

单向拉伸界面裂纹的条形 损伤 - 塑性区域模型¹⁾

王吉伟 匡震邦

(西安交通大学工程力学所, 西安 710049)

提要 本文提出单向拉伸情况下两相介质界面裂纹的条形损伤 - 塑性区域模型. 假设在塑性区端点的应力有界, 且使弱相介质达到屈服, 损伤区的尺寸和 $\delta = \sqrt{(CTOD)^2 + (CTSD)^2}$ 成正比的条件下; 可确定损伤区与塑性区的长度及其上的法向和切向接合力, $CTOD$ 值等. 由此导出的裂尖应力场无 $r^{-1/2+i\epsilon}$ 的强奇异振荡, 位移场无 $r^{1/2+i\epsilon}$ 的振荡项.

关键词 界面裂纹, 条形损伤 - 塑性区域, 奇异振荡

一、引 言

弹性双材料界面裂纹问题已作过大量研究^[1-4], 对理想界面裂纹导出的解在裂尖前方很小距离内应力存在 $1/\sqrt{r}$ 的强奇异振荡, 在裂尖后方很小距离内位移有 \sqrt{r} 量级的振荡且发生上下面相互嵌入现象. 某些作者^[5] 提出复应力强度因子理论, 认为可以绕过这一困惑的问题. 但这一现象终和物理事实不符, 因而促使不少作者寻求新的模型. Comninou 等^[6] 提出接触区域模型, Achenbach 等^[7] 提出界面分开模型, Ortiz 等^[8] 提出界面屈服模型, 但这些模型仍存在这样那样的问题, 不能令人完全满意. Galatenko^[9] 对均匀介质提出了广义 Dugdale 模型, 明确引入合理的屈服条件, 这对两相材料界面问题可以借鉴. 本文提出的条形损伤 - 塑性区域模型, 消除了应力的强奇异性振荡, 裂尖后方的嵌入现象比现有模型弱一个量级, 所提出的 $CTOD$ 和 $CSOD$ 的组合有可能用作断裂准则.

图 1 表示双材料板中有一长为 $2a$ 的界面裂纹, 在 $x = t$ 处作用有集中力 $Q + iP$, Q 沿 x 轴, P 沿 y 轴. 设材料 j 的弹性模量 E_j , 剪切模量 G_j , 泊松比 ν_j . 应用 Muskhelishvili^[10] 复变函数解法, 有

$$(\sigma_x)_j + (\sigma_y)_j = 4\text{Re}[\varphi_j(z)] \quad (1)$$

$$(\sigma_y)_j - (\sigma_x)_j + 2i(\tau_{xy})_j = 2[\bar{z}\varphi'_j(z) + \psi_j(z)] \quad (2)$$

$$2G_j(u_j + iv_j) = \kappa_j \int \varphi_j(z)dz - z\bar{\varphi}_j(\bar{z}) - \int \bar{\psi}_j(\bar{z})d\bar{z} \quad (3)$$

¹⁾ 国家自然科学基金和教委博士点基金资助项目.

本文于 1992 年 12 月 29 日收到第一稿, 1993 年 8 月 4 日收到修改稿.

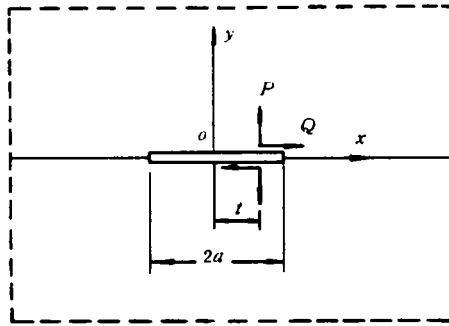


图 1 裂纹面上作用有集中力
Fig.1 A finite crack opened by wedge forces

式中对平面应变, $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$; 对平面应力 $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$; $z = x + iy$ 为复变数; φ_j 和 ψ_j 为材料 j 中的复应力函数. 对图 1 所示问题, Rice 和 Sih^[4] 给出的解是

$$\varphi_1(z) = g(z)F(z) + A \tag{4}$$

$$\psi_1(z) = q^2 \bar{g}(z) \bar{F}(z) + \left[\frac{a^2 + 2ieaz}{z^2 - a^2} g(z) - zg'(z) \right] F(z) - (A + \bar{A}) \tag{5}$$

$$\varphi_2(z) = q^2 g(z)F(z) + \mu A \tag{6}$$

$$\psi_2(z) = \bar{g}(z) \bar{F}(z) + q^2 \left[\frac{a^2 + 2ieaz}{z^2 - a^2} g(z) - zg'(z) \right] F(z) - \mu(A + \bar{A}) \tag{7}$$

式中 $q = e^{\pi\epsilon} = \left[\left(\frac{\kappa_1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) / \left(\frac{\kappa_2}{G_2} + \frac{1}{G_1} \right) \right]^{1/2}$ 和

$$F(z) = (z^2 - a^2)^{-1/2} [(z + a)/(z - a)]^{i\epsilon} \tag{8}$$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi q} (P - iQ) \frac{1}{z - t} (a^2 - t^2)^{1/2} \left(\frac{a - t}{a + t} \right)^{i\epsilon} \tag{9}$$

$$\mu = [G_2(\kappa_1 + 1)] / [G_1(\kappa_2 + 1)] \tag{10}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\left(\frac{\kappa_1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) / \left(\frac{\kappa_2}{G_2} + \frac{1}{G_1} \right) \right] \tag{11}$$

由 (1) — (9) 式知, 若材料 1 中的解 φ_1 和 ψ_1 已知, 则把 $g(z)$ 中的 q 换成 q^{-1} , 同时把 A 换成 μA , 便可得材料 2 中的解 φ_2 和 ψ_2 . 所以下文只给出材料 1 中的解.

二、条形损伤 - 塑性区域模型

图 2 表示双材料界面裂纹的条形损伤 - 塑性区域模型. 裂纹长 $2c$, 每一裂尖前方损伤区长 r_d , 塑性区长 r_p , 令 $2a = 2(c + r_d + r_p)$ 为假想裂纹长. 在 r_p 长度上作用法应力 σ_0 和切应力 τ_0 , 且为简单计, 设为常量. 在 r_d 上作用线性变化的载荷 $\sigma_0(x - c)/(b - c)$ 和 $\tau_0(x - c)/(b - c)$, 以便得到闭合解. 令 $\alpha = r_d/(r_d + r_p)$. 本模型假设 (1) 在假想裂纹尖端 $x = \pm a$ 处应力有界, 且在弱相介质 1 中达初始屈服点; 如设界面较弱, 也可设该处界面屈服. (2) 设 r_d 正比于裂尖有效张开位移 $\delta = \sqrt{CTOD^2 + CTSD^2}$, 即 $r_d = \beta\delta$. 其中 $CTOD$ 为真实裂尖的张开位移, $CTSD$ 为两种材料在裂尖处的相对滑移, β 取为常数. 对均匀材料的许多分析表明, 裂尖张开位移达到裂尖到第一个

孔洞的距离的 $1/2-1$ 时, 裂纹起裂^[11], 因此本文中选取 $\beta = 2, 3, 4$ 分别计算, 表达损伤区的尺寸约为 δ 的 $2-4$ 倍. 计算表明, 在 $\alpha < 0.1$ 的范围内, α 对 δ 的影响甚微.

