纤维发生相继断裂时, 此层断口最邻近纤维的应力集中因子

$$K_{i,j} = \sigma_i^I(0) = \frac{dU_i^I}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \quad (9)$$

## 二、正交叠层最终破坏的细观统计分析

$[0_n/90_m]$  叠层板在 CDS 下的最后破坏通常取决于最终的损伤状态. 关于叠层最终破坏概率的计算, 原则上应首先确定  $0^\circ$  每一单层的破坏概率, 其次是判明各单

层的所有可能的破坏次序，并计算每一种破坏次序的概率，最后综合得到叠层破坏的概率。然而，采用此法却非常繁琐和复杂。为克服这些困难，本文采用一种较为简化的计算方法如下：首先，定义  $0^\circ$  某单层中至少出现一个随机扩大临界裂纹核 [10,12,13] 时，该层就发生破坏（其中可包括多级破坏）；然后，将  $0^\circ$  所有单层都破坏定义为叠层的破坏；通过考虑  $0^\circ$  各单层破坏的占优势过程（取决于应力集中的大小），就可获得叠层最终破坏的概率。具体步骤如下：

1) 假定叠层中的  $90^\circ$  层已产生基体开裂，由前述的剪滞分析搜索出承受应力集中最大的某一  $0^\circ$  单层，显然，此层的纤维较易发生断裂。应用随机临界核理论 [10]，可求出此层的破坏概率分布函数；2) 假定前述的  $0^\circ$  单层已发生破坏，重新计算应力重分布，又可搜索出承受应力集中最大的另一  $0^\circ$  单层，并求出其破坏概率分布函数；3) 重复以上步骤，直至计算完所有的  $0^\circ$  单层，再由计算条件概率的方法，求出叠层最终破坏的概率分布函数。

由上述步骤可求得  $[0_n/90_m]$  叠层板最终破坏的概率分布函数

$$G(\sigma) = 1 - [1 - P_n(\sigma)P_{n-1}(\sigma) \cdots P_2(\sigma)P_1(\sigma)]^2 \tag{10}$$

其中， $\sigma$  为  $0^\circ$  层中的远场纤维应力， $P_n(\sigma)$  为  $90^\circ$  等效层最邻近的  $0^\circ$  单层的破坏概率分布函数， $P_{n-1}(\sigma)$  为第  $n$  层已发生破坏的条件下，第  $n-1$  层的破坏概率分布函数，其它如此类推。

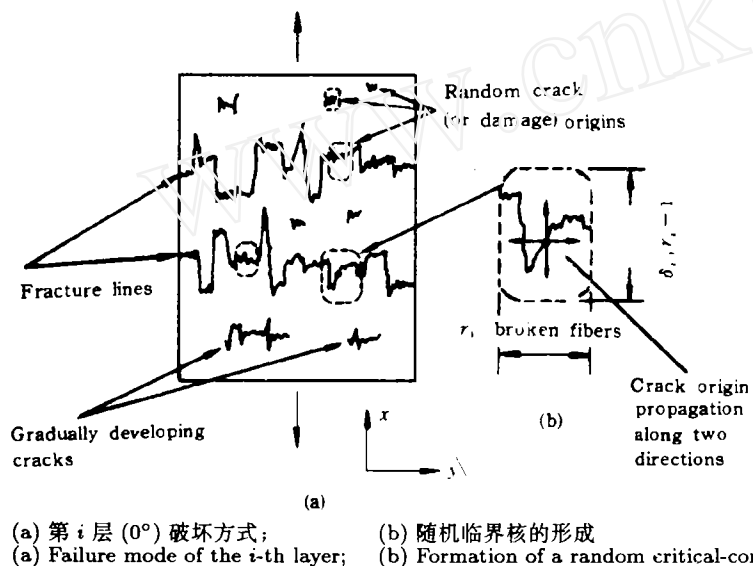


图 2 随机扩大临界核统计模型  
 Fig.2 Random critical-core probability model

叠层中第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 单层 ( $0^\circ$  层) 的破坏过程可用图 2 所示的随机扩大临界核统计模型表示。假定长为  $\delta$  的纤维强度服从 Weibull 分布

