

# 多孔介质中热对流的分叉机理研究

张涵信

(中国空气动力研究与发展中心, 四川绵阳 211 信箱, 621000)

**提要** 本文利用解析分析方法研究了数值模拟发现的多孔介质层中出现的对流分叉机理, 指出控制方程中的 Rayleigh 数, 是决定流动的特征参数. 当 Rayleigh 数小于临界数值时, 多孔介质内流动处于静止传热状态, 并且这种状态是稳定的. 如果 Rayleigh 数大于临界数值, 非线性方程出现分叉解. 文中指出, 存在多个使平凡解失稳而分叉的临界 Rayleigh 数, 当 Rayleigh 数由小到大经历这些临界数值时, 其由平凡解发展起来的分叉解的流态, 依次由单回流区转变为双回流区及三回流区. 理论分析给出了分叉解和分叉解的振幅方程, 阐明了分叉的机理, 其结论和数值结果定性一致.

**关键词** 分叉理论, 非线性力学, 多孔介质流动, 数值模拟

## 一、引 言

在航空航天工程中, 越来越多的采用多孔介质材料. 对多孔介质材料, 除机械性能有要求外, 其传热特性也是关心的. 因此近年来不少文章<sup>[1-6]</sup>研究多孔介质的传热问题.

当等厚度的多孔介质层水平安放时, 如果下表面的温度高于上表面, 文献研究指出<sup>[1-6]</sup>, 当上、下表面的温差很小时, 多孔介质内的气体处于静止状态, 此时多孔介质内仅为静态传热过程. 如果上、下表面的温差较大, 或者说上、下表面温差、气体的导热系数、热膨胀系数、比热、黏性系数、密度和重力加速度等组成的无量纲 Rayleigh 数达到一定数值时, 多孔介质内的气体出现回流. 数值模拟结果指出<sup>[7]</sup>, 随着 Rayleigh 数增加, 回流的数目和流态不断改变. 这种情况类似于水平平板上方流体层内热对流的 Benard 现象. 这是一个典型的非线性分叉问题. 研究该问题的分叉过程和机理, 就是本文的目的.

本文解析分析研究指出, Rayleigh 数是决定本问题热对流的重要参数, 当 Rayleigh 数较小时, 静态传热是稳定的, 但是当 Rayleigh 数超过临界值时, 静态传热开始丧失其稳定性, 多孔介质内的气体产生回流使热对流由此临界值起出现鱼叉型分叉. 理论上存在多个从平凡解失稳的临界点, 在平凡解基础上由这些临界点起出现的分叉解, 其流态依次从单回流转变为双回流和三回流…….

## 二、控制方程及边界条件

多孔介质层中不可压缩流体在遵循 Darcy 定律的条件下其支配流体运动的方程

本文于 1992 年 6 月 3 日收到第一稿, 1993 年 6 月 25 日收到修改稿.

组是

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= -Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

这里为了简单, 我们仅研究边长为  $L$  的方块多孔介质,  $x, y$  轴分别和方块的下边界和左边界重合, 沿  $z$  方向, 假设介质为无限长, 流动情况不改变, 因此问题是二维的. 在 (2.1) 中,  $u, v$  是  $x, y$  方向上的速度分量,  $\theta$  是温度,  $t$  是时间.  $u, v, \theta, x, y, t$  均为无量纲量, 它们分别用量  $\frac{\lambda}{\rho C_p L}, \frac{\lambda}{\rho C_p L}, \theta_w, L, L, \frac{\rho C_p L^2}{\lambda}$  进行无量纲化, 其中  $\rho, C_p, \lambda$  为气体的密度、定压比热和热传导系数,  $\theta_w$  是下、上表面的温度差, 不失一般性, 我们可假设上表面的温度为零. 式中  $Ra$  为 Rayleigh 数, 它的定义是

$$Ra = \frac{\rho C_p \beta \hat{g} L \theta_w}{\lambda}$$

式中  $\beta$  为膨胀系数 (量纲为  $1/\text{K}$ ),  $\hat{g} = \frac{g L^2}{\nu}$ ,  $\nu$  为气体的运动黏性系数,  $g$  为重力加速度. 从 (2.1) 第一式, 可引入流函数  $\Psi(x, y)$ , 它满足