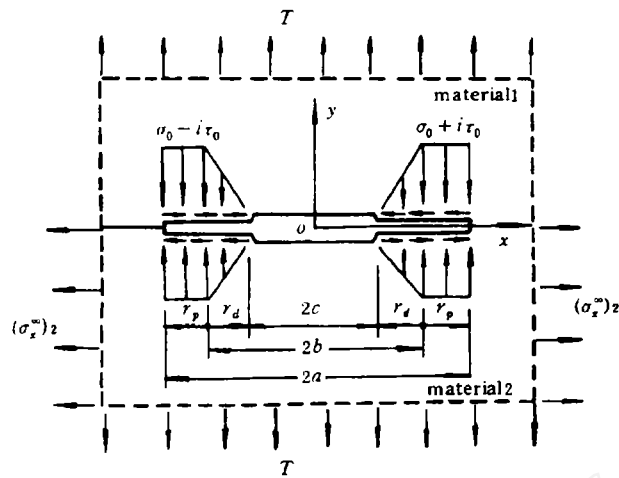


图2 条型损伤塑性区域模型
Fig.2 A strip damaged-plastic zone model

为保证越过界面时有 $(\epsilon_x)_1 = (\epsilon_x)_2$, 需设材料1在 $x \rightarrow \infty$ 时无外应力作用, 而材料2上作用有^[4]

$$(\sigma_x^\infty)_2 = [(3 + \mu)q^2 - (3\mu + 1)]T/(1 + q^2) \quad (12)$$

式中 $T = \sigma_y^\infty$.

由(4)–(9)式知, 关键是求 $g(z)$, 而 $g(z)$ 可写成

$$g(z) = g_\infty(z) + g_{dp}(z) \quad (13)$$

式中 $g_\infty(z)$ 为无穷远处应力 T 产生, 按[4]为

$$g_\infty(z) = T(z - 2i\epsilon a)/(1 + e^{2\pi\epsilon}) \quad (14)$$

而 $g_{dp}(z)$ 可由(9)式用叠加法得到

$$g_{dp}(z) = -\frac{1}{2\pi q} \left\{ \bar{\sigma} \int_{-a}^{-b} \left(\frac{a-x}{a+x} \right)^{i\epsilon} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{z-x} dx - \bar{\sigma} \int_{-b}^{-c} \frac{x+c}{b-c} \left(\frac{a-x}{a+x} \right)^{i\epsilon} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{z-x} dx \right. \\ \left. + \sigma \int_c^b \frac{x-c}{b-c} \left(\frac{a-x}{a+x} \right)^{i\epsilon} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{z-a} dx + \sigma \int_b^a \left(\frac{a-x}{a+x} \right)^{i\epsilon} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{z-x} dx \right\} \quad (15)$$

式中 $b = c + r_d$, $\sigma = \sigma_0 - i\tau_0$, $\bar{\sigma} = \sigma_0 + i\tau_0$, 为 σ 的共轭值. 把上式作变量置换

$$x = a(1-t^2)/(1+t^2) \quad \text{或} \quad t^2 = (a-x)/(a+x) \quad (16)$$

同时把 (15) 式前两项积分中的 x 换为 $-x$, 则可得

$$\begin{aligned}
 g_{dp}(z) = & -\frac{1}{\pi q} \bar{\sigma} \left\{ z \int_0^{t_1} \frac{t^{-2i\epsilon} dt}{1+t^2} - a \int_0^{t_1} \frac{(1-t^2)t^{-2i\epsilon}}{(1+t^2)^2} dt - \sqrt{z^2-a^2} \left(\frac{z-a}{z+a} \right)^{i\epsilon} \right. \\
 & \cdot \left. \int_0^{u_1} \frac{u^{-2i\epsilon}}{1+u^2} du \right\} - \frac{1}{\pi q} \frac{\bar{\sigma}}{b-c} \left\{ z \int_{t_1}^{t_0} \left(a \frac{1-t^2}{1+t^2} - c \right) \frac{t^{-2i\epsilon}}{1+t^2} dt - a \int_{t_1}^{t_0} \left(a \frac{1-t^2}{1+t^2} - c \right) \right. \\
 & \cdot \left. \frac{(1-t^2)t^{-2i\epsilon}}{(1+t^2)^2} dt - \sqrt{z^2-a^2} \left(\frac{z-a}{z+a} \right)^{i\epsilon} \int_{u_1}^{u_0} \frac{u^{-2i\epsilon}}{1+u^2} \left(a \frac{1-u^2}{1+u^2} \frac{z+a}{z-a} - c \right) du \right\} \\
 & - \frac{1}{\pi q} \frac{\sigma}{b-c} \left\{ z \int_{t_1}^{t_0} \left(a \frac{1-t^2}{1+t^2} - c \right) \frac{t^{2i\epsilon}}{1+t^2} dt + a \int_{t_1}^{t_0} \left(a \frac{1-t^2}{1+t^2} - c \right) \frac{(1-t^2)t^{2i\epsilon}}{(1+t^2)^2} dt \right. \\
 & \left. - \sqrt{z^2-a^2} \left(\frac{z-a}{z+a} \right)^{i\epsilon} \int_{v_1}^{v_0} \left(a \frac{1-v^2[(z-a)/(z+a)]}{1+v^2[(z-a)/(z+a)]} - c \right) \frac{v^{2i\epsilon} dv}{1+v^2} \right\} \\
 & - \frac{1}{\pi q} \sigma \left\{ z \int_0^{t_1} \frac{t^{2i\epsilon}}{1+t^2} dt + a \int_0^{t_1} \frac{(1-t^2)t^{2i\epsilon}}{(1+t^2)^2} dt - \sqrt{z^2-a^2} \left(\frac{z-a}{z+a} \right)^{i\epsilon} \right. \\
 & \left. \cdot \int_0^{v_1} \frac{v^{2i\epsilon}}{1+v^2} dv \right\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

式中已利用了变换

$$u = \sqrt{(z-a)/(z+a)}t, \quad v = \sqrt{(z+a)/(z-a)}; \quad (18)$$

u_0 和 v_0 为 $t = t_0$ 时的 u 和 v 值, u_1 和 v_1 为 $t = t_1$ 时的 u 和 v 值, 且 $t_0 = \sqrt{(a-c)/(a+c)}$, $t_1 = \sqrt{(a-b)/(a+b)}$.