$$F(\sigma) = 1 - \exp(-\alpha\delta\sigma^\beta) \tag{11}$$

其中， $\alpha$  和  $\beta$  为 Weibull 参数。根据随机临界核理论 [10]，可求得第  $i$  层中至少形成一

个如图 2(b) 所示的随机临界核的概率分布函数 (即第  $i$  层的破坏概率分布函数) 为

$$P_i(\sigma) = 1 - [1 - H_i(\sigma)]^{M_i} \tag{12}$$

式中,  $H_i(\sigma)$  为发生  $r_i$  (临界核中的纤维临界断裂数) 条纤维连续断裂的概率, 其表达式为

$$H_i(\sigma) = W_0(\sigma)W_1(\sigma)\cdots W_{r_i-2}(\sigma)W_{r_i-1}(\sigma) \\ = 2^{r_i-2}F(K_{i,0}\sigma)\left\{\prod_{j=1}^{r_i-2} F(K_{i,j}\sigma)[1 - F(K_{i,j}\sigma)]\right\}F(K_{i,r_i-1}\sigma)[2 - F(K_{i,r_i-1}\sigma)] \tag{13}$$

其中:  $W_0(\sigma) = F(K_{i,0}\sigma)$  为长是  $\delta_{i,0}$  的某一“最弱”纤维在应力  $K_{i,0}\sigma$  作用下的破坏概率;  $W_1(\sigma) = 2F(K_{i,1}\sigma)[1 - F(K_{i,1}\sigma)]$  为断口两侧长是  $\delta_{i,1}$  的两纤维在应力  $K_{i,1}\sigma$  作用下恰好一条断裂的概率;  $\cdots$ ;  $W_{r_i-2}(\sigma) = 2F(K_{r_i-2}\sigma)[1 - F(K_{r_i-2}\sigma)]$  为  $(r_i - 2)$  条纤维断后, 相邻长是  $\delta_{r_i-2}$  的两条纤维在应力  $K_{r_i-2}\sigma$  作用下恰好一条断裂的概率; 而  $W_{r_i-1}(\sigma) = 1 - [1 - F(K_{r_i-1}\sigma)]^2$  为  $(r_i - 1)$  条纤维断裂后相邻两条过应力纤维至少一条断裂的概率. 这里的  $\delta_{i,j} (\delta_{i,0} = \delta_{i,1} < \delta_{i,2} < \cdots)$  为逐渐扩大的无效长度. (12) 式中的  $M_i$  则为第  $i$  层中至多可能形成的随机临界核个数. 设  $L$  为试样的长度, 有

$$M_i = \text{Int}[LN/r_i\delta_{r_i-1}] \tag{14}$$

式中的符号 Int 表示取整数.

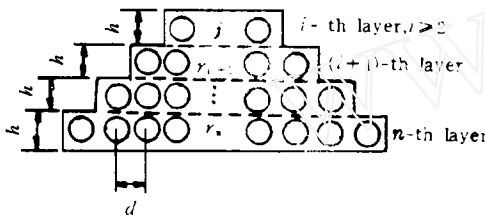


图 3 拔出长度的计算模型

Fig.3 Model for determination of pull-out length

为了顾及基体或界面的破坏及避免使用近似方法引起的误差累积, 逐渐扩大的无效长度宜取拔出 (或脱胶) 长度  $l_c$  的两倍 [10,12,13]. 考虑到纤维断裂的占优势过程, 故取图 3 所示的模型计算拔出长度. 图中的纤维均承受拉应力作用, 而在周边上存在沿纤维方向的剪应力, 在极限情形, 此剪应力则为界面或基体的剪切强度  $\tau_s$ . 设在叠层中拔出  $(r_n + r_{n-1} + \cdots + r_{i+1} + j)$  条纤维的拔出长度为  $\delta_{i,j}/2$ , 由极限平衡有

$$(r_n + r_{n-1} + \cdots + r_{i+1} + j)A\sigma \\ = \{r_n d + (r_n - r_{n-1})d + \cdots + (r_{i+1} - j)d + jd + 2[n - (i - 1)]h\} \frac{\sigma_{i,j}}{2} \tau_s \tag{15}$$