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.2)$$

这样方程 (2.1) 可写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= -Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

在无量纲坐标系  $x, y$  内, 求解域是边长为 1 的正方形, 其各边上满足如下条件

$$\left. \begin{aligned} x = 0 \text{ 和 } x = 1, y \in (0, 1), \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \Psi = 0 \\ x \in (0, 1), y = 0, \theta = 1, \Psi = 0 \\ x \in (0, 1), y = 1, \theta = 0, \Psi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

(2.3) 和 (2.4) 即是我们出发的控制方程和边界条件, 显然方程组 (2.3) 是非线性的.

### 三、分叉解的分析研究

容易看出, 在满足 (2.4) 的条件下, 方程 (2.3) 有如下平凡解

$$\Psi_0 = 0, \quad \theta_0 = 1 - y$$

这个解相应于静态传热. 下面分析这个解的稳定性和在这个解的基础上产生的分叉解.

### 1. 平凡解的稳定性

给平凡解以扰动, 于是  $\Psi$  和  $\theta$  可表示为

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= 0 + \psi \\ \theta &= 1 - y + T \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

这里  $\psi$  和  $T$  为扰动小量. 将 (3.1) 代入 (2.3), 略去二阶以上的小量后, 可得以下线性化方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -Ra \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

相应的边界条件是

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ 和 } x=1, y \in (0, 1), \psi &= 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ y=0 \text{ 和 } y=1, x \in (0, 1), \psi &= 0, T = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

现在来研究扰动解随时间的发展. 为此令

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \bar{\psi}(x, y)e^{\omega t} \\ T &= \bar{T}(x, y)e^{\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

将 (3.4) 代入 (3.2) 和 (3.3) 后得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} &= -Ra \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \\ \omega \bar{T} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ 和 } x=1, y \in (0, 1), \bar{\psi} &= 0, \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = 0 \\ x \in (0, 1), y=0 \text{ 和 } y=1, \bar{\psi} &= 0, \bar{T} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

容易证明, 在满足 (3.6) 的条件下, 方程 (3.5) 的解是

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi} &= A \sin(n\pi x) \cdot \sin(m\pi y) \\ \bar{T} &= B \cos(n\pi x) \cdot \sin(m\pi y) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

其中  $n, m$  为非零的正整数,  $A, B$  为常量, 它们满足如下方程

$$\begin{bmatrix} \pi^2(n^2 + m^2) & Ra \cdot n\pi \\ n\pi & \pi^2(n^2 + m^2) + \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

由此可见, 若  $A, B$  有非零值, 要求以下方程成立

$$\begin{vmatrix} \pi^2(n^2 + m^2) & Ra \cdot n\pi \\ n\pi & \pi^2(n^2 + m^2) + \omega \end{vmatrix} = 0$$

这就得到

$$\omega = \frac{n^2}{n^2 + m^2} (Ra - Ra_c) \quad (3.8)$$

式中

$$Ra_c = \frac{\pi^2(n^2 + m^2)^2}{n^2} \quad (3.9)$$

我们称它为临界值. (3.8) 式表明, 当参数  $Ra < Ra_c$  时,  $\omega < 0$ , 这样 (3.4) 和 (3.1) 给出, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\psi \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow 1 - y$ , 因而平凡解是渐近稳定的. 但是如果  $Ra > Ra_c$ , 将有  $\omega > 0$ , 平凡解失去稳定性. 因为  $n, m$  可取非零的任意正整数, 所以有许多临界的  $Ra_c$ , 依大小顺序把它们表示为  $Ra_{c1}$ 、 $Ra_{c2}$ 、 $Ra_{c3}$ 、 $\dots$ , 于是可得表 1 给出的数值.

