

# 界面裂纹尖端有限变形 弹性场的渐近分析

杜善义 石志飞

(哈尔滨工业大学复合材料研究所, 哈尔滨 150006)

**摘要** 采用完全非线性弹性理论, 研究了一类新的可压缩超弹性材料形成的界面裂纹问题, 给出了平面应变条件下裂尖场的渐近解. 揭示了界面裂纹尖端场的变形特征.

**关键词** 界面裂纹, 有限变形, 渐近解

## 引 言

自从 50 年代末, Williams<sup>[1]</sup> 发现在各向同性双材料界面裂纹尖端, 应力存在振荡奇异性以来, 界面裂纹问题已成为非常困难而又有趣的问题. 由于难度较大, 在初期研究阶段, 尽管方法各有差异, 但仍局限在弹性范围内<sup>[2,3]</sup>, 因而, 振荡奇异性问题仍未能得到解决. 这就预示着在裂纹表面要出现皱折和重叠.

研究者们曾采用过各种途径来消除此奇异性. Comninou<sup>[4]</sup> 等人假设在靠近裂尖处有一小接触区出现了剪切滑移, Achenbach<sup>[5]</sup> 假设在裂尖存在小范围屈服. 所有这些研究, 均认为产生奇异性的原因是理想的边界条件.

为了解决上述问题, Knowles-Sternberg<sup>[6]</sup> 采用完全非线性弹性理论研究了该问题, 指出了裂尖处的重叠遍及范围  $\delta(\delta/l < 4 \times 10^{-8}, l$  为裂纹半长), 并得出了由两种不同的不可压缩材料形成的界面裂纹的极限情况, 即无限小变形弹性理论导致的奇异性在平面应变条件下不复存在, 但在平面应力条件下, 振荡特性仍存在的结论. Herrmann<sup>[7]</sup> 针对 Knowles-Sternberg 型应变能函数, 研究了平面应变条件下界面裂纹尖端场特性, 通过对变形进行渐近分析, 确定了满足可压缩超弹性体非线性平衡的理论解. 指出, 即使几何和外部荷载条件给定时, 界面裂纹尖端场也仍将有多种存在形式.

本文采用完全非线性弹性理论, 在平面应变条件下, 研究了由文 [8] 中建议的一类新的可压缩超弹性材料生成的界面裂纹尖端场问题, 并与文 [7] 结果进行了比较, 指出了它们之间的关系.

## 一、平面有限变形弹性理论

### 考虑平面变形

本文于 1992 年 11 月 17 日收到第一稿, 1993 年 7 月 28 日收到修改稿.

$$y_\alpha = y_\alpha(x_1, x_2) = x_\alpha + u_\alpha(x_1, x_2), \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1.1)$$

其中  $(x_1, x_2)$  为物体变形前横截面  $\mathcal{D}$  上的典型点,  $(y_1, y_2)$  位于  $\mathcal{D}$  的象平面  $\mathcal{D}^*$  上,  $u_\alpha$  为典型点的位移分量. 用  $\mathbf{F}$  代表变形梯度张量, 其分量为

$$F_{\alpha\beta} = y_{\alpha,\beta} \quad \text{在 } \mathcal{D} \text{ 上} \quad (1.2)$$

用  $I$  和  $J$  代表变形张量的两个不变量, 定义为

$$I = F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad J = \det \mathbf{F} = F_{11}F_{22} \quad (1.3)$$

用  $\boldsymbol{\tau}$  代表二维 Cauchy 应力张量, 在不计体积力的情况下, 平衡方程可表示为

$$\tau_{\alpha\beta,\beta} = 0, \quad \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} \quad \text{在 } \mathcal{D}^* \text{ 上} \quad (1.4)$$

通过关系

$$\boldsymbol{\sigma} = J\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (1.5)$$

(其中  $\mathbf{F}^{-T}$  为  $\mathbf{F}$  逆的转置) 引进 Piola 应力张量, 其特点是, 如用  $\Gamma$  表示  $\mathcal{D}$  上的任一正则曲线, 而用  $\Gamma^*$  代表  $\Gamma$  经变形 (1.1) 后的象, 用  $\mathbf{n}$  和  $\mathbf{n}^*$  分别代表  $\Gamma$  和  $\Gamma^*$  的单位外法矢量, 用  $\mathbf{S}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}\mathbf{n}_\beta$  和  $\mathbf{t}_\alpha = \tau_{\alpha\beta}\mathbf{n}_\beta^*$  分别代表  $\Gamma$  和  $\Gamma^*$  上的力矢量, 则有

$$\mathbf{S}_\alpha = 0 \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上, 当且仅当, } \mathbf{t}_\alpha = 0 \text{ 在 } \Gamma^* \text{ 上}$$

因此, 用 Piola 应力张量很容易描述自由表面应力边界条件.

