第 27 卷 第 6 期 力 学 学 报 Vol. 27, No.6
1995 年 11 月 ACTA MECHANICA SINICA Nov., 1995

线粘弹结构中的最优路径

刚芹果

(河北大学数学系，保定 071002)

摘要 讨论了二类结构中的最优路径：即三维可分离变量粘弹体与桁架．发现：(1) 粘弹体 (Maxwell 材料) 中的最优变形路径在 (0,T) 内是线性形式，仅在 $t=T$ 时刻有跳跃，同时指出以前研究中的不妥之处；(2) 桁架结构 (Maxwell 材料) 中的最优加载路径为突加载荷．

关键词 最优路径，桁架，粘弹体

寻找一条最优路径，是粘弹性结构的基本问题之一[1]，曾引起人们的广泛重视．其中包括：最优变形 (应变) 路径[2-4]，最优冷拉过程[5]、最优温度路径[6]等．文 [2—4] 对一维最优应变路径问题进行广泛研究，给出某些特殊情况下的结果，证明了解的单调性和不连续性．本文将上述问题推广到三维情况，并讨论由一维杆件组成的结构 —— 桁架中的最优加载路径．

1 三维可分离变量粘弹体中的最优变形路径

对于可分离变量粘弹体[7]，体力 $F_i(t)$，位移 $u(t)$，应力 $\sigma_{ij}(t)$ 和应变 $\varepsilon_{ij}(t)$ 具有如下形式

$$F_i(t)=F_{i0}F(t)\ ,\qquad \sigma_{ij}(t)=\sigma_{ij0}F(t) \tag{1.1}$$

$$u_i(t)=u_{i0}u(t)\ ,\qquad \varepsilon_{ij}(t)=\varepsilon_{ij0}u(t) \tag{1.2}$$

F_{i0}，σ_{ij0}，u_{i0}，ε_{ij0} 仅是空间变量 x_i 的函数． $F(t)$ 和 $u(t)$ 仅是时间 t 的函数，并有

$$F(0)=u(0)=0 \tag{1.3}$$

$$F(t)=k\int_0^t G(t-\tau)\mathrm{d}u(\tau) \tag{1.4}$$

k 为常数， $G(t)$ 是松弛函数．

在时间 $[0,T]$ 内，粘弹体的总变形能 W 为

$$W=W_0W_1 \tag{1.5}$$

$$W_0=k\int_V \sigma_{ij0}\varepsilon_{ij0}\mathrm{d}V\ ,\qquad W_1=\frac{1}{k}\int_0^T F(t)\mathrm{d}u(t)$$

1993-12-28 收到第一稿， 1994-12-19 收到修改稿．

本文所讨论的最优变形路径 $u(t)$，就是在 $[0,T]$ 内使 W_1 取最小值，不失一般性，令

$$u(T)=1 \tag{1.6}$$

应用文 [3] 中的方法，求得 $u(t)$ 的方程为

$$2\dot{G}(0)u(t)+\int_0^T \ddot{G}(|t-\tau|)u(\tau)\mathrm{d}\tau=\dot{G}(T-t) \tag{1.7}$$

它与一维情况下所得方程 [3] 相同．若 $G(t)$ 采用三参量形式： $G(t)=G_\infty+(G_0-G_\infty)\exp(-\alpha t)$，$G_\infty\geq 0$，$G_0-G_\infty\geq 0$，$\alpha>0$．从而由上式得