利用 (13), (14) 和 (17) 式可知, $g(z)F(z)$ 在 $z = \pm a$ 处无奇异性的条件 (即含 z 和 a 项的系数为零) 可以写成

$$\sigma_0 F_1 + \tau_0 F_2 = \beta T / (2\epsilon) \quad (19)$$

$$\sigma_0 F_3 - \tau_0 F_4 = -\beta T \quad (20)$$

式中 $\beta = \pi \epsilon q / (1+q^2)$ 和

$$F_1 = \int_0^{t_1} \frac{\cos(2\epsilon \ln t)}{1+t^2} dt + \frac{a}{b-c} \int_{t_1}^{t_0} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{c}{a} \right) \frac{\cos(2\epsilon \ln t)}{1+t^2} dt \quad (21)$$

$$F_2 = \int_0^{t_1} \frac{\sin(2\epsilon \ln t)}{1+t^2} dt + \frac{a}{b-c} \int_{t_1}^{t_0} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{c}{a} \right) \frac{\sin(2\epsilon \ln t)}{1+t^2} dt \quad (22)$$

$$F_3 = \int_0^{t_1} \frac{(1-t^2) \sin(2\epsilon \ln t)}{(1+t^2)^2} dt + \frac{a}{b-c} \int_{t_1}^{t_0} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{c}{a} \right) \frac{(1-t^2) \sin(2\epsilon \ln t)}{(1+t^2)^2} dt \quad (23)$$

$$F_4 = \int_0^{t_1} \frac{(1-t^2) \cos(2\epsilon \ln t)}{(1+t^2)^2} dt + \frac{a}{b-c} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{c}{a} \right) \frac{(1-t^2) \cos(2\epsilon \ln t)}{(1+t^2)^2} dt \quad (24)$$

三、函数 $g(z)$ 的级数解

设 $z = \pm a$ 处的应力有界条件 (19) 和 (20) 式已经满足, 则 $g(z)$ 可以表成

$$g(z) = \frac{1}{\pi q} \sqrt{z^2 - a^2} \left(\frac{z-a}{z+a} \right)^{i\epsilon} \left\{ \bar{\sigma} \int_0^{u_1} \frac{u^{-2i\epsilon}}{1+u^2} du + \frac{a\bar{\sigma}}{b-c} \int_{u_1}^{u_0} \left[\frac{1-u^2(z+a)/(z-a)}{1+u^2(z+a)/(z-a)} - \frac{c}{a} \right] \frac{u^{-2i\epsilon}}{1+u^2} du + \frac{a\sigma}{b-c} \int_{v_1}^{v_0} \left[\frac{1-v^2(z-a)/(z+a)}{1+v^2(z-a)/(z+a)} - \frac{c}{a} \right] \frac{v^{2i\epsilon}}{1+v^2} dv + \sigma \int_0^{v_1} \frac{v^{2i\epsilon}}{1+v^2} dv \right\} \quad (25)$$

根据上式特点，把复平面分成五个区域，如图 3 所示：

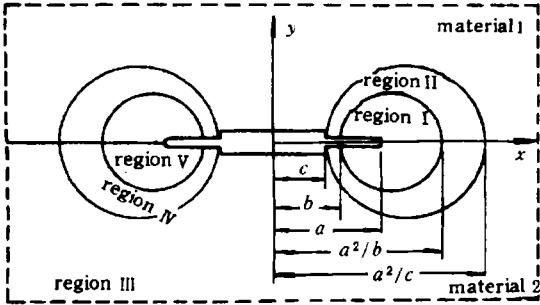


图 3 讨论 $g(z)$ 时五个区域的划分
Fig.3 Five regions in complex plane

- I 区： $|u_1| < |u_0| < 1$,
 $|v_0| > |v_1| > 1$;
- II 区： $|u_1| < |u_0| < 1$,
 $|v_1| < 1, |v_0| > 1$;
- III 区： $|u_1| < |u_0| < 1$,
 $|v_1| < |v_0| < 1$;
- IV 区： $|u_1| < 1, |u_0| > 1$,
 $|v_1| < |v_0| < 1$;
- V 区： $|u_0| > |u_1| > 1$,
 $|v_1| < |v_0| < 1$.

I 区和 II 区的分界是

$$|v_1| = 1, \quad \text{或} \quad \left(x - a \frac{1+t_1^4}{1-t_1^4} \right)^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{2t_1^2}{1-t_1^4} \right)^2 \quad (26)$$

II 区和 III 区的分界是

$$|v_0| = 1, \quad \text{或} \quad \left(x - a \frac{1+t_0^4}{1-t_0^4} \right)^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{2t_0^2}{1-t_0^4} \right)^2 \quad (27)$$

左侧三个区域划分与此对称。当 z 位于 I 区内且不在裂面上时， $|v|$ 可以大于 1；对给定的 z ，在积分 $\int_0^{v_1} [v^{2i\epsilon}/(1+v^2)] dv$ 中，当 x 从 a 变到 b 时， x 可在 $|v|=1$ 的圆内或圆外，因此存在 $\xi, b < \xi < a$ ，使 $v = \{(a-\xi)(z+a)/[(a+\xi)(z-a)]\}^{1/2} = e^{i\omega}, |\omega| < \frac{\pi}{2}$ ；故有

$$\begin{aligned} \int_0^{v_1} \frac{v^{2i\epsilon}}{1+v^2} dv &= \int_0^{e^{i\omega}} \frac{v^{2i\epsilon}}{1+v^2} dv + \int_{e^{i\omega}}^{v_1} \frac{v^{2i\epsilon}}{v^2(1+v^{-2})} dv \\ &= \int_0^{e^{i\omega}} v^{2i\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v^{2n} dv + \int_{e^{i\omega}}^{v_1} v^{-2+2i\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v^{-2n} dv \\ &= \frac{\pi q}{1+q^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\xi} v_1^{-2\xi} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\xi = n + 1/2 - i\epsilon \quad (29)$$

式中已应用了结果 [12]

