

轴压圆柱壳后屈曲的有限元分析

朱达善

(华中理工大学力学系, 武汉 430074)

摘要 采用流动的曲线坐标建立了大位移下的样条曲壳元, 利用它分析了轴压圆柱壳的后屈曲问题. 一个跨越和求取分支点的技巧和对弧长法的一个改进在文中提出. 计算所得的载荷 - 轴向缩短曲线较解析解更接近于实验结果, 所得的后屈曲波形也和实验相当符合.

关键词 轴压圆柱壳, 后屈曲, 大变形薄壳理论, 非线性有限元, 样条有限元法

引 言

轴压圆柱壳的弹性后屈曲是力学上的一个经典问题. 40 年代以来, 在 Kármán 和钱学森的开创性研究之后, 许多研究者在理论上进行了大量的研究, 在实验上也做出了极为精细的实验. 关于这些工作, 文献 [1—4] 都已有较全面的综述. 至今, 这个问题一方面仍吸引着一些力学工作者进行深入的理论研究; 另一方面, 随着航空、航天工业对各种轻型结构的采用, 了解结构在屈曲后的承载能力的实际需求也要求对这类问题有深入全面的了解. 有限元法已经取得了广泛的成就. 但是, 由于轴压圆柱壳的分支型屈曲性质、高度的缺陷敏感度和迭代极难收敛等困难, 对其后屈曲的有限元分析却迟迟难以计算出一个满意的结果. 文献 [5—7] 报导的分析或者未能得出与实验较一致的后屈曲曲线, 或者所得曲线未与实验结果相比较.

本文在采用流动的曲线坐标导出的一般薄壳的运动学关系的基础上, 建立了大位移下的样条曲壳元, 利用它对轴压圆柱壳的后屈曲问题进行了成功的分析. 一个跨越和求取分支点的特殊技巧及对在有限元中较常用的弧长法的一个简单而又很有效的改进在文中提出并被应用. 计算出的后屈曲曲线较理论解更接近于实验结果. 计算出的后屈曲波形不仅在形状上而且在波峰、波谷的幅值上也与实验结果较接近.

1 薄壳的运动学关系

对于轴压圆柱壳的后屈曲分析, 一个可靠的、足够精确和有效的有限元公式系统是至关重要的. 本文采用流动的曲线坐标, 在文献 [8, 9] 阐述的一般壳的理论的基础上, 进行了一些简化, 导出了一个适于薄壳的较精确的非线性应变 - 位移关系, 据此建立了一种非线性样条曲壳元, 以用于轴压圆柱壳的后屈曲分析.

考虑一薄壳单元和它的中面, 中面上任一点的位置由曲线坐标 S^1, S^2, S^3 确定. S^3 垂直于未变形的中面. 根据张量分析和 Green 应变定义, 一般薄壳的面内

1993-12-07 收到第一稿, 1994-07-12 收到修改稿.

应变 $\gamma_{\alpha\beta}$ 和位移间的关系可以导出如下

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[u_{\alpha} ||_{\beta} - b_{\alpha\beta} u_3 + u_{\beta} ||_{\alpha} - b_{\beta\alpha} u_3 + (u_{\lambda} ||_{\alpha} - b_{\lambda\alpha} u_3)(u^{\lambda} ||_{\beta} - b_{\beta}^{\lambda} u_3) + (u_{3,\alpha} + u_{\gamma} b_{\alpha}^{\gamma})(u_{3,\beta} + u_{\rho} b_{\beta}^{\rho}) \right] \quad (1)$$

式中 u_{α} 和 u^{λ} 分别是位移的协变和逆变分量而 $b_{\lambda\alpha}$ 和 b_{α}^{λ} 分别是曲率张量的协变和混变分量 $u_{3,\alpha}$ 表示 $\frac{\partial u_3}{\partial S^{\alpha}}$, “||” 表示在 S^1 - S^2 坐标面上的协变导数, 即

$$u_{\beta} ||_{\alpha} = u_{\beta,\alpha} - u_{\gamma} \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} \quad (2)$$

式中 $\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}$ 是对中面的 Christoffel 符号. 求和约定是对 $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \rho$ 取 1, 2. 在 (1) 式中除了 Kirchhoff-Love 假设和薄壳近似 (即相对于壳厚与曲率半径之比的一阶项忽略其二阶项) 外, 没有采用其他的简化.