表 1 临界 Rayleigh 数  
Table 1 Critical Rayleigh number

$Ra_c$	relevant $n$	relevant $m$
$Ra_{c1} = 4\pi^2 = 39.48$	1	1
$Ra_{c2} = \frac{25}{4}\pi^2 = 61.68$	2	1
$Ra_{c3} = \frac{100}{9}\pi^2 = 109.66$	3	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

另一方面, 由 (3.8) 易知

$$\left. \frac{d\omega}{dRa} \right|_{Ra=Ra_c} \neq 0$$

根据文献 [8] 给出的分叉理论, 非线性方程 (2.3) 产生定态的超临界分叉解. 下面我们给出这种分叉解.

## 2. 方程 (2.3) 的定态分叉解

利用文献 [8] 的方法, 方程 (2.3) 在  $Ra_c$  附近的定态分叉解可用摄动法求得, 事

实上, 设  $\Psi, \theta$  和  $Ra$  可展开成如下级数

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= 0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \cdots \\ \theta &= 1 - y + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \cdots \\ Ra &= Ra_c + r_1\varepsilon + r_2\varepsilon^2 + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

这里  $\varepsilon$  为小参数. 当  $r_1, r_2$  求得后可确定它与  $(Ra - Ra_c)$  的关系. 将 (3.10) 代入 (2.3), 经整理后可得如下各级近似方程

$$L(Ra_c) \begin{bmatrix} \psi_i \\ \theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \cdots \quad (3.11)$$

这里  $i$  表示第  $i$  级近似方程,  $L(Ra_c)$  表示如下算子

$$L(Ra_c) = \begin{bmatrix} \nabla^2 & Ra_c \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \nabla^2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

其中  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . 我们可以求得, 当  $i = 1$  时

$$f_1 = 0, \quad g_1 = 0 \quad (3.13)$$

当  $i = 2$  时

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= -r_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \\ g_2 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

而当  $i = 3$  时

$$\left. \begin{aligned} f_3 &= -r_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - r_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \\ g_3 &= \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

相应各级近似的边界条件是

$$\left. \begin{aligned} x = 0 \text{ 和 } x = 1, y \in (0, 1), \frac{\partial \theta_i}{\partial x} = 0, \psi_i = 0 \\ y = 0 \text{ 和 } y = 1, x \in (0, 1), \theta_i = 0, \psi_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

利用 (3.11) 和 (3.13), 我们可以求得一级近似的解是

$$\begin{cases} \psi_1 = C \cdot \sin(n\pi x) \sin(n\pi y) \\ \theta_1 = D \cdot \cos(n\pi x) \sin(n\pi y) \end{cases}$$

式中  $n, m$  为非零的正整数.  $C, D$  为非零的待定量, 它们满足以下线性齐次方程

$$\begin{bmatrix} \pi(n^2 + m^2) & Ra_c \cdot n \\ n & \pi(n^2 + m^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = 0 \tag{3.17}$$

由此式可知, 要  $C, D$  取非零值, 必须要求式中系数矩阵的行列式为零, 由  $Ra_c$  的定义 (见 (3.9)), (3.17) 的系数矩阵的行列式恰好为零, 因此  $C, D$  是不为零的常量.

现在来求二级以上的近似解. 由于  $L(Ra_c)$  在向量  $(\psi_i, \theta_i)^T$  空间具有相同的矩阵结构, 且由一级近似知, 它对解的作用等于零值, 因此只有属于  $L(Ra_c)$  的零空间的  $(f_i, g_i)^T$  满足 Fredholm 条件, 我们才能求得二级以上的解. 根据 Fredholm 条件,  $(f_i, g_i)^T$  必须与向量  $(\varphi_1, \varphi_2)^T$  正交, 其中  $(\varphi_1, \varphi_2)^T$  由以下方程给出

$$L(Ra_c) \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = 0$$

这里  $L(Ra_c)$  是  $L(Ra_c)$  的伴随算符. 这样我们可以求得

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \\ \varphi_2 &= -\frac{nRa_c}{\pi(n^2 + m^2)} \cos(n\pi x) \sin(m\pi y) \end{aligned} \right\} \tag{3.18}$$