这里的  $r_n, r_{n-1}, \cdots, r_{i+1}$  可视为相应临界核中的纤维临界断裂数. 假设  $d$  近似等于  $h$ ,  $t \approx V_f d$  ( $t$  为纤维直径,  $V_f = A/dh$ ), 由 (15) 式得到

$$\delta_{i,j} = \left( \sum_{p=i+1}^n r_p + j \right) t \sigma / [(r_n + n - i + 1) \tau_s] = a_{i,j} \sigma \quad (i = 2, 3, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, r_i) \tag{16}$$

$$\text{其中} \quad a_{i,j} = \left( \sum_{p=i+1}^n r_p + j \right) t / [(r_n + n - i + 1) \tau_s] \quad (17)$$

同理可求得  $i = 1$  (表层) 时的  $\delta_{1,j}$  为

$$\delta_{1,j} = \left( \sum_{p=2}^n r_p + j \right) t \sigma / [(r_n - j/2 + n) \tau_s] = a_{1,j} \sigma \quad (j = 1, 2, \dots, r_1) \quad (18)$$

$$\text{其中} \quad a_{1,j} = \left( \sum_{p=2}^n r_p + j \right) t / [(r_n - j/2 + n) \tau_s] \quad (19)$$

为推导随机临界核失稳扩展的临界条件, 写出长为  $\delta_{i,j}$  的纤维在应力  $K_{i,j} \sigma$  作用下的 Weibull 分布

$$F(K_{i,j} \sigma) = 1 - \exp \left[ -\alpha \delta_{i,j} (K_{i,j} \sigma)^\beta \right] = 1 - \exp \left[ - \left( K_{i,j}^B \sigma / \bar{\sigma}_{i,j} \right)^{\beta+1} \right] \quad (20)$$

$$\text{其中} \quad \bar{\sigma}_{i,j} = (a_{i,j} \alpha)^{-1/(\beta+1)}, \quad B = \beta / (\beta + 1) \quad (21)$$

长为  $\delta_{i,j}$  的纤维的统计平均强度由下式求出

$$\bar{\sigma}_{i,j} = \int_0^\infty \sigma \frac{d}{d\sigma} \left[ 1 - \exp \left( -\alpha \delta_{i,j} \sigma^\beta \right) \right] d\sigma = (a_{i,j} \alpha)^{-1/(\beta+1)} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta+1} \right) \quad (22)$$

式中的  $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数. 由于  $\beta$  值通常在 4—20 之间, 故上式中的  $\Gamma(\cdot) \approx 1$ , 可见  $\bar{\sigma}_{i,j} \approx \bar{\sigma}_{i,j}$ .

假定正交叠层在施加应力 (以远场纤维应力表示)  $\sigma \leq \bar{\sigma}_{i,r_i-1} / K_{i,r_i-1}^B$  作用下, 第  $i$  层中已形成了具有  $r_i$  条纤维连续断裂的某个裂纹核. 如果此裂纹核相邻两纤维的破坏概率大于  $1 - e^{-1} \approx 0.632$ , 即  $K_{i,r_i}^B \sigma > \bar{\sigma}_{i,r_i} \approx \bar{\sigma}_{i,r_i}$  (见 (20) 式) 或  $\sigma > \bar{\sigma}_{i,r_i} / K_{i,r_i}^B$ , 或者说, 如果此裂纹核相邻两纤维的过应力  $K_{i,r_i} \sigma$  大于纤维段本身的统计平均强度  $\bar{\sigma}_{i,r_i}$  (因为  $K_{i,r_i} \sigma > K_{i,r_i}^B \sigma$ ), 就必然发生断裂, 从而导致裂纹核失稳扩展, 此裂纹核也就构成了所谓的随机临界核. 由此可得临界条件

$$\bar{\sigma}_{i,r_i} / K_{i,r_i}^B < \sigma \leq \bar{\sigma}_{i,r_i-1} / K_{i,r_i-1}^B \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