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + 4\epsilon^2} \cos(2n+1)\omega &= \frac{\pi}{4\text{ch}(\pi\epsilon)} \text{sh}(2\epsilon\omega) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2\epsilon}{(2n+1)^2 + 4\epsilon^2} \sin(2n+1)\omega &= \frac{\pi}{4\text{ch}(\pi\epsilon)} \text{ch}(2\epsilon\omega) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

当 z 在裂面上时, $\omega = \pm\pi/2$, 对应 $v = -1$; 但只要取 $\int_0^{v_1} [v^{2i\epsilon}/(1+v^2)]dv$ 的 Cauchy 主值, 则积分后的函数在 I 区解析, 且连续到裂面上; 这一点可由 Hölder 条件和 Cauchy 积分主值的性质保证^[10]. 在 I 区以外的区域 $|v_1| < 1$, 从而

$$\int_0^{v_1} \frac{v^{2i\epsilon}}{1+v^2} dv = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\zeta} v_1^{2\zeta} \quad (31)$$

$$\zeta = n + 1/2 + i\epsilon \quad (32)$$

在 I 区和 II 区的分界圆上, $|v_1| = 1, v_1 = e^{i\omega}, \omega < \pi/2$; 由 (28)–(32) 式可见, (28) 和 (31) 式取相同的值. (25) 式中第三个积分中的下列项为

$$\begin{aligned} &\int_{v_1}^{v_0} \frac{1}{1+v^2(z-a)/(z+a)} \frac{v^{2i\epsilon}}{1+v^2} dv \\ &= -\int_{1/v_1}^{1/v_0} \frac{1}{1+u^{-2}(z-a)/(z+a)} \frac{u^{-2i\epsilon}}{1+u^2} du \\ &= -\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{2a} \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{-i\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\zeta} (t_0^{2\zeta} - t_1^{2\zeta}) \\ &\quad - \frac{z+a}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\xi} (t_0^{-2\xi} - t_1^{-2\xi}) \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{\xi} \end{aligned} \quad (33)$$

在上式级数展开中应用了 $v^2(z-a)/(z+a) = u^{-2}(z-a)/(z+a) = t^2 = (a-x)/(a+x)$, 当 $b < x < 1$ 时 $t < 1$.

当 z 位于不同区域时, (25) 式中的四个积分将遇到 (28)–(33) 式类似的问题, 可同样处理, 最终可得 I、II 和 III 区中的 $g(z)$ 为

$$\begin{aligned} g^J(z) &= \frac{\sigma\Delta^J}{1+q^2} \sqrt{z^2-a^2} \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{i\epsilon} + \frac{D}{\pi q} (z^2-a^2) \\ &\quad + \frac{1}{\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{1n}^J z + B_{1n}^J) \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^n (z-a) \\ &\quad + \frac{1}{\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{2n}^J z + B_{2n}^J) \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^n (z+a); \quad J = \text{I, II, III} \end{aligned} \quad (34)$$

式中

$$\Delta^{\text{I}} = 1, \quad \Delta^{\text{II}} = \frac{z-c}{b-c}, \quad \Delta^{\text{III}} = 0 \quad (35)$$

$$D = \frac{\bar{\sigma}}{b-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\xi} (t_0^{2\xi} - t_1^{2\xi}) - \frac{\sigma}{b-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\zeta} (t_0^{2\zeta} - t_1^{2\zeta}) \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{1n}^I z + B_{1n}^I &= \frac{(-1)^n}{2\xi} \left(-\bar{\sigma} \frac{z+c}{b-c} t_0^{2\xi} + \bar{\sigma} \frac{z+b}{b-c} t_1^{2\xi} - \sigma \frac{z-c}{b-c} t_0^{-2\xi} + \sigma \frac{z-b}{b-c} t_1^{-2\xi} \right) \\ A_{2n}^I z + B_{2n}^I &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{1n}^{II} z + B_{1n}^{II} &= \frac{(-1)^n}{2\xi} \left(-\bar{\sigma} \frac{z+c}{b-c} t_0^{2\xi} + \bar{\sigma} \frac{z+b}{b-c} t_1^{2\xi} - \sigma \frac{z-c}{b-c} t_0^{-2\xi} \right) \\ A_{2n}^{II} z + B_{2n}^{II} &= \frac{(-1)^n}{2\xi} \left(-\sigma \frac{z-b}{b-c} t_1^{2\xi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{1n}^{III} z + B_{1n}^{III} &= \frac{(-1)^n}{2\xi} \left(-\bar{\sigma} \frac{z+c}{b-c} t_0^{2\xi} + \bar{\sigma} \frac{z+b}{b-c} t_1^{2\xi} \right) \\ A_{2n}^{III} z + B_{2n}^{III} &= \frac{(-1)^n}{2\xi} \left(\sigma \frac{z-c}{b-c} t_0^{2\xi} - \sigma \frac{z-b}{b-c} t_1^{2\xi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

根据对称性易于写出 $g^{IV}(z)$ 和 $g^V(z)$ 。易于证明, 上列诸 $g^J(z)$ 通过分界圆时是连续的。

四、应力场和裂面位移表达式

对图 2 所示问题, 按 [4], 在 (4)–(7) 式中的 A 为

$$A = T \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1+q^2} \right) = -\frac{T}{4} [1 - 2\text{th}(\pi\epsilon)] \quad (40)$$

把 (8), (34)–(40) 式代入 (4)–(7) 式可得

$$\begin{aligned} \varphi^J(z) &= \frac{\sigma\Delta^J}{1+q^2} + \frac{D}{\pi q} \sqrt{z^2-a^2} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{i\epsilon} + \frac{1}{\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{1n}^J z + B_{1n}^J) \left(\frac{z-a}{z+a} \right)^\xi \\ &+ \frac{1}{\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{2n}^J z + B_{2n}^J) \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^\zeta + A \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \psi^J(z) &= \frac{\bar{\sigma}q^2\Delta^J}{1+q^2} - \frac{\sigma}{1+q^2} (\Delta^J + H^J) + \frac{q\bar{D}}{\pi} \sqrt{z^2-a^2} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{-i\epsilon} \\ &- \frac{D}{\pi q} \sqrt{z^2-a^2} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{-i\epsilon} - \frac{D}{\pi q} \frac{z^2-2i\epsilon az}{\sqrt{z^2-a^2}} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{i\epsilon} \\ &+ \frac{q}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{A}_{1n}^J z + \bar{B}_{1n}^J) \left(\frac{z-a}{z+a} \right)^\zeta + \frac{q}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{A}_{2n}^J z + \bar{B}_{2n}^J) \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^\xi \\ &- \frac{1}{\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{1n}^J z + (A_{1n}^J z + B_{1n}^J) \left(1 + \frac{\xi az}{z^2-a^2} \right) \right\} \left(\frac{z-a}{z+a} \right)^\xi \\ &- \frac{1}{\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{2n}^J z + (A_{2n}^J z + B_{2n}^J) \left(1 - \frac{\zeta az}{z^2-a^2} \right) \right\} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^\zeta - 2A \end{aligned} \quad (42)$$