而正交的条件给出如下表达式

$$\int_0^1 \int_0^1 (\varphi_1 f_i + \varphi_2 g_i) dx dy = 0 \tag{3.19}$$

当一级近似解求出后, 由 (3.14) 可以求得

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= r_1 D \cdot n\pi \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \\ g_2 &= -C \cdot D \cdot n \cdot m\pi^2 \sin(m\pi y) \cos(m\pi y) \end{aligned} \right\} \tag{3.20}$$

将 (3.18)、(3.20) 代入 (3.19), 完成积分后得

$$r_1 = 0 \tag{3.21}$$

利用 (3.21), 二级近似的解就可进一步求得, 它可表达为

$$\left. \begin{aligned} \psi_2 &= E \cdot \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \\ \theta_2 &= F \cdot \cos(n\pi x) \sin(m\pi y) + \frac{C \cdot D \cdot n}{8m} \sin(2m\pi y) \end{aligned} \right\} \tag{3.22}$$

将 (3.22) 代入 (3.15), 可以求得

$$\begin{aligned} f_3 &= r_2 \cdot D \cdot n\pi \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \\ g_3 &= -E \cdot D \cdot nm\pi^2 \cos(m\pi y) \sin(m\pi y) \\ &\quad - C \cdot F \cdot nm\pi^2 \cos(m\pi y) \sin(m\pi y) \\ &\quad - \frac{1}{4} C^2 \cdot D \cdot n^2 \pi \cos(n\pi x) \sin(m\pi y) \cos(2m\pi y) \end{aligned}$$

将此式和 (3.18) 代入 (3.19), 完成积分后可得

$$r_2 = \frac{n^2 Ra_c c^2}{m^2 + n^2} \frac{1}{8} \quad (3.23)$$

引入

$$\beta = C \cdot \varepsilon$$

表示一级近似的  $\varepsilon\psi_1$  的振幅, 由 (3.10) 第三式和 (3.23) 可以得到

$$\beta^3 - \frac{8(m^2 + n^2)}{Ra_c n^2} (Ra - Ra_c) \cdot \beta = 0$$

当  $Ra < Ra_c$  时,  $\beta = 0$ , 而当  $Ra \geq Ra_c$  时

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{8(m^2 + n^2)}{Ra_c n^2} (Ra - Ra_c)} \quad (3.24)$$

这就给出了分叉解的振幅方程, 相应我们得到的解是

$$\left. \begin{aligned} &Ra < Ra_c \\ &\left\{ \begin{array}{l} \Psi = 0 \\ \theta = 1 - y \end{array} \right. \\ &R \geq Ra_c \\ &\left\{ \begin{array}{l} \Psi = \pm \sqrt{\frac{8(m^2 + n^2)}{Ra_c \cdot n^2} (Ra - Ra_c)} \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) + \dots \\ \theta = 1 - y \mp \frac{n}{\pi(n^2 + m^2)} \sqrt{\frac{8(n^2 + m^2)}{Ra_c \cdot n^2} (Ra - Ra_c)} \cos(n\pi x) \sin(m\pi y) + \dots \end{array} \right. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

图 1 是根据 (3.25) 画出的流线, 可以看出, 以平凡解为基础从  $Ra_{c1}$  开始的分叉解是单回流结构, 从  $Ra_{c2}$  开始的分叉解是双回流结构, 而从  $Ra_{c3}$  开始的分叉解是三回流结构. 图 1 还画出了相应的等温线. 我们认为, 由第一个分叉点  $Ra_{c1}$  开始的分叉解是最有实际意义的.