类似地可求得单层板失稳破坏的临界条件

$$\bar{\sigma}_{i,0} / K_{i,0}^B < \sigma \leq \bar{\sigma}_{i+1,0} / K_{i+1,0}^B \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (24)$$

令正交叠层最终破坏的概率  $G(\sigma) = G_0$  (常数, 通常可取  $G_0 = 0.5^{[6,10-13]}$  表征叠层的最终破坏), 由 (10) 式得到叠层最终破坏的破坏准则

$$1 - [1 - P_n(\sigma) P_{n-1}(\sigma) \cdots P_1(\sigma)]^2 = G_0 \quad (25)$$

式中的  $\sigma$  和  $r_i (i = 1, 2, \dots, n)$  均应满足 (23)、(24) 式的临界条件.

### 三、算例和讨论

本文以  $[0_2/90_m]_s$ 、 $[0_4/90_m]_s$  碳 / 环氧及  $[0_4/90_m]_s$  玻璃 / 环氧叠层板为例进

行计算. 碳纤维 (T300) 的性能取自文献 [18]:  $\beta = 7.68, l = 25\text{mm}$  的纤维的平均强度  $\bar{\sigma}_f = 2.8\text{GPa}$ (由  $\bar{\sigma}_f = (\alpha l)^{-1/\beta} \Gamma(1 + 1/\beta)$  算出  $\alpha$ ), 拉伸模量  $E = 230\text{GPa}, t = 7\mu\text{m}$ . E-玻璃纤维的性能取自文献 [16]:  $\beta = 8.2, l = 50\text{mm}$  的纤维的 Weibull 特征参数 (以应变表示的) 为  $\bar{\epsilon}_f = 0.027$ (以应力表示的特征参数则为  $\bar{\sigma}_f = E\bar{\epsilon}_f$ , 再由  $\bar{\sigma}_f = (\alpha l)^{-1/\beta}$  算出  $\alpha$ ),  $E = 73\text{GPa}, t = 10\mu\text{m}$ . 基体 (环氧) 性能取自文献 [18]: 拉伸模量  $E_m = 3.45\text{GPa}, \tau_s = 25\text{MPa}$ .  $V_f = 0.62 \pm 0.02$  的碳 / 环氧及  $V_f = 0.55 \pm 0.05$  的玻璃 / 环氧单层的各种性能取自文献 [19], 见下表. 表中,  $\alpha_L$  和  $\alpha_T$  分别为单层板的纵、横向有效热膨胀系数,  $\nu_{LT}$  为泊松比,  $\Delta T$  为温差. 设试样长度  $L = 100\text{mm}$ , 宽度  $W = 10\text{mm}$ . 单层中的纤维总数由  $N = W/d$  算出, 其中  $d$  由  $V_f = A/(dh)$  算出. 这里取  $V_f = 0.62$ (碳 / 环氧) 及  $V_f = 0.55$ (玻璃 / 环氧) 计算.

表 1 复合材料单层性能  
Table 1 Lamina properties of composites

Materials	$E_L$ (GPa)	$E_T$ (GPa)	$\nu_{LT}$	$\alpha_L$ ( $1/^\circ\text{C}$ )	$\alpha_T$ ( $1/^\circ\text{C}$ )	$\Delta T$ ( $^\circ\text{C}$ )
Graphite/epoxy (T300/5208)	138	11.7	0.29	$0.09 \times 10^{-6}$	$28.8 \times 10^{-6}$	-147
Glass/epoxy	41.7	13.0	0.30	$7.43 \times 10^{-6}$	$22.4 \times 10^{-6}$	-100