式中 $H^I = 0$, $H^{II} = \frac{z}{b-c}$, $H^{III} = 0$ 。由此导出的应力场为

$$\begin{aligned} \sigma_y^J + i\tau_{xy}^J &= f_{(z)}^J + \frac{\bar{D}}{\pi q} \sqrt{z^2-a^2} \left(\frac{\bar{z}+a}{\bar{z}-a} \right)^{-i\epsilon} + \frac{q\bar{D}}{\pi} \sqrt{z^2-a^2} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{-i\epsilon} \\ &+ \frac{D}{\pi q} \frac{(\bar{z}-z)(z-2i\epsilon a)}{\sqrt{z^2-a^2}} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{i\epsilon} + \frac{1}{\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (\bar{A}_{1n}^J \bar{z} + \bar{B}_{1n}^J) \left(\frac{\bar{z}-a}{\bar{z}+a} \right)^\zeta \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +q^2\left(\overline{A}_{1n}^J z + \overline{B}_{1n}^J\right)\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^\zeta + \left[A_{1n}^J + (A_{1n}^J z + B_{1n}^J)\frac{2\xi a}{z^2-a^2}\right] \\
 & \cdot(\bar{z}-z)\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^\xi + (\overline{A}_{2n}^J \bar{z} + \overline{B}_{2n}^J)\left(\frac{\bar{z}+a}{\bar{z}-a}\right)^\xi + q^2\left(\overline{A}_{2n}^J z + \overline{B}_{2n}^J\right)\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^\xi \\
 & + \left[A_{2n}^J - (A_{2n}^J z + B_{2n}^J)\frac{2\xi a}{z^2-a^2}\right](\bar{z}-z)\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^\zeta \} \quad (43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^J - i\tau_{xy}^J = & 4A + h^J(z) + \frac{\bar{D}}{\pi q} \sqrt{z^2 - a^2} \left(\frac{\bar{z}+a}{\bar{z}-a}\right)^{-i\epsilon} - \frac{q\bar{D}}{\pi} \sqrt{z^2 - a^2} \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{-i\epsilon} \\
 & + \frac{2D}{\pi q} \sqrt{z^2 - a^2} \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{i\epsilon} - \frac{D}{\pi q} \frac{(\bar{z}-z)(z-2i\epsilon a)}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{i\epsilon} \\
 & + \frac{1}{\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (\overline{A}_{1n}^J \bar{z} + \overline{B}_{1n}^J)\left(\frac{\bar{z}-a}{\bar{z}+a}\right)^\zeta - q^2(\overline{A}_{1n}^J z + \overline{B}_{1n}^J)\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^\zeta \right. \\
 & + 2(A_{1n}^J z + B_{1n}^J)\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^\xi + 2(A_{2n}^J z + B_{2n}^J)\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^\xi \\
 & - \left[A_{1n}^J + (A_{1n}^J z + B_{1n}^J)\frac{2\xi a}{z^2-a^2}\right](\bar{z}-z)\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^\xi \\
 & + (\overline{A}_{2n}^J \bar{z} + \overline{B}_{2n}^J)\left(\frac{\bar{z}+a}{\bar{z}-a}\right)^\xi - q^2(\overline{A}_{2n}^J z + \overline{B}_{2n}^J)\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^\xi \\
 & \left. - \left[A_{2n}^J - (A_{2n}^J z + B_{2n}^J)\frac{2\xi a}{z^2-a^2}\right](\bar{z}-z)\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^\zeta \right\} \quad (44)
 \end{aligned}$$

式中

$$\left. \begin{aligned}
 f^I(z) &= \bar{\sigma} \\
 f^{II}(z) &= \frac{\bar{\sigma}}{1+q^2} \frac{\bar{z}-c}{b-c} + \frac{\bar{\sigma}q^2}{1+q^2} \frac{z-c}{b-c} + \frac{\sigma}{1+q^2} \frac{\bar{z}-z}{b-c} \\
 f^{III}(z) &= 0 \\
 h^I(z) &= \bar{\sigma} \frac{1-q^2}{1+q^2} + \frac{2\bar{\sigma}}{1+q^2} \\
 h^{III}(z) &= 0 \\
 h^{II}(z) &= \frac{2\sigma}{1+q^2} \frac{z-c}{b-c} - \frac{\sigma}{1+q^2} \frac{\bar{z}-z}{b-c} + \frac{\bar{\sigma}}{1+q^2} \frac{\bar{z}-c}{b-c} - \frac{\bar{\sigma}q^2}{1+q^2} \frac{z-c}{b-c}
 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

当 $-c < z = x < c$, 即 z 位于真实裂纹面上时, 有 $z-a = (a-x)e^{i\pi}$, $\bar{z}-a = (a-x)e^{-i\pi}$, $z+a = \bar{z}+a = a+x$, 由 (43) 式可导出 $\sigma_y^I + i\tau_{xy}^I = 0$, 即满足自由裂面边界条件; 类似地可证当 $c < z = x < b$ 时有 $\sigma_y^{II} + i\tau_{xy}^{II} = (\sigma_0 + i\tau_0) \frac{x-c}{b-c}$, $b < z = x < a$ 时有 $\sigma_y^{III} + i\tau_{xy}^{III} = \sigma_0 + i\tau_0$, 即满足损伤区和塑性区的给定条件, 即上述解满足等效裂面上的全部边界条件; 同时经过冗长的计算可以证明当 $z \rightarrow \infty$ 时, $g^{III}(z) \rightarrow g_\infty(z)$, 即解满足无穷远处的边界条件. 所以上述解是精确解.