对于均匀的、各向同性的可压缩超弹性材料, 文献 [8] 引入了一类新的应变能密度

$$W = a[(I/K^{1/3})^n - 3^n] + b(K-1)^m K^{-l} \quad (1.6)$$

其中  $a$ 、 $b$  称为弹性常数,  $m$ 、 $n$ 、 $l$  为材料常数,  $K = J^2$ .

相应于 (1.6), Cauchy 应力张量和 Piola 应力张量分别为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & 2naI^{n-1}K^{-1/2-n/3}(\mathbf{d} - \frac{I}{3}\mathbf{E}) \\ & + 2b(K-1)^{m-1}K^{-l-1/2}[(m-l)K+l]\mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\frac{\partial W}{\partial I}\mathbf{F} + \frac{\partial W}{\partial J} \begin{bmatrix} F_{22} & -F_{21} \\ -F_{12} & F_{11} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

其中  $\mathbf{d} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$  为 Cauchy 变形张量,  $\mathbf{E}$  为单位张量. 用 Piola 应力张量表示的平衡方程为

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0, \quad \text{在 } \mathcal{D} \text{ 上} \quad (1.9)$$

## 二、上、下半平面内裂尖场的独立渐近解

考虑由两块半无限大弹性体形成的界面裂纹, 如图 1 所示, 弹性体变形前分别

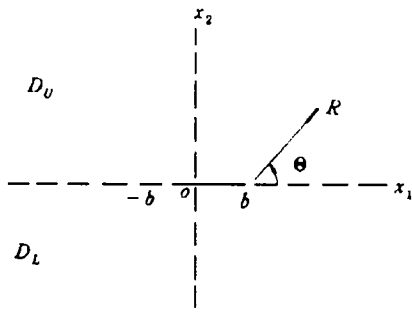


图 1 界面裂纹  
Fig.1 Interface-crack

占有上、下半平面  $D_U$  和  $D_L$ ,  $(x_1, x_2)$  代表物质坐标空间的笛卡尔坐标系, 两弹性体沿  $x_1$  轴相连并形成一长为  $2b$  的界面裂纹. 上半平面的弹性体具有应变能密度  $W_U$ , 下半平面的弹性体具有应变能密度  $W_L$ , 简记为  $W_\gamma (\gamma = U, L)$ . 在界面上, 有变形连续条件和应力连续条件, 分别为

$$y_\alpha(x_1, 0+) = y_\alpha(x_1, 0-) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{\alpha 2}(x_1, 0+) = \sigma_{\alpha 2}(x_1, 0-) \text{ 对 } |x_1| > b \quad (2.2)$$

在界面裂纹表面, 有自由表面应力边界条件

$$\sigma_{\alpha 2}(x_1, 0+) = 0, \quad \sigma_{\alpha 2}(x_1, 0-) = 0, \quad -b < x_1 < b \quad (2.3)$$

假设在界面裂纹尖端, 变形具有下列渐近形式

$$\left. \begin{aligned} y_1 = x_1 + u_1(x_1, x_2) &= b + R^{m_1^\gamma} v_1(\theta) + O(R^{m_1^\gamma}) \\ y_2 = x_2 + u_2(x_1, x_2) &= R^{m_2^\gamma} v_2(\theta) + O(R^{m_2^\gamma}) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中  $m_1^\gamma, m_2^\gamma$  为常数, 且在上、下半平面上可以各不相同. 对于  $\theta \in [0+, \pi]$ ,  $v_\alpha(\theta)$  定义在上半平面,  $m_\alpha^\gamma = m_\alpha^U$ ; 对于  $\theta \in [-\pi, 0-]$ ,  $v_\alpha(\theta)$  定义在下半平面,  $m_\alpha^\gamma = m_\alpha^L$ .

在下面的分析中, 除非必要, 将去掉依赖于上、下半平面的角标  $U$  和  $L$ , 并用渐近符号 “ $\sim$ ” 代表具有相同阶的奇异性.