设  $0^\circ$  和  $90^\circ$  层之间传递剪应力的树脂薄层的厚度  $d_0$  近似等于纤维间距  $d$  ( $d_0$  是很难精确确定的, 文献 [6,17] 凭经验取  $d_0$  为纤维下直径的两倍, 考虑到本文采用的是细观分析, 并假设各层纤维均按图 1(c) 所示的理想方式排列, 故取  $d_0 \approx d$  是适宜的), 由 (4) 至 (9) 式可求得在统计分析中所需的全部应力集中因子. 然后, 由前述的统计分析可求得叠层最终破坏时  $0^\circ$  层中的远场纤维应力  $\sigma_{fu}^0$ , 结果见图 4(a), 再由混合法则得到叠层最终破坏时  $0^\circ$  层的应力  $\sigma_{xu}^{0M}$ , 即

$$\sigma_{xu}^{0M} = \sigma_{fu}^0 \left( V_f + \frac{E_m}{E} V_m \right) \quad (V_m = 1 - V_f) \quad (26)$$

复合材料叠层板的强度与固化残余应力有关, 必须加以考虑. 正交叠层中  $0^\circ$  层的固化残余应力  $\sigma_x^{0T}$  的求解步骤由附录给出, 计算结果见图 4(b). 叠层最终破坏时实际施加在  $0^\circ$  层的应力  $\sigma_x^0$  应由上述两部分叠加得到. 考虑到叠层板在拉伸过程中,  $90^\circ$  层已先于  $0^\circ$  层发生破坏, 至最终破坏时,  $90^\circ$  层的承载能力几乎趋于零 [1], 因此, 正交叠层板的最终拉伸强度  $\bar{\sigma}_x$  可由下式给出 [1]

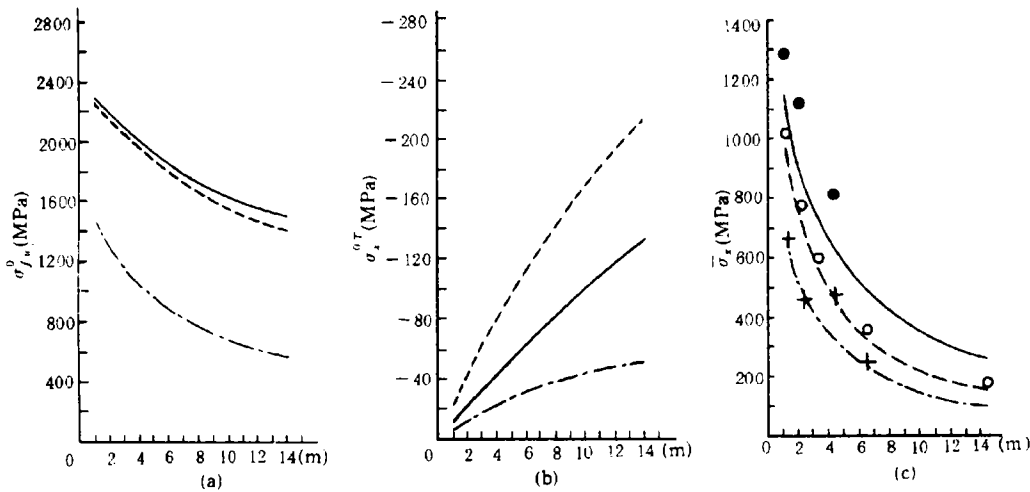
$$\bar{\sigma}_x = \frac{nh}{nh + mh} \sigma_x^0 = \frac{n}{n + m} \sigma_x^0 \quad (27)$$

计算结果示于图 4(c), 图中还给出了文献 [1,17] 的实验结果, 以资比较.

图 4(a) 示出了  $\sigma_{fu}^0$  与  $90^\circ$  层厚度的关系, 这些结果表明, 随着  $90^\circ$  层厚度的增加,  $90^\circ$  层中的基体开裂引起  $0^\circ$  层中的纤维的局部应力集中也增大, 从而导致  $\sigma_{fu}^0$  的降低. 图 4(b) 则表明, 叠层中  $0^\circ$  层的固化残余应力 (绝对值) 随  $90^\circ$  层厚度的增加而增加. 图 4(c) 示出了各种叠层的最终拉伸强度与  $90^\circ$  层厚度的关系, 结果表明, 估计的  $[0_4/90_m]$ , 碳 / 环氧叠层板的强度比实验值低一些,  $[0_2/90_m]$ , 碳 / 环氧的强