$$\ddot{u}(t)=0 \tag{1.8}$$

即在 $(0,T)$ 内， $u(t)$ 为线性形式

$$u(t)=a+bt \tag{1.9}$$

a，b 为待定常数．

下面讨论如何确定 a，b．将 (1.9) 代入 (1.7) 式

$$\alpha(a+bT)+b=\alpha \tag{1.10}$$

即

$$a=1-\frac{b(1+T\alpha)}{\alpha} \tag{1.11}$$

还需要一个含 a 和 b 的方程．文 [2,3] 中曾通过假设另一条件而得，即

$$u\left(\frac{T}{2}\right)=\frac{1}{2} \tag{1.12}$$

得

$$a=\frac{1}{2+\alpha T}, \qquad b=\frac{\alpha}{2+\alpha T} \tag{1.13}$$

$$u(t)=\frac{1}{2+\alpha T}(1+\alpha t) \tag{1.14}$$

可见它在 $t=0$ 和 $t=T$ 处都不连续．

值得注意的是，由条件 (1.12) 而得的路径 $u(t)$，是否真的就是最优路径．为此，应用关系 (1.11)，并注意到在 $t=0$ 和 $t=T$ 处， $u(t)$ 可能不连续 [3]，计算 W_1 得

$$W_1=\frac{1}{2}\left[G_0+(G_\infty-G_0)b^2T^2\right] \tag{1.15}$$

可见 W_1 是 b^2 的减函数．如将 (1.13) 代入，得

$$W_1=\frac{1}{2}\left[G_0+(G_\infty-G_0)\left(\frac{\alpha T}{2+\alpha T}\right)^2\right] \tag{1.16}$$

而文 [2,3] 中给出的 W_1 形式为

$$W_1=\frac{1}{2}\Big[G_0+(G_\infty-G_0)\Big(\frac{\alpha T}{1+\alpha T}\Big)\Big] \tag{1.17}$$

可见 $(G_\infty-G_0)$ 的系数不同．很容易由式 (1.4)，(1.5) 和 (1.9) 看出，W_1 应是 b^2 的函数 (1.16)，而不是 (1.17) 形式．

由式 (1.11)，可得出 b 的取值范围．因为 $u(t)$ 的单调性 [4]，故有 $0\le a\le 1$．从而由 (1.11) 得

$$\frac{\alpha}{1+\alpha T}\ge b\ge 0 \tag{1.18}$$

故由式 (1.16) 可见，当 b 取最大值 $\dfrac{\alpha}{1+\alpha T}$ 时，W_1 取最小值为

$$W_1=\frac{1}{2}\Big[G_0+(G_\infty-G_0)\Big(\frac{\alpha T}{1+\alpha T}\Big)^2\Big] \tag{1.19}$$

相应的最优路径 $u(t)$ 为

$$u(t)=\frac{\alpha t}{1+\alpha T} \tag{1.20}$$

$u(t)$ 仅在 $t=T$ 处不连续．并且还可知，由式 (1.19) 所得 W_1 值小于由 (1.16) 计算而得的值．故由 (1.12) 求得的路径 (1.14) 不是所求的最优路径．

同样，由式 (1.19) 和 (1.20) 得，当 $\alpha\to 0$ 时，有

$$W_1\to\frac{1}{2}G_0\,,\qquad u(t)\to H(t-T) \tag{1.21}$$

$H(t)$ 为阶跃载荷，即 $u(t)$ 为在 $t=T$ 时刻的突然加载．当 $\alpha\to\infty$ 时，有

$$W_1\to\frac{1}{2}G_\infty,\qquad u(t)\to\frac{t}{T} \tag{1.22}$$

即 $u(t)$ 为线性加载．

对于不可分离变量的三维粘弹体，如何寻找其最优变形路径，有待进一步研究．

2 桁架结构中的最优加载路径

桁架结构，主要受外力作用．于是，本节讨论外力的最优路径问题．不妨假设桁架中各杆的力学性质相差一个常数倍，即其柔性模量 $J_i(t)$ 可表示为

$$J_i(t)=d_iJ(t) \tag{2.1}$$

$i=1,2,\cdots,n$，d_i 是常数．桁架受 m 个外力 $p_j(t)$ 作用，各杆的轴力 $N_i(t)$ 可表示为 [8]

$$N_i(t)=D_{ij}p_j(t)\qquad j=1,2,\cdots,m \tag{2.2}$$

D_{ij} 是与杆横截面积、长度以及 d_i 在关的常数．

桁架在 $[0,T]$ 内的总变形能为

$$W=\int^T\sum_{i=1}^{n}N_i(t)l_i\Big[\int_0^t\dot{J}_i(t-\tau)\dot{N}_i(\tau)\mathrm{d}\tau+J_i(0)\dot{N}_i(t)\Big]\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

l_i 为第 i 杆的长度.