借助于 (1.2) 和 (2.4), 可得变形梯度张量的分量

$$\left. \begin{aligned} F_{11} &\sim R^{m_1-1}(m_1 v_1 \cos \theta - \dot{v}_1 \sin \theta) \\ F_{12} &\sim R^{m_1-1}(m_1 v_1 \sin \theta + \dot{v}_1 \cos \theta) \\ F_{21} &\sim R^{m_2-1}(m_2 v_2 \cos \theta - \dot{v}_2 \sin \theta) \\ F_{22} &\sim R^{m_2-1}(m_2 v_2 \sin \theta + \dot{v}_2 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

由 (1.3) 和 (2.5), 可得变形张量的不变量

$$I \sim R^{2(m_1-1)} p_1(\theta) + R^{2(m_2-1)} p_2(\theta) \quad (2.6)$$

$$J \sim q R^{m_1+m_2-2}, \quad K = J^2 \sim q^2 R^{2(m_1+m_2-2)} \quad (2.7)$$

其中

$$p_\alpha(\theta) = m_\alpha^2 v_\alpha^2(\theta) + \dot{v}_\alpha^2(\theta), \quad q = m_1 v_1 \dot{v}_2 - m_2 v_2 \dot{v}_1 \quad (2.8)$$

不难证明,  $m_1$ 、 $m_2$  的可能选择为  
 $m_1, m_2 > 0$ ,  $0 < m_1 < 1$  或  $0 < m_2 < 1$   
 并且只有当  $m_1$ 、 $m_2$  满足

$$0 < m_2 < 1, \quad m_2 < m_1 \quad (2.9)$$

时, 界面裂纹在变形后将完全张开, 如图 2 所示.

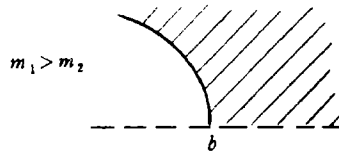


图 2 界面裂纹的渐近形状

Fig.2 Asymptotic shape of interface-crack

考虑到 (2.9), (2.6) 式简化为

$$I \sim R^{2(m_2-1)} p_2(\theta) \quad (2.10)$$

进一步假设  $m_1 + m_2 - 2 < 0$ , 则在  $R \ll 1$  时,  $J, K \gg 1$ . 由 (1.6) 可求得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial I} &= a n p_2^{n-1} q^{-2n/3} R^{2(n-1)(m_2-1)-2n(m_1+m_2-2)/3} \\ \frac{\partial W}{\partial J} &= 2q R^{m_1+m_2-2} \left[ -\frac{na}{3} p_2^n q^{-2(n/3+1)} R^{2n(m_2-1)-2(n/3+1)(m_1+m_2-2)} \right. \\ &\quad \left. + s b q^{2(s-1)} R^{2(s-1)(m_1+m_2-2)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

其中  $s = m - l > 0$ . Cauchy 应力张量 (1.7) 式成为

$$\begin{aligned} \tau &= 2na I^{n-1} K^{-n/3-1/2} \left( \mathbf{d} - \frac{I}{3} \mathbf{E} \right) + 2sb K^{s-1/2} \mathbf{E} \\ &= 2na R^{2(n-1)(m_2-1)-(m_1+m_2-2)(1+2n/3)+2(m_2-1)} p_2^{n-1} q^{-(1+2n/3)} \\ &\quad \cdot \left( \tilde{\mathbf{d}} - \frac{p_2}{3} \mathbf{E} \right) + 2sb R^{2(s-1)(m_1+m_2-2)} q^{2s-1} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{d}} = p_1 R^{2(m_1-m_2)} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + (m_1 m_2 v_1 v_2 + \dot{v}_1 \dot{v}_2) R^{m_1-m_2} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)$$

而  $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$  分别为沿  $y_1$ 、 $y_2$  方向的单位基矢量. 由 (2.12) 比较奇异性可知

$$2n(m_2 - 1) - (m_1 + m_2 - 2)(1 + 2n/3) = (2s - 1)(m_1 + m_2 - 2)$$

由上式可解得

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 - 2 &= \frac{3n(m_2 - 1)}{3s + n} < 0 \\ m_1 &= (6s - n)/(3s + n) + (2n - 3s)m_2/(3s + n) \end{aligned} \quad (2.13)$$

由  $m_1 > m_2$  可知

$$6s > n \quad (2.14)$$

这样, (2.11) 成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial I} &= \frac{\omega_2(\theta)}{2} R^{(6sn-6s-2n)(m_2-1)/(3s+n)} \\ \frac{\partial W}{\partial J} &= \omega_1(\theta) R^{3n(2s-1)(m_2-1)/(3s+n)} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(\theta) &= -\frac{2na}{3} p_2^n q^{-2n/3-1} + 2sbq^{2s-1} \\ \omega_2(\theta) &= 2nap_2^{n-1} q^{-2n/3} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