如不设在裂尖前方存在损伤区, 只单纯采用条形塑性区域模型, 可以证明, 此时在条形塑性区域边界上有

$$\begin{aligned} \sigma_x = & (\sigma_0 - T)(1 - 2\text{th}\pi\epsilon) \\ & + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + 4\epsilon^2} \left\{ [(2n+1)\sigma_0 - 2\epsilon\tau_0] \sin\left(\epsilon \ln \frac{t_0^2(a-x)}{a+x}\right) \right. \\ & - [(2n+1)\tau_0 + 2\epsilon\sigma_0] \cos\left(\epsilon \ln \frac{t_0^2(a-x)}{a+x}\right) \left(\frac{t_0^2(a-x)}{a+x}\right)^{n+\frac{1}{2}} \\ & - \left. \left\{ [(2n+1)\sigma_0 + 2\epsilon\tau_0] \sin\left(\epsilon \ln \frac{a-x}{t_0^2(a+x)}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + [(2n+1)\tau_0 - 2\epsilon\sigma_0] \cos\left(\epsilon \ln \frac{a-x}{t_0^2(a+x)}\right) \left(\frac{a-x}{t_0^2(a+x)}\right)^{n+\frac{1}{2}} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

当 $x \rightarrow c^+$ 时, 上式具有对数奇异性, 这是由于无损伤区假设时, 结合力 $Q + iP$ 在 $x = c$ 处有间断, 因而在 $g(z)$ 中的被积函数不满足 Hölder 条件. 但对均匀材料中的 Dugdale 解, 因 $\epsilon = 0$ 和 $\tau_0 = 0$, 由 (46) 式可知 σ_x 亦无对数奇异性.

把 (41) 和 (42) 式代入 (3) 式可得位移解, 但位移解难以用初等函数表出. 对我们感兴趣的上下裂面位移分别为

$$\left. \begin{aligned} 2G_1(u_1 + iv_1)^+ &= \kappa_1 \int_a^x \varphi_1^+(x) dx - \overline{x\varphi_1^+(x)} - \int_a^x \overline{\psi_1^+(x)} dx + \text{const1} \\ 2G_2(u_2 + iv_2)^- &= \kappa_2 \int_a^x \varphi_1^-(x) dx - \overline{x\varphi_2^-(x)} - \int_a^x \overline{\psi_2^-(x)} dx + \text{const2} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

式中 u_j, v_j 等的下标, 1 表示上半平面的弱介质, 2 表示下半平面的强介质. 定积分常数时取 $x = a$ 为不动点, $x > a$ 的界面完全黏合. 由此求得

$$\begin{aligned} (u_1^J + iv_1^J)^+ = & \frac{\kappa_1 + 1}{2G_1} A(x - a^J) + \frac{(\kappa_1 - q^2)\sigma}{2G_1(1 + q^2)} S^J(x) \\ & + iD \frac{\kappa_1 + 1}{2G_1\pi} \int_{a^J}^x \sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{i\epsilon} dt \\ & + i \frac{\kappa_1 + 1}{2\pi G_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{a^J}^x \left\{ (A_{1n}^J t + B_{1n}^J) \left(\frac{a-t}{a+t}\right)^\xi \right. \\ & \left. - (A_{2n}^J t + B_{2n}^J) \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^\zeta \right\} dt \end{aligned} \quad (48)$$

把上式中 G_1, κ_1, A, q 分别换为 $G_2, \kappa_2, \mu A, q^{-1}$ 便得 $(u_2^J + iv_2^J)^-$. 式中 $J = \text{I, II, III}$ 和

$$\left. \begin{aligned} a^{\text{I}} &= a, \quad a^{\text{II}} = b, \quad a^{\text{III}} = c \\ S^{\text{I}}(x) &= x - a, \quad S^{\text{II}}(x) = \frac{1}{b-c} [(x-c)^2 - (b-c)^2], \quad S^{\text{III}}(x) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

裂面相对张开位移 COD 和剪切位移 CSD 为

$$\begin{aligned} V^J = & (COD)^J + i(CSD)^J = (u_1^J + iv_1^J)^+ - (u_2^J + iv_2^J)^- \\ = & V^{J-1} \Big|_{x=a^J} + \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\kappa_1 + 1}{G_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{G_2} \right) \left\{ D \int_{a^J}^x \sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{i\epsilon} dt \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{a^J}^x \left[(A_{1n}^J t + B_{1n}^J) \left(\frac{a-t}{a+t}\right)^\xi - (A_{2n}^J t + B_{2n}^J) \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^\zeta \right] dt \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

式中 $V^0|_{x=a} = 0$. 裂尖张开位移 $CTOD$ 和剪切位移 $CTSD$ 由 (50) 式中的 $V^{II}|_{x=c}$ 表示, 即

$$(CTOD) + i(CTSD) = V^I|_{x=b} + \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\kappa_1 + 1}{G_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{G_2} \right) \left\{ D \int_b^c \sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{i\epsilon} dt + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_b^c \left[(A_{1n}^J t + B_{1n}^J) \left(\frac{a-t}{a+t} \right)^\xi - (A_{2n}^J t + B_{2n}^J) \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^\xi \right] dt \right\} \quad (51)$$

由 (50) 式知, 当 $x \rightarrow a - 0$ 时, $\delta^I \sim (a-x)^{3/2+i\epsilon}$, 为高阶奇异振荡, 这一点和 Ortiz 等^[8] 的解相同.

五、损伤 - 塑性区尺寸和结合力的确定

由 (19) 和 (20) 式得在 $x = a$ 点的应力有界条件为

$$\sigma_0 = \left\{ \left(\frac{F_4}{2\epsilon} - F_3 \right) / (F_1 F_4 - F_2 F_3) \right\} \beta T \quad (52)$$

$$\tau_0 = \left\{ \left(F_1 + \frac{F_3}{2\epsilon} \right) / (F_1 F_4 - F_2 F_3) \right\} \beta T \quad (53)$$

设弱介质 1 的初始屈服应力为 σ_{s1} , 对平面应力情形, 在 $x = a$ 处屈服的 Mises 条件为

$$\sigma_{e1}|_{x=a} = \sqrt{(\sigma_{y1}^2 + \sigma_{x1}^2 - \sigma_{x1}\sigma_{y1} + 3\tau_{xy1}^2)}|_{x=a} = \sigma_{s1} \quad (54)$$

按前面的讨论, 设损伤区尺寸 r_d 正比于 $\delta = [(CTOD)^2 + (CTSD)^2]^{1/2}$, 即有

$$r_d = \beta \delta; \quad \delta = [(CTOD)^2 + (CTSD)^2]^{1/2}, \quad \beta = 2, 3 \text{ 或 } 4 \quad (55)$$

(51)–(55) 式组成确定 $\sigma_0, \tau_0, r_d, r_p, \delta$ 的五个方程. 采用迭代法求解.

六、数值算例

下面较详细地讨论 Ti/Al₂O₃ 双材料界面的数值结果, 所用材料常数为: $G_1 = 4.34 \times 10^4 \text{MPa}$, $\nu_1 = 0.322$, $\sigma_{s1} = 450 \text{MPa}$, $G_2 = 17.92 \times 10^4 \text{MPa}$, $\nu_2 = 0.207$.