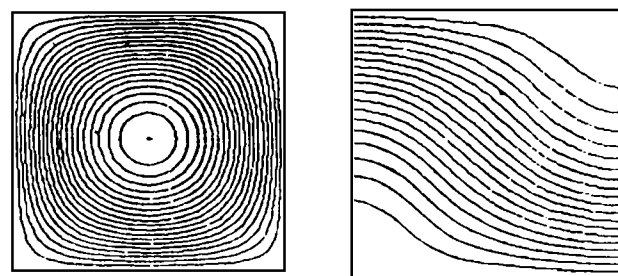
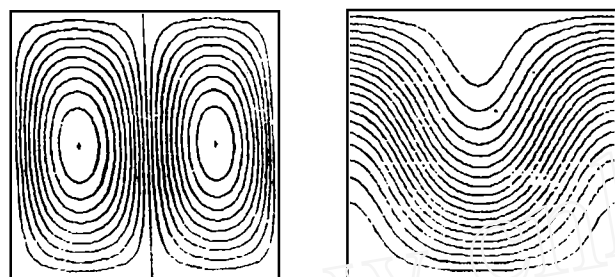
(a) Beginning from  $Ra_{c1}$ ,  $\beta = 1.884$ (b) Beginning from  $Ra_{c2}$ ,  $\beta = 1.178$ (c) Beginning from  $Ra_{c3}$ ,  $\beta = 1.047$ 

图 1 分叉解的流线(左)和等温线(右)

Fig.1 Streamlines (left) and temperature contours (right) of bifurcation solution

#### 四、与数值模拟结果的比较

为了验证上述分析的正确性, 本节与数值解的结果作一比较.

张树海曾用三次样条交替方向法数值求解了同一问题<sup>[7]</sup>. 他在计算时给定各种不同的  $Ra$ , 然后求其稳定解. 对于每个  $Ra$  的计算, 初始流场均取平凡解. 计算给出如下结果:

1. 当  $Ra < 39.5$  时, 总是存在稳定的平凡解; 当  $Ra > 39.5$  时, 开始出现分叉解. 可以看出, 数值计算给出的最小临界 Rayleigh 数, 同解析结果十分一致.

2. 除最小临界 Rayleigh 数外, 计算发现还有另外的临界 Rayleigh 数, 他们分别是 119.44, 697.2, ... 等. 当  $Ra$  介于 39.5 和 119.44 之间时, 分叉解为单回流流态; 当  $Ra$  介于 119.44 和 697.2 之间时, 分叉解为双回流流态; 当  $Ra$  超过 697.2 时, 分叉解为三回流流态. 数值计算给出的第二、三、... 临界 Rayleigh 数, 虽然和分析解的结果不同, 但是在流态方面, 两者是定性一致的. 为了和图 1 比较, 图 2 给出了计算得到的流线和等温线.



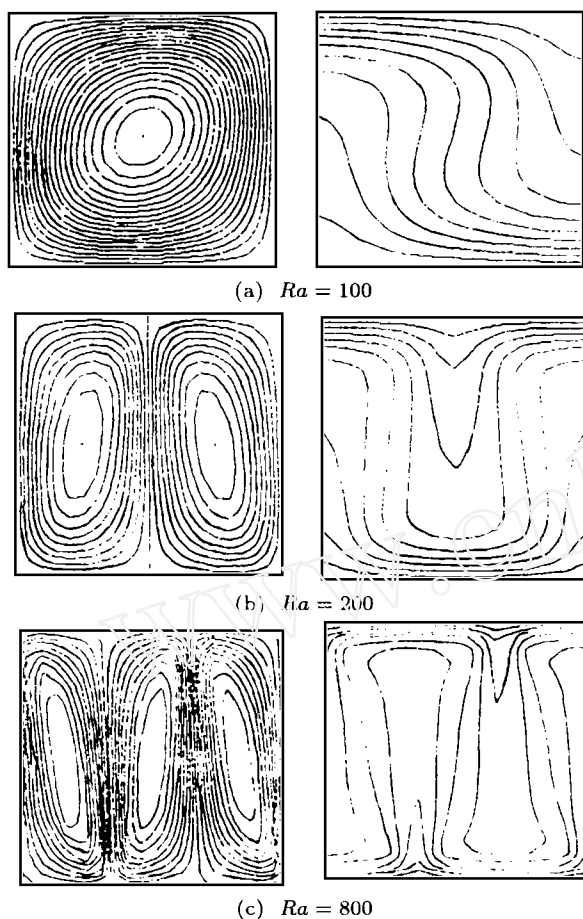


图 2 计算给出的流线(左)和等温线(右)  
Fig.2 Computed streamlines (left) and temperature contours (right)