考虑到 (2.14), 由 (1.8)、(2.5) 和 (2.15) 可求得 Piola 应力张量, 其分量如下

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \omega_1(m_2 v_2 \sin \theta + \dot{v}_2 \cos \theta) R^{(6sn+3s-2n)(m_2-1)/(3s+n)} \\ \sigma_{12} &= -\omega_1(m_2 v_2 \cos \theta - \dot{v}_2 \sin \theta) R^{(6sn+3s-2n)(m_2-1)/(3s+n)} \\ \sigma_{21} &= [\omega_2(m_2 v_2 \cos \theta - \dot{v}_2 \sin \theta) - \omega_1(m_1 v_1 \sin \theta \\ &\quad + \dot{v}_1 \cos \theta)] \cdot R^{(6sn-3s-n)(m_2-1)/(3s+n)} \\ \sigma_{22} &= [\omega_2(m_2 v_2 \sin \theta + \dot{v}_2 \cos \theta) + \omega_1(m_1 v_1 \cos \theta \\ &\quad - \dot{v}_1 \sin \theta)] \cdot R^{(6sn-3s-n)(m_2-1)/(3s+n)} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

考虑到

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= b + R \cos \theta \\ x_2 &= R \sin \theta \\ \frac{\partial R}{\partial x_1} &= \cos \theta \\ \frac{\partial R}{\partial x_2} &= \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} R &= [(x_1 - b)^2 + x_2^2]^{1/2} \\ \theta &= \arctg x_2 / (x_1 - b) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= -\sin \theta / R \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= \cos \theta / R \end{aligned} \right.$$

由平衡方程 (1.9), 即

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

可得关于  $v_1(\theta)$  和  $v_2(\theta)$  的一组常微分方程

$$\left. \begin{aligned} (6sn - 3n)(1 - m_2)/(3s + n)\omega_1 \dot{v}_2 + m_2 \dot{\omega}_1 v_2 &= 0 \\ [(6sn - 3s - n)(m_2 - 1)/(3s + n) + 1](m_2 v_2 \omega_2 - \omega_1 \dot{v}_1) + (\omega_2 \dot{v}_2)^* + m_1 (\omega_1 v_1)^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

对于  $[0, \pi]$  上任何  $v_2 \neq 0$  的区域, 积分 (2.18)<sub>1</sub> 可得

$$\omega_1 |v_2|^\alpha = C_0$$

其中  $\alpha = (6sn - 3n)(1 - m_2)/[m_2(3s + n)]$ ,  $C_0$  为任意常数.

由界面裂纹自由表面应力边界条件  $\sigma_{12}(x_1, 0+) = 0$  得  $\omega_1(\pi) = 0$  或  $v_2(\pi) = 0$ . 由于  $v_2$  在  $[0, \pi]$  上不恒为零, 以及  $\omega_1$  和  $v_2$  的连续性, 可得

$$\omega_1 \equiv 0 \quad \text{在 } \theta \in [0, \pi] \quad (2.19)$$

这样, 由  $\sigma_{22}(x_1, 0+) = 0$  可得另一边界条件

$$\dot{v}_2(\pi) = 0 \quad (2.20)$$

由  $\omega_1 \equiv 0$  可求得

$$q = \left(\frac{na}{3sb}\right)^{3/[2(3s+n)]} p_2^{3n/[2(3s+n)]} \quad (2.21)$$

$\omega_2(\theta)$  成为

$$\omega_2 = 2na \left(\frac{na}{3sb}\right)^{-n/(3s+n)} p_2^{(3sn-3s-n)/(3s+n)} \quad (2.22)$$

由 (2.19)、(2.22) 可将 (2.18)<sub>2</sub> 简化为

$$\left(p_2^{\lambda/2-1} \dot{v}_2\right)' + [(\lambda-1)(m_2-1) + 1] m_2^{m_2} p_2^{\lambda/2-1} v_2 = 0 \quad (2.23)$$

其中

$$\lambda = 6sn/(3s+n) \quad (2.24)$$

称为材料因子. (2.23) 式与文献 [7] 中的 (2.31) 式具有类似的形式, 且材料因子  $\lambda$  等同于文 [7] 中材料常数  $n$  的两倍. 通过变换

$$m_2 v_2(\theta) = \xi(\theta) \cos \psi(\theta), \quad \dot{v}_2(\theta) = \xi(\theta) \sin \psi(\theta) \quad (2.25)$$

(2.23) 式可化为

$$\dot{\psi} = -\frac{[(\lambda-1)m_2 + (2-\lambda)\cos^2 \psi]}{\lambda/2 - (\lambda/2 - 1)\cos 2\psi} \quad (2.26)$$