图 4(a) 和 (b) 给出 Ti/Al₂O₃ 受载后裂面 $a < x < 0$ 的位移曲线, 裂纹长 $2C = 2$. 其结果和 Ortiz^[8] 大体相似, 由于引入损伤区, 真实裂尖附近的变化更平滑些. 在 $T/\sigma_{s1} = 0.2$ 的情况下, $|x - a| < 10^{-10}C$ 的塑性区内仍有些许嵌入现象, 但此区远小于 r_p , 且嵌入量比经典弹性解小几个量级. 大量计算表明, 只当载荷非常小时, 如 $T/\sigma_{s1} < 10^{-4}$, 在真实裂尖 $x = c$ 的后方才出现些许嵌入现象, 即仍有弹性解的特征.

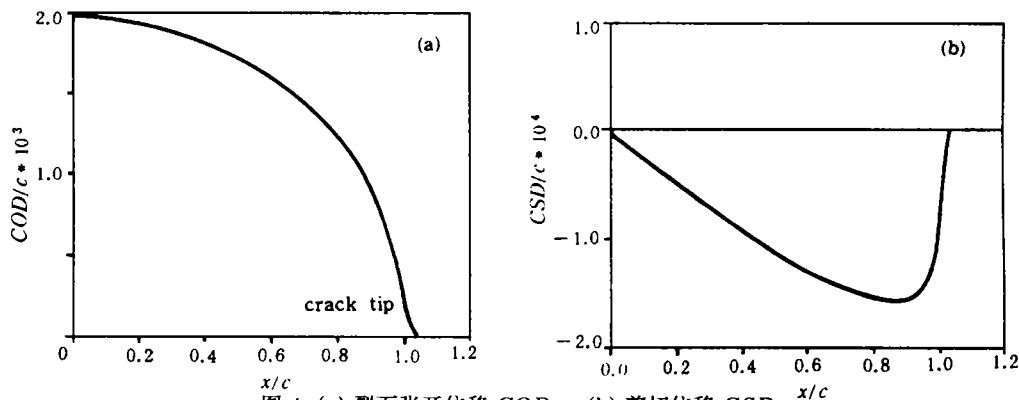


图 4 (a) 裂面张开位移 COD, (b) 剪切位移 CSD
 Fig.4 (a) Crack opening displacement COD, (b) Crack shear displacement CSD
 $T_i/Al_2O_3, T/\sigma_{s1} = 0.2, \beta = 4$

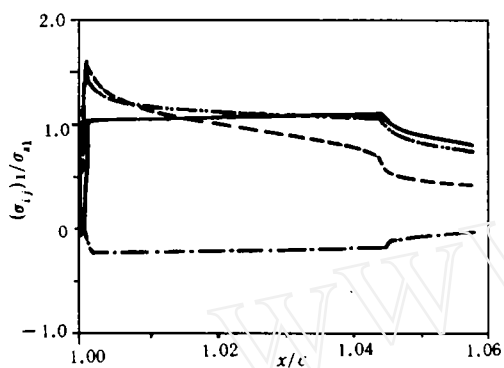


图 5 裂尖前方应力随 x/c 的变化
 Fig.5 Stress distribution in front of crack tip
 — $(\sigma_{yy})_1$, - - - $(\sigma_{xx})_1$,
 - · - $(\tau_{xy})_1$, - - - $(\sigma_e)_1$
 $T/\sigma_{s1} = 0.2, \beta = 4, T_i/Al_2O_3$

图 5 给出裂尖前方应力 σ_{ij1} 和等效应力 σ_{e1} 随 x/c 的分布曲线。由图可知, 远场为弹性区, 在 $x=a$ 的假想裂尖处材料 1 初始屈服, 随后进入塑性强化区, 在 $x=b$ 处 σ_{e1} 达最大值, 然后进入损伤区, 在真实裂尖 $x=c$ 处降为零, 表示裂尖已丧失承载能力。

图 6 表示在三种不同 β 值下, $r_d, r_p, \alpha = r_d/(r_d + r_p)$ 随载荷 T/σ_{s1} 的变化曲线。由图知, 在 $T/\sigma_{s1} \leq 0.5$ 的情况下, α 和 r_d/c 随 T/σ_{s1} 的变化和 β 的关系较大, 但 r_p/c 则几乎和 β 无关。对同一 β, α 随 T/σ_{s1} 的变化不大。由于损伤区很小, 所以计算 r_p/c 和裂面位移时, 损伤区

的贡献轻微; 即使 α 大到 0.1, 其贡献亦有限。

图 7 表示 $T/\sigma_{s1} = 0.1$ 和 0.2 时, $\frac{CTOD}{c} / \left(\frac{\sigma_{s1}}{E_1} + \frac{\sigma_{s1}}{E_2} \right), \frac{CTSD}{c} / \left(\frac{\sigma_{s1}}{E_1} + \frac{\sigma_{s1}}{E_2} \right)$ 和 ϵ 的关系, 而 α 在 0—0.1 范围内变化影响不大。由图知, 当 T/σ_{s1} 不很大时, 存在下列近似关系

$$\frac{CTSD}{c} = \sigma_{s1} k \epsilon \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \tag{56}$$

$$\frac{CTOD}{c} = \sigma_{s1} h \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{(CTOD)_1}{c} \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \right) \tag{57}$$

式中 k 和 h 是依赖 T/σ_{s1} 的常数; $(CTOD)_1$ 为均质材料 1 内存在长 $2c$ 的裂纹、在单向拉伸载荷 T 作用时的裂尖张开位移。