度与实验值较接近，而  $[0_4/90_m]_s$  玻璃 / 环氧的强度与实验值相当吻合，仅在  $m = 4$  时有差异，这是由于玻璃 / 环氧叠层板受拉伸时，有些试样会发生层间分层或径向劈裂（对碳 / 环氧试样则未观察到此种现象），导致某些实验数据分散<sup>[1]</sup>。从图 4(c) 还可看到，本文的理论统计强度与实验结果不仅在数值上较相符，而且随  $m$  的变化具有一致的规律性。这就证实了本文分析模型的合理性和可靠性。



(a) 正交叠层最终破坏时  $0^\circ$  层的远场纤维应力；  
 (a) Ultimate far-field fiber stresses in  $0^\circ$  layers in crossply laminates  
 (b) 正交叠层中  $0^\circ$  层的固化残余应力；  
 (b) Thermal residual stresses in  $0^\circ$  layers in cross-ply laminates  
 (c) 正交叠层的最终拉伸强度  
 (c) Ultimate failure strengths of cross-ply laminates

图 4 本文计算结果和文献 [1,17] 的实验结果

Fig.4 The present theoretical results and the experimental results of Refs [1,17]

- ①  $[0_2/90_m]_s$  碳 / 环氧叠层 (graphite/epoxy laminates) --- present theory, o experiments<sup>[17]</sup>.
- ②  $[0_4/90_m]_s$  碳 / 环氧叠层 (graphite/epoxy laminates) ——— present theory, ● experiments<sup>[1]</sup>.
- ③  $[0_4/90_m]_s$  玻璃 / 环氧叠层 (glass/epoxy laminates) - - - present theory, + experiments<sup>[1]</sup>.

本文在统计分析中，初步考虑了正交叠层板中  $0^\circ$  层纤维断裂前基体的就位特性 (如基体“发白”和龟裂) 及纤维 / 基体界面的破坏 (本文对逐渐扩大无效长度的定义可计及这些因素)，着重考虑了  $90^\circ$  层的基体开裂主  $0^\circ$  层纤维的累积断裂产生的应力集中及其对破坏过程的影响。计算结果表明，对于  $[0_4/90_m]_s$  碳 / 环氧和玻璃 / 环氧叠层板，各  $0^\circ$  单层中形成随机临界核的纤维临界断裂数为： $r_4 = 5$ 、 $r_3 = 3$ 、 $r_2 = 2$ 、 $r_1 = 1$ ；对于  $[0_2/90_m]_s$  碳 / 环氧： $r_2 = 5$ 、 $r_1 = 0$  (表层发生失稳破坏)。这表明，叠层板的最终破坏起始于  $90^\circ$  层相邻的  $0^\circ$  单层的纤维断裂，各  $0^\circ$  单层由里向外发生逐步破坏，最终导致失稳破坏。

#### 四、结 语

1. 本文提出修正的剪滞分析方法，是一种用于求解正交叠层板细观应力重新分布的便利方法。

2. 本文应用随机临界核统计模型，首次对正交叠层板的最终拉伸破坏进行了细观统计分析，所得的理论统计强度与实验值有较好的吻合。

正交叠层板的最终拉伸强度随 90° 层的厚度增加而降低, 随 0° 层厚度的增加而增加. 并由 0° 层的纤维断裂所控制.

4. 本文分析模型接近实际, 物理概念清晰, 并可进一步推广和应用.