相应于  $m_2$  的不同取值, (2.26) 式具有三种可能解

$$(A) \quad \frac{\lambda-2}{\lambda-1} < m_2 < 1$$

此时  $\psi$  严格递减, 在不失一般性的情况下设

$$\psi(\pi) = 0 \quad (2.27)$$

由 (2.26) 可得

$$\pi - \theta = \psi - \frac{m_2 - 1}{m_2} \text{ktg}^{-1}[\text{ktg} \psi], \quad k = \left[\frac{m_2(\lambda-1)}{(m_2-1)(\lambda-1)+1}\right]^{1/2} \quad (2.28)$$

将  $\theta$  认作为  $\psi$  的函数, 由 (2.25) 和 (2.28) 可得

$$v_2(\psi) = C \cos \psi \left| 1 - \frac{\lambda-2}{m_2(\lambda-1)} \cos^2 \psi \right|^{(m_2-1)/2}, \quad \theta \in [0, \pi] \quad (2.29)$$

我们感兴趣的是, 在  $\theta = 0$  处,  $v_2$  能否为零. 由 (2.29) 知,  $v_2(\psi)|_{\theta=0} = 0$ , 当且仅当  $\psi|_{\theta=0} = \pi/2$ . 而由 (2.28) 可见, 只要取  $m_2 = 1 - 1/\lambda$ , 则  $\psi|_{\theta=0} = \pi/2$ . 此外, 还可求得

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_2^\tau \left[ C_1 + \frac{1}{m_2} \left( \frac{na}{3sb} \right)^{3/[2(3s+n)]} \int_\theta^\pi p_2^{3n/[2(3s+n)]} v_2^{-\tau-1} d\theta \right] \\ v_1(0) &= \frac{1}{m_1} \left( \frac{na}{3sb} \right)^{3/[2(3s+n)]} p_2^{3n/[2(3s+n)]} v_2^{-1} \Big|_{\theta=0} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

此处,  $\tau = m_1/m_2$ .

$$(B) \quad m_2 = \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}$$

此时, 微分方程 (2.23) 成为  $(p_2^{\lambda/2-1} \dot{v}_2)^\bullet = 0$ , 由于  $p_2 > 0$ ,  $\dot{v}_2(\pi) = 0$ , 因此在  $\theta \in [0, \pi]$  上,  $\dot{v}_2 \equiv 0$ . 由于假设裂纹面完全张开, 故有

$$v_2(\theta) \equiv v_2(\pi) > 0 \quad (2.31)$$

$$v_1(\theta) = -\frac{1}{m_\tau v_2(\pi)} \left[ \frac{na}{3sb} m_2^{2n} v_2^{2n}(\pi) \right]^{3/[2(3s+n)]} \theta + v_1(0+) \quad (2.32)$$

$$(C) \quad 0 < m_2 < \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}$$

记  $\psi_1 = \arccos\left(\left[\frac{\lambda-1}{\lambda-2} m_2\right]^{1/2}\right)$ , 则当  $\psi = \psi_1 + j\pi$ ,  $-\psi_1 + j\pi$  时,  $\dot{\psi} = 0$ , 其中  $j$  为任意整数. 在  $\dot{\psi}$  非零的区域上积分 (2.26) 式, 有

$$\theta_0 - \theta = \psi - \psi_0 + \frac{m_2 - 1}{2m_2\delta} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}t - \delta}{\operatorname{tg}t + \delta} \right|_{t=\psi}^{t=\psi_0} \quad (2.33)$$

其中  $\delta^2 = \frac{[\lambda - 2 - m_2(\lambda - 1)]}{m_2(\lambda - 1)}$ , 或  $\delta = \operatorname{tg}\psi_1$

不失一般性, 设  $\psi(\pi) = 0$ , 则 (2.33) 式成为

$$\pi - \theta = \psi + \frac{1 - m_2}{2m_2\delta} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\psi - \delta}{\operatorname{tg}\psi + \delta} \right| \quad (2.34)$$

且有  $-\pi/2 < -\psi_1 < \psi(0) < \psi(\pi) = 0$

在  $\theta = 0$  处有

$$\pi = \psi(0) + \frac{1 - m_2}{2m_2\delta} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\psi(0) - \delta}{\operatorname{tg}\psi(0) + \delta} \right| \quad (2.35)$$

$v_1$ ,  $v_2$ ,  $p_2$  和  $q$  作为  $\psi$  的函数, 形式上与 (A) 中各式完全相同.

用同样的方法可求得下半平面内裂纹尖端场的渐近解. 此时, 自由表面裂纹边界条件为

$$\omega_1(-\pi) = 0, \quad \dot{v}_2(-\pi) = 0 \quad (2.36)$$

而  $I$ 、 $I$ 、 $\frac{\partial W}{\partial I}$ 、 $\frac{\partial W}{\partial J}$ 、 $\sigma$  以及平衡方程的形式与上半平面中对应各式完全一致.