为了导出曲率改变 $\omega_{\alpha\beta}$ 的公式, 需要做一些粗糙的近似, 而且所得到的公式在实施计算时是不方便的. 考虑到已采用 Kirchhoff-Love 假设的近似, 对于 $\omega_{\alpha\beta}$ 的精确的表达已意义不大. 为了简便, 只考虑其线性部分. 计算实践证明, 对于薄壳. 在不很大的转角下, 即使对相当复杂的变形, 由这些简化引起的误差是相当小的.

根据以上一般薄壳的关系式, 对不同的壳体建立适当的曲线坐标, 将其具有的 Christoffel 符号和曲率张量值代入到式 (1), (2) 中, 而 $\omega_{\alpha\beta}$ 取其通常的线性部分, 便可得到相应的应变 - 位移关系式. 例如, 对于曲率为 K 的圆柱壳, 取未变形中面的经线和纬线分别为 S^1, S^2 , 则度量张量 $a_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} 为 Kronecker 符号), 并有

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} &= 0, \quad b_2^2 = b_{22} = -K \\ b_{\alpha}^{\beta} &= b_{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{当 } \alpha, \beta \text{ 不同时为 } 2 \text{ 时}) \end{aligned}$$

同时, 有 $u_i = u^i$. 记 u_1, u_2, u_3 分别为 u, v, w , 则可以得到在我们计算的问题中使用的应变 - 位移关系

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{,1} + \frac{1}{2} [(u_{,1})^2 + (v_{,1})^2 + (w_{,1} + 2w_{,1})w_{,1}] - S^3 w_{,11} \\ \varepsilon_{22} &= v_{,2} + Kw + \frac{1}{2} [(u_{,2})^2 + (v_{,2} + Kw + 2K\tilde{w})(v_{,2} + Kw) \\ &\quad + (w_{,2} + 2\tilde{w}_{,2} - Kv)(w_{,2} - Kv)] - S^3 (w_{,22} - Kv_{,2}) \\ \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} &= u_{,2} + v_{,1} + u_1 u_{,2} + v_1 (v_{,2} + Kw + K\tilde{w}) + \frac{1}{2} (w_{,1} + 2\tilde{w}_{,1})(w_{,2} - Kv) \\ &\quad + \frac{1}{2} (w_{,2} + 2\tilde{w}_{,2} - Kv)w_{,1} - 2S^3 (w_{,12} - Kv_{,1}) \end{aligned}$$

式中 \tilde{w} 是所考虑的在 w 方向的初始缺陷.

根据上述关系和位移增量变分原理, 采用总体 Lagrange 增量表述、与 Green 应变变在能量上共轭的第二类 Piola-Kirchhoff 应力, 并采用具有 C_2 连续性的 B_3 样条函

数进行位移插值, 从而建立了一个对于光滑壳无须进行从单元局部坐标到总体坐标的坐标变换的曲的连续壳元. 限于篇幅, 在此不详述.

2 解技术

2.1 跨越和求取分支点的技术

对于某些结构, 例如一个无偏心加载的压杆, 如果没有任何缺陷和扰动, 则它就不会发生屈曲而会一直处于不稳定的弹性平衡状态直至被压至屈服. 对于数值模拟来说, 计算误差即相当于给结构引入了一个缺陷或扰动. 如果引入的这种缺陷和扰动反映在压杆上是对称的或是等值反向的, 或者由于其他原因其影响实际不起作用, 则同样也不会有弹性屈曲发生. 对于圆柱壳的情况也与此类似. 对于一个根据足够精确的公式系统小心编制的有限元程序, 对分支型屈曲且不考虑材料的屈服时, 计算实践也表明, 载荷可能远超过分支点也不屈曲, 平衡路径将沿着原来的方向继续延伸. 如果由计算误差引入的缺陷或扰动足够, 则在低于分支点的某处, 结构会产生屈曲. 但由于这样引入的缺陷或扰动的具体形式和来源不清, 因而平衡路径究竟是在怎样的一个分支上不能预先确定, 分支点也难以求出.

为了求取一个在均匀轴压下的完善的圆柱壳的后屈曲平衡路径, 本文提出下列的方法. 首先给圆柱壳一个小的缺陷 \bar{w} 进行增量-迭代计算, 直到通过上极限点并到达一个能较快收敛的区域. 然后逐步减小缺陷, 直到缺陷 \bar{w} 为零. 此后计算的平衡路径就应是完善壳的平衡路径. 从这一 \bar{w} 为零的点可分别正向或反向求取平衡路径. 反向前进可直到与完善壳的不屈曲平衡路径相交, 得到的交点即是分支点; 正向前进便可求得完善壳的全部后屈曲平衡路径. 逐步减小缺陷的方法可通过在 \bar{w} 上乘以一小于 1 的正数因子来进行. 如果不收敛, 则减少该增量步中因子缩小的幅度重新迭代; 如果收敛, 则继续减小因子进行下一增量步的计算. 这一方法在本文叙及的有限元分析中已表明是很有效的.