### 参 考 文 献

- 1 Bailey JE, et al. Proc R Soc, London, 1979, A366: 599-623
- 2 Parvizi A, et al. *J Mater Sci*, 1978, 13: 195-201
- 3 Garrett KW and Bailey JE. *ibid*, 1977, 12: 157-168
- 4 Parvizi A and Bailey JE. *ibid*, 1978, 13: 2131-2136
- 5 Manders PW, et al. *ibid*, 1980, 18: 2876-2889
- 6 Fukanaga H, et al. *J Comp Mater*, 1984, 18: 339-356
- 7 Peters PWM and Chou TW. *Composites*, 1987, 18: 40-46
- 8 Laws N and Dvorak GJ. *J Comp Mater*, 1988, 22: 900-915
- 9 Reifsnider KL, et al. *Mechanics of Composite Materials, Recent Advances*, ed. Hashin Z, et al. Pergamon Press, New York, 1983: 399-420
- 10 Fan FQ and Zeng QD. Proc of Inter Symp on Comp Mater and Struc, Beijing, 1986, 465-470; Science in China, Series A, 1994, 37(1)
- 11 Rosen BW. *AIAA J*, 1964, 2: 1985-1991
- 12 Zeng QD, Fan FQ and Zhang YY. *Comp Sci Tech*, 1993, 49: 341-348
- 13 Zeng QD and Fan FQ. Proc of 2nd Inter Symp on Comp Mater and Struc, Beijing, 1992: 455-460
- 14 Hedgepeth JM. NASA TN D-882, 1961
- 15 Zweben C. *Eng Fract Mech*, 1974, 6: 1-10
- 16 Fariborz SJ, et al. *J Comp Mater*, 1987, 21: 856-875
- 17 Peters PWM. The strength of 0/90 graphite-epoxy laminates with cracked 90°-layers. Poster paper presented at Conf.: Testing, Evaluation and Quality Control of Composites, Univ of Surrey, Guildford, UK, Sept 13-14, 1983
- 18 Tsai SW and Hahn HT. *Introduction to Composite Materials*. Technomic Publishing Co, Inc 1980
- 19 Tan SC and Nuismer RJ. *J Comp Mater*, 1989, 23: 1029-1047

### 附录: 固化残余应力求解

正交叠层板的固化残余应力可由经典叠层板理论求得, 本构关系 (仅给出 0° 层) 为

$$\sigma_x^{0T} = Q_{11}(\epsilon_x^T - \alpha_1 \Delta T) + Q_{12}(\epsilon_y^T - \alpha_2 \Delta T) \quad (A1)$$

式中, 上标 0 代表 0° 层,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别表示沿纤维方向和垂直纤维方向的有效热膨胀系数,  $Q_{ij}$  为折算刚度, 而

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^T \\ \epsilon_y^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} p_1^T \\ p_2^T \end{Bmatrix} \quad (A2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} p_1^T &= \{(Q_{11}\bar{b} + Q_{12}\bar{d})\alpha_1 + (Q_{12}\bar{b} + Q_{22}\bar{d})\alpha_2\} \Delta T \\ p_2^T &= \{(Q_{12}\bar{b} + Q_{11}\bar{d})\alpha_1 + (Q_{22}\bar{b} + Q_{12}\bar{d})\alpha_2\} \Delta T \\ A_{11} &= Q_{11}\bar{b} + Q_{22}\bar{d}, \quad A_{12} = Q_{12}(\bar{b} + \bar{d}) \\ A_{22} &= Q_{22}\bar{b} + Q_{11}\bar{d}, \quad \bar{b} = nh, \quad \bar{d} = mh \end{aligned} \right\} \quad (A3)$$

## MICRO-STATISTICAL ANALYSIS OF ULTIMATE TENSILE STRENGTH OF CROSSPLY LAMINATES

Zeng Qingdun    Ma Rui    Fan Fuqun

(*Department of Engineering Mechanics, South China University of  
Technology, Guangzhou 510641, China*)

**Abstract** This paper investigates the ultimate failure behavior of  $[0/90/0]$  crossply laminates under uniaxial tension. A modified shear-lag model is first proposed for solving the stress redistributions due to both the failure of the  $90^\circ$  ply and the breakage of some fibers in the  $0^\circ$  plies. Next, the random critical-core probability model is used to analyze microscopically the ultimate failure of crossply laminates. The predictions of the ultimate failure strength of  $[0_2/90_m]_s$  and  $[0_4/90_m]_s$  graphite epoxy and  $[0_4/90_m]_s$  glass epoxy laminates are compared with the existing experimental results, and reasonable agreements have been obtained.

**Key words** crossply laminates, ultimate failure, shear-lag analysis, random critical-core, failure probability