对 (A),  $\frac{\lambda-2}{\lambda-1} < m_2 < 1$ , 取  $\psi(-\pi) = 0$ , 有

$$\begin{aligned} -\pi - \theta &= \psi + \frac{1-m_2}{m_2} \text{ktg}^{-1}(\text{ktg}\psi) \\ \psi(0-) &= -\frac{\pi}{2}, \quad v_2(0-) = 0, \quad m_2 = 1 - 1/\lambda \\ v_2(\psi) &= C \cos \psi \left| 1 - \frac{\lambda-2}{m_2(\lambda-1)} \cos^2 \psi \right|^{(m_2-1)/2} \\ v_1(\psi) &= |v_2|^\tau \left[ C_1 + \frac{1}{m_2} \left( \frac{na}{3sb} \right)^{3/[2(3s+n)]} \int_{-\pi}^{\theta} p_2^{3n/[2(3s+n)]} |v_2|^{-\tau-1} d\theta \right] \end{aligned}$$

对 (B),  $m_2 = \frac{\lambda-2}{\lambda-1}$

$$\begin{aligned} v_2 &= v_2(-\pi) < 0 \\ v_1 &= \frac{1}{m_2 |v_2(-\pi)|} \left[ \frac{na}{3sb} m_2^{2n} v_2^{2n}(-\pi) \right]^{3/[2(3s+n)]} \theta + v_1(0-) \end{aligned}$$

对 (C),  $0 < m_2 < \frac{\lambda-2}{\lambda-1}$ , 设  $\psi(-\pi) = 0$ , 有

$$\begin{aligned} -\pi - \theta &= \psi + \frac{1-m_2}{2m_2\delta} \ln \left| \frac{\text{tg}\psi - \delta}{\text{tg}\psi + \delta} \right| \\ v_2(\psi) &= C \cos \psi \left| 1 - \frac{\lambda-2}{m_2(\lambda-1)} \cos^2 \psi \right|^{(m_2-1)/2} \end{aligned}$$

### 三、界面裂纹尖端的一阶渐近场

前面的分析指出,  $v_2$  的非零解依赖于  $m_2$  的不同取值

$$(A) \frac{\lambda-2}{\lambda-1} < m_2 < 1, \quad (B) m_2 = \frac{\lambda-2}{\lambda-1}, \quad (C) 0 < m_2 < \frac{\lambda-2}{\lambda-1}$$

通过上、下半平面中解的合理搭配, 可以构造完整的界面裂纹尖端场, 使其满足界面上的变形连续条件和应力平衡条件.

上、下半平面的变形场分别为

$$\begin{aligned} y_1 &\sim b + R^{m_1^U} v_1(\theta), \quad y_2 \sim R^{m_2^U} v_2(\theta), \quad \theta \in [0, \pi] \\ y_1 &\sim b + R^{m_1^L} v_1(\theta), \quad y_2 \sim R^{m_2^L} v_2(\theta), \quad \theta \in [0, -\pi] \end{aligned}$$

变形连续条件要求

$$y_\alpha(x_1, 0+) - y_\alpha(x_1, 0-) = 0, \quad x_1 > b$$

即

$$v_\alpha(0+)R^{m_\alpha^U} - v_\alpha(0-)R^{m_\alpha^L} + O\left(R^{m_\alpha^U}\right) + O\left(R^{m_\alpha^L}\right) = 0$$



在渐近条件下, 上式等价于

$$\left. \begin{aligned} v_\alpha(0+) &= 0, & \text{当 } m_\alpha^U < m_\alpha^L \\ v_\alpha(0+) &= v_\alpha(0-), & \text{当 } m_\alpha^U = m_\alpha^L \\ v_\alpha(0-) &= 0, & \text{当 } m_\alpha^L < m_\alpha^U \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

由于  $\omega_1$  在上、下半平面内均恒为零, 由 (2.17) 式可见,  $\sigma_{12}$  在界面上的连续性已满足.  $\sigma_{22}$  在界面上取值为

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x_1, 0\pm) &\sim \omega_2 \dot{v}_2 R^{(\lambda^\gamma-1)(m_2^\gamma-1)} \Big|_{\theta=0\pm} \\ &= 2n_\gamma a_\gamma p_2^{n_\gamma-1} q^{-2n_\gamma/3} \dot{v}_2 R^{(\lambda^\gamma-1)(m_2^\gamma-1)} \Big|_{\theta=0\pm} \end{aligned}$$