W 取最小值时的路径 $p_j(t)$, 即为最优加载路径. 应用变分法, 得 $p_j(t)$ 的方程为

$$2p_i(t)\dot{J}(t) + \int_0^T \ddot{J}(|t-\tau|)p_j(\tau)\mathrm{d}\tau = 0 \tag{2.4}$$

若 $J(t)$ 采用三参量形式: $J(t) = J_0 - (J_\infty - J_0)\exp(-\beta t)$. 由式 (2.4) 得

$$p_j(t) = a_j + b_j t \tag{2.5}$$

a_j, b_j 为待定常数. 将上式代回到 (2.4) 式得

$$\beta(a_j + b_j T) + b_j = 0 \tag{2.6}$$

即

$$a_j = -\frac{b_j}{\beta}(1 + \beta T) \tag{2.7}$$

设在 $t = T$ 时, $p_j(t) = p_{j0} > 0$, 则由最优路径的单调性 [4], 故有: $a_j \geq 0$, $b \geq 0$. 从而由 (2.7) 式可知

$$a_j = b_j = 0 \tag{2.8}$$

即 $p_j(t)$ 的形式为

$$p_j(t) = p_{j0}H(t-T) \tag{2.9}$$

$p_j(t)$ 为突加载荷.

值得说明的是, $p_j(t)$ 的形式 (2.9) 是在假设 (2.1) 下而得的. 若各杆的柔性模量 $J_i(t)$ 互相不成比例, 可能有其它形式解.

3 结论与讨论

从以上分析可知, 关于粘弹性结构最优路径的研究, 还有许多工作要做, 需要做进一步的研究. 因为最优路径是在变形能取最小值情况下而得的, 所以, 关于这方面的研究, 具有明显的实际意义, 即用最小的功, 使结构达到同样的状态.

参 考 文 献

1 Zyczkowski M. Optimal structural design under creep conditions. *Appl Mech Rev*, 1988, 41: 453–461
2 Breuer S. The minimizing strain-rate history and the resulting greatest lower bound on work in linear viscoelasticity. *Z Angew Math Mech*, 1969, 49: 209–213
3 Gurtin ME, MacCamy RC, Murphy LF. On optimal strain paths in linear viscoelasticity. *Q Appl Math*, 1979, 37: 151–156
4 Spector SJ. On monotonicity of the optimal strain path in linear viscoelasticity. *Q Appl Math*, 1980, 38: 369–373
5 Weitsman Y. Optimal cool-down in linear viscoelasticity. *J Appl Mech*, 1980, 47: 35–39
6 Gurtin ME, Murphy LF. On optimal temperature paths for thermorheologically simple viscoelastic materials. *Q Appl Math*, 1980, 38: 179–189
7 Christensen RM. Theory of viscoelasticity. New York: Academic Press, 1982
8 龙驭球, 包世华. 结构力学教程, 上册, 北京: 高等教育出版社, 1988

ON OPTIMAL PATH OF LINEAR VISCOELASTIC STRUCTURES

Gang Qinguo

(*Depatment of Mathematics, Hebei University, Baoding* 071002, *China*)

Abstract We discussed the optimal path of two kinds of structures: (1) three dimensional separable variable viscoelasticity; and (2) truss. We have shown: 1) the optimal deformation path of viscoelasticity (Maxwell material) is linear on $(0,T)$ and only suffers jump discontinuance at $t=T$. We also pointed out the mistakes of some previous studies; 2) the optimal loading path of a truss (Maxwell material) is an impulsive one.

Key words optimal path, truss, viscoelasticity