### 五、简单的结语

对于非线性方程 (2.3) 和边界条件 (2.4) 所描述的多孔介质内的热对流，通过解析分析，我们给出了分叉解的机理，并证实数值模拟 [7] 所揭示的解的分叉现象是真实存在的。这样解析分析和数值模拟使我们有以下结论：

1.  $Ra$  是决定热对流的重要参数，平凡解  $\Psi = 0$  和  $\theta = 1 - y$  仅在  $Ra < Ra_{c1}$  时才是稳定的，当  $Ra > Ra_{c1}$  时，非线性方程的解开始出现分叉。
2. 存在  $Ra_{c1} < Ra_{c2} < Ra_{c3} \dots$  多个临界 Rayleigh 数。当  $Ra_{c1} < Ra < Ra_{c2}$  时，在平凡解基础上发展起来的分叉解为单回流流态，当  $Ra_{c2} < Ra < Ra_{c3}$  时，分叉解为双回流流态，当  $Ra_{c3} < Ra < Ra_{c4}$  时，分叉解为三回流流态。但是，除  $Ra_{c1}$  外，如何使数值模拟和解析分析所确定的  $Ra_{c2}, Ra_{c3}$  等一致起来，仍需做进一步的工作。

## 参 考 文 献

- [1] Elder JW. Steady free convection in porous medium heated from below. *JFM*, 1967, 27(part 1): 29-48
- [2] Elder JW. Transient convection in a porous medium. *JFM*, 1967, 27(part 3): 609-623
- [3] Horne RN and O'sullivan MJ. Oscillatory convection in a porous medium heated from below. *JFM*, 1974, 66(part 2): 339-352
- [4] Caltagirone JP. Thermoconvective instabilities in a horizontal porous layer. *JFM*, 1975, 72(part 2): 269-287
- [5] Kim S and Russel WB. Modelling of porous media by renormalization of the Stokes equations. *JFM*, 1985, 154: 269-286
- [6] Ramesh PS and Torrance KE. Numerical algorithm for problems involving boiling and natural convection in porous materials. *Numerical heat transfer*, part B, 1990, 17(1)
- [7] 张树海. 中国空气动力研究与发展中心报告. 1990
- [8] 尼科里斯和普利高津著. 罗久里, 陈奎宁译. 探索复杂性. 四川教育出版社, 1986

## MECHANISM OF BIFURCATION FOR THERMAL CONVECTION IN FLOW OF POROUS MEDIA AND NUMERICAL SIMULATION

Zhang Hanxin

(China Aerodynamics Research and Development Center,  
P.O. Box 211, Mianyang, Sichuan 621000, China )

**Abstract** The mechanism of bifurcations for the thermal convection flow of porous media is studied by analytical method. It is pointed out that the Rayleigh number  $Ra$  in the nonlinear flow equations is an important parameter to determine the flow characteristics. If  $Ra$  is less than the critical Rayleigh number  $Ra_c$ , the fluid in the porous medium is in static state, which is stable. If  $Ra > Ra_c$ , the solution of the flow equations in the porous media will bifurcate. There are a lot of critical Rayleigh numbers, and we can write them as  $Ra_{c1} < Ra_{c2} < Ra_{c3} < Ra_{c4} \dots$ . When  $Ra_{c1} < Ra < Ra_{c2}$ , the bifurcation solutions developed from the static solution are the flow pattern with one convectional circulation. If  $Ra_{c2} < Ra < Ra_{c3}$  and  $Ra_{c3} < Ra < Ra_{c4}$ , the bifurcation solutions evolve into the flow pattern with two and three circulations in turn.

**Key words** bifurcation theory, thermal convection, flow in porous media, numerical simulation