首先考虑  $(\lambda^U - 1)(m_2^U - 1) < (\lambda^L - 1)(m_2^L - 1)$  时的情形, 此时,  $\sigma_{22}$  在界面上的连续性要求

$$\sigma_{22}(x_1, 0+) = 0 \left[ R^{(\lambda^L-1)(m_2^L-1)} \right]$$

即  $\dot{v}_2(0+) = 0$ . 由前面的分析可知, 只有当  $m_2^U = \frac{\lambda^U - 2}{\lambda^U - 1}$  时,  $v_2 = v_2(\pi) = \text{const.}$ , 才满足这个条件. 此时由  $\lambda^U > 2$  并且  $(\lambda^U - 1)(m_2^U - 1) < (\lambda^L - 1)(m_2^L - 1)$  可知

$$m_2^L > \frac{\lambda^L - 2}{\lambda^L - 1}$$

若  $m_2^U < m_2^L$ , 则由变形连续条件  $v_2(0+) = 0$ , 这与  $v_2$  在上半平面内不恒为零相矛盾, 因此,  $m_2^U \geq m_2^L$ .

当  $m_2^U > m_2^L$  时, 变形连续条件要求  $v_2(0-) = 0$ , 可见取  $m_2^L = 1 - \frac{1}{\lambda^L}$  时, 这个条件即可得到满足. 考虑到 (2.14) 有

$$\begin{aligned} m_1^U &= 1 + \frac{3s_U - 2n_U}{6s_U n_U - 3s_U - n_U} \\ m_1^L &= 1 + \frac{3s_L - 2n_L}{6s_L n_L} \end{aligned}$$

对于满足

$$\frac{3s_L - 2n_L}{6s_L n_L} > \frac{3s_U - 2n_U}{6s_U n_U - 3s_U - n_U} \quad (3.2)$$

的  $s_\gamma$  和  $n_\gamma$ ,  $m_1^L > m_1^U$ , 变形连续条件要求  $v_1(0+) = 0$ , 这样

$$v_1 = -\frac{1}{m_2^U v_2(\pi)} \left[ \frac{n_U a_U}{3s_U b_U} m_2^{n_U} v_2^{n_U}(\pi) \right]^{3/(3s_U+n_U)} \theta \quad \text{在 } \theta \in [0, \pi]$$

进一步, 当上、下半平面材料常数相同时, 即  $n_U = n_L = n$ ,  $s_U = s_L = s$ , 考虑到  $3s > 2n$  时材料的 Poisson 比为正, (3.2) 式要求

$$\frac{2}{3} < \frac{s}{n} < \frac{1}{6n-3} \quad (1/2 < n < 3/4) \quad (3.3)$$

当  $m_2^U = m_2^L$  时, 变形连续条件要求  $v_2(0+) = v_2(0-)$ , 由于  $v_2(0+) = v_2(\pi) > 0$ , 而  $v_2(0-) = 0$ , 所以  $m_2^U = m_2^L$  不能满足变形连续条件.

当  $(\lambda^U - 1)(m_2^U - 1) > (\lambda^L - 1)(m_2^L - 1)$  时,  $m_2^L = \frac{\lambda^L - 2}{\lambda^L - 1}$ ,  $v_2$  在  $[-\pi, 0]$  上为常数, 分析与上述相类似.

其次考虑  $(\lambda^U - 1)(m_2^U - 1) = (\lambda^L - 1)(m_2^L - 1)$  时的情形. 在界面上  $\sigma_{22}$  的连续性要求

$$\omega_2 \dot{v}_2|_{\theta=0+} = \omega_2 \dot{v}_2|_{\theta=0-} \quad (3.4)$$

若  $\dot{v}_2(0+) = \dot{v}_2(0-) = 0$ , 则  $m_2^U = \frac{\lambda^U - 2}{\lambda^U - 1}$ ,  $m_2^L = \frac{\lambda^L - 2}{\lambda^L - 1}$ , 在  $[0, \pi]$  上,  $v_2 \equiv v_2(\pi) > 0$ , 在  $[-\pi, 0]$  上,  $v_2 \equiv v_2(-\pi) < 0$ , 可见界面上的变形连续条件得不到满足.

此时, 我们感兴趣的是上、下半平面材料的材料常数相同的情形, 即  $n_U = n_L = n$ ,  $s_U = s_L = s$ , 在这种情况下, 有

$$\lambda^U = \lambda^L = \lambda, \quad m_2^U = m_2^L = m_2 = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

$$v_2(0+) = v_2(0-) = 0$$

$$\psi|_{\theta=0+} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi|_{\theta=0-} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\dot{v}_2(0+) = C^U m_2, \quad \dot{v}_2(0-) = -C^L m_2$$

(3.4) 式成为

$$\frac{a_U}{a_L} \left( \frac{a_U b_L}{a_L b_U} \right)^{-n/(3s+n)} = - \left| \frac{C^L}{C^U} \right|^{\lambda-2} \frac{C^L}{C^U} \quad (3.5)$$

由于  $a_U$ 、 $a_L$ 、 $b_U$ 、 $b_L$  以及  $C^U$  均大于零, (3.5) 式要求  $C^L < 0$ .