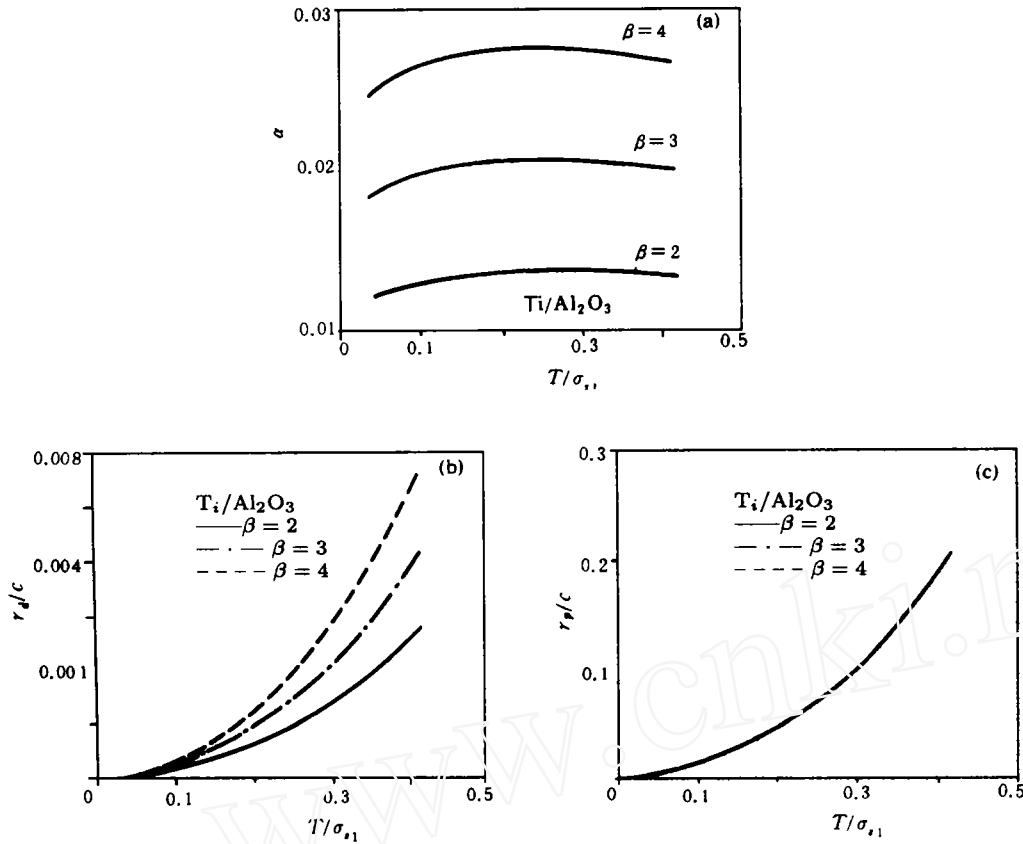


图 6 $\beta = 2, 3, 4$ 时, α 、 r_d/c 和 r_p/c 随 T/σ_{s1} 的变化
 Fig.6 When $\beta = 2, 3, 4$, the variations of α 、 r_d/c and r_p/c with T/σ_{s1}

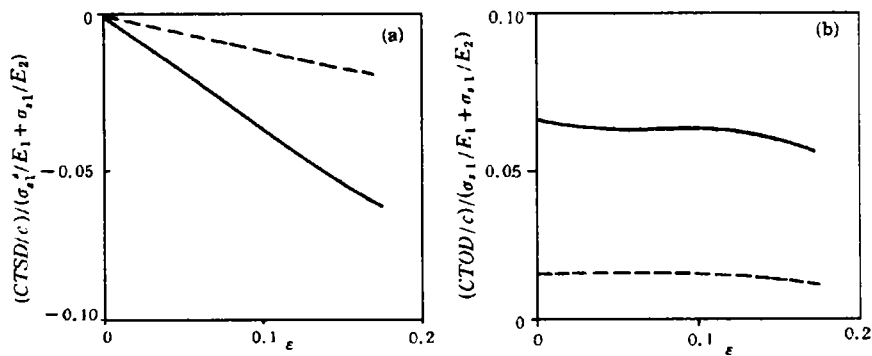


图 7 ϵ 对裂尖张开和剪切位移的影响
 Fig.7 The influence of ϵ on $CTOD$ and $CTSD$
 --- $T/\sigma_{s1} = 0.1$, — $T/\sigma_{s1} = 0.2$, $\alpha = 0.1$

七、结 论

本文提出了单向拉伸情况下双材料界面裂纹的条形损伤 - 塑性区域模型, 给出应力场闭合形式的精确解和位移场的积分形式的解; 对均质材料退化到 Dugdale 解。

文中对解的性质作了详细讨论, 为使全部应力有界, 引入损伤区是必要的; 因损伤区很小, 它对裂尖位移和塑性区尺寸的影响很小. 对稍大一些的载荷, 如 $T/\sigma_{s1} > 10^{-4}$, 仅在假想裂尖后方的极小塑性区内, 位移有较经典弹性解小得多嵌入现象, 优于其它已有模型, 而有真实裂尖后方无嵌入. 塑性区的硬化现象已在适当程度上自动计入. 结果表明本模型是相当合理的. 如假设结合力 $\sigma_0 + i\tau_0$ 有更合理的形式, 本模型还会得到进一步改善, 但定性上不会出现差别.

参 考 文 献

- [1] Williams M L. The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1959(49): 199-204
- [2] England A H. A Crack between Dissimilar Media, *JAM*, 1965(32): 400-402
- [3] Erdogan F. Stress Distribution in a Nonhomogeneous Elastic Plane with Cracks, *JAM*, 1963(30): 232-237
- [4] Rice J R and Sih G C. Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, *JAM*, 1965(32):418-423
- [5] Rice J R. Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks, *JAM*, 1988(55): 98-103
- [6] Comninou M. The Interface Crack, *JAM*, 1977, 44: 631-636
- [7] Achenbach J D. et al., Loss of Adhesion at the Tip of an Interface Crack, *J. of Elasticity*, 1979(9): 397-424
- [8] Ortiz M and Blume J A. Effect of Decohesion and Sliding on Bimaterial Crack-Tip Fields, *Int. of Fract.*, 1990(42): 117-128
- [9] Galatenko G V. Generalized Model of a Dugdale Crack, *Soviet Appl. Mech.*, 1989(25):260-265
- [10] Muskhelishvili N I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, P. Noordhoff Ltd, Groningen, Holland, 1953
- [11] Aravas N and McMeeking R M. Microvoid growth and failure in the ligament between a hole and a blunt crack tip, *Int. J. Fract.* 1985(29): 21-38
- [12] 《数学手册》, 高等教育出版社, 北京, 1979

A STRIP DAMAGED-PLASTIC ZONE MODEL OF INTERFACE CRACK UNDER TENSION LOADING

Wang Jiwei and Kuang Zhenbang

(*Institute of Engineering Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

Abstract A Strip damaged-plastic zone model of bimaterial interface crack under uniaxial tension loading is proposed in this paper, which is an extension of Dugdale model. It is assumed that the stresses are finite and satisfy the Mises yield condition at the end of plastic zone, the size of damage zone is proportional to an equivalent crack tip displacement $\delta = [(CTOD)^2 + (CTSD)^2]^{1/2}$. From these conditions the sizes of damage zone and plastic zone, the normal and tangential cohesive stresses, the *CTOD* and *CTSD* can be determined. The solutions are analysed in detail. The stresses near the crack tip do not have the terms with strong oscillatory singularity $r^{-1/2+i\epsilon}$ and the displacements just behind the tip do not have the terms with $r^{1/2+i\epsilon}$, but some weaker oscillatory terms may occur.

Key words interface crack, damaged-plastic zone, oscillatory singularity