由 (2.13) 得  $m_1^U = m_1^L = m_1$ , 在界面上  $v_1$  的连续性要求  $v_1(0+) = v_1(0-)$ , 即

$$\left( \frac{a_U b_L}{a_L b_U} \right)^{3/[2(3s+n)]} = - \left| \frac{C^L}{C^U} \right|^{3n/(3s+n)} \frac{C^U}{C^L} \quad (3.6)$$

由 (3.5) 和 (3.6) 可得上、下半平面材料的弹性常数应满足的条件为

$$\frac{a_U}{a_L} = \left( \frac{b_U}{b_L} \right)^{(4n-3)/[3(2s-1)]} \quad (3.7)$$

#### 四、结 论

1. 文献 [8] 引入的一类新的应变能密度 (如 (1.6) 式所示) 中, 包含有  $a$ 、 $b$ 、 $m$ 、 $n$  和  $l$  五个常数, 对于平面应变问题, 实际起作用的只有  $a$ 、 $b$ 、 $n$  和  $s = m - l$  四个常数, 并且材料因子  $\lambda_\gamma = \frac{6s_\gamma n_\gamma}{3s_\gamma + n_\gamma}$  起着主导作用.

2. 文献 [7] 采用的 Knowles-Sternberg 型应变能密度中, 包含有  $A_\gamma$ 、 $B_\gamma$ 、 $C_\gamma$  和  $N_\gamma$  四个常数, 由本文分析可见, K-S 中的  $N_\gamma$  与文献 [8] 中的  $s_\gamma$  和  $n_\gamma$  有着非常

密切的关系,更确切地说,与本文引入的材料因子 $\lambda_\gamma$ 相对应,即在研究界面裂纹尖端场时,若 $\lambda_\gamma = 2N_\gamma$ ,则两个裂尖场的主要特征是一致的.

3. 由于界面裂纹尖端场可能存在有多种渐近形式,本文研究了其中最重要的两种. 根据(2.23)式与文献[7]中(2.31)式的相似性,可以预言,其界面裂纹尖端场的变形图样,与文献[7]中的变形图样是一致的.

### 参 考 文 献

- 1 Williams ML. The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media. *Bull Seismal Soc America*, 1959, 49
- 2 England AH. A Crack Between Dissimilar Media. *J Appl Mech*, 1965, 32
- 3 Willis JR. Fracture Mechanics of Interface Cracks. *J Mech Phys Solids*, 1971, 19
- 4 Comninou M. The Interface Crack. *J Appl Mech*, 1977 (44)
- 5 Achenbach JD, Keer LM, Khetan RP and Chen SH. Loss of Adhesion at the Tip of an Interface Crack. *J Elas*, 1979, 9
- 6 Knowles JK and Sternberg E. Large Deformations Near a Tip of an Interface-Crack Between Two Neo-Hookean Sheets. *J Elas*, 1983, 13
- 7 Hermann JM. An Asymptotic Analysis of Finite Deformations Near the Tip of an Interface-Crack. *J Elas*, 1989, 21
- 8 Gao YC. Elastostatic Field Near the Crack Tip in a Rubber-Like Media. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1990: 14

### 附 录

两个不定积分公式 ( $a \neq 0$ )

$$1) \int \frac{\cos ax dx}{b + c \cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c} \int \frac{dx}{b + c \cos ax}$$

$$2) \int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{(b-c)\operatorname{tg}(ax/2)}{\sqrt{b^2 - c^2}} \quad (b^2 > c^2)$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \frac{(c-b)\operatorname{tg}(ax/2) + \sqrt{c^2 - b^2}}{(c-b)\operatorname{tg}(ax/2) - \sqrt{c^2 - b^2}} \quad (b^2 < c^2)$$

## AN ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE ELASTOSTATIC FIELD WITH FINITE DEFORMATION NEAR THE TIP OF AN INTERFACE-CRACK

Du Shanyi Shi Zhifei

(Harbin Institute of Technology, Harbin 150006, China)

**Abstract** This work investigates the behavior of a tractionfree crack at the interface of two semi-infinite slabs bonded together under the conditions of plane strain. An asymptotic solution is found by the use of the fully non-linear equilibrium theory of a new compressible elastic solids.

**Key words** interface-crack, finite deformation, asymptotic solution