2.2 对弧长法的一个改进

弧长迭代技术在过去十余年里已较广泛的被采用. 最初被 Wempner^[10] 和 Riks^[11] 建议的弧长方法, 当用于有限元中时将破坏刚度矩阵的带状性和对称性. 为了能在有限元方法中有效地使用, 对这种弧长法有许多修改, 如文献 [12—14]. 其中在国际上应用较广的是由 Crisfield 建议的方法^[15]. 但是该方法在求取轴压圆柱壳的后屈曲平衡路径这类极难收敛的问题中, 为了使迭代收敛, 增量步必须取得非常小. 同时, 跨越复杂区段的能力仍得不到保证. 为此, 对文献 [15] 的弧长法建议一个简单而又很有效的改进, 其内容是: (a) 在使用文献 [15] 的弧长法求得最初 \bar{n} 个平衡点之后, 利用已求得的平衡点以弧长为自变量使用 Lagrange 插值、外插预测下一平衡点的位置. 可以使用三点或四点的外插, 前者相当于在 $n+1$ 维空间内的一超平面曲线上的外插; 后者则是在一超空间曲线上的外插, 它适用于极难收敛的问题. (b) 求取切线刚度矩阵时, 不用前一平衡点的位移值而用外插预测点的位移值来计算, 由于此预测点更接近于待求平衡点, 故这样求得的切线刚度阵能加速迭代的收敛. (c) 在文献 [15] 的弧长法中, 对每个增量步内的第一个迭代步, 在求取载荷因子的增量 $\Delta\lambda_1$ 时, 需要计算切线刚度阵的正定性或计算增量功来选择 $\Delta\lambda_1$ 的符号. 在建议的改

进中， $\Delta\lambda_1$ 直接取外插预测的值 (包括其符号)，因而上述的选择及有关的计算不再需要。计算实践表明，以上的改进在轴压圆柱壳这样极难收敛的问题中，在难收敛的区段，计算效率可较文献 [15] 的弧长法提高 10 倍以上，见表 1。一般来说，问题越难收敛，上述改进的效果越显著。对于不很难收敛的问题，改进的效果可能提高效率不到 1 倍。

表 1 迭代方法的比较 (轴压下有缺陷的圆柱壳，通过上极限点)

Table 1 A comparison of iteration methods (the circular cylindrical shell with imperfections under axial compression, pass through the upper limit point)

Method	Load range (P/P_{cr})	Number of increment steps	Total number of iteration	C.P.U. time (s)
Commonly used arc-length method ^[15]	0.6341-0.5794	11	34	3328
Proposed method	0.6341-0.5775	1	3	303

3 轴压完善壳的计算结果

被计算的壳的半径 $R = 100\text{mm}$ ，厚度 $h = 0.247\text{mm}$ ，长度 $L = 71.9\text{mm}$ ，杨氏模量 $E = 5.56\text{GPa}$ ，波桑比 $\mu = 0.3$ ，边界条件是

$$x = \pm \frac{L}{2} : v = w = w_x = 0, \quad u = \text{const}$$

式中 x 沿着壳体的母线方向，而 y 沿着圆周方向， z 是法向向外。 u, v, w 是相应方向的位移。上述壳的参数和边界条件是被文献 [4] 试验和分析的圆柱壳之一。计算是对一个给定的失稳波数 $n = 10$ 进行的。利用周期性和对称性，只取 $L/2$ 长和 π/n 圆弧面及相应的周边边界条件进行计算。计算网格为 6×6 ，采用更细的网格的计算得到了同样的结果。计算结果如图 1 所示。图中也绘出了文献 [4] 的解析解和由精细的实验得到的实验曲线，以及文献 [5] 用有限元法得到的曲线。图中的 P_{cr} 是无限长圆柱壳的经典失稳载荷，即 $P_{cr} = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\mu^2)}}$ 。从图中可以看出，用本文得到的结果较解析解更接近于实验曲线。图 2 绘出了在下极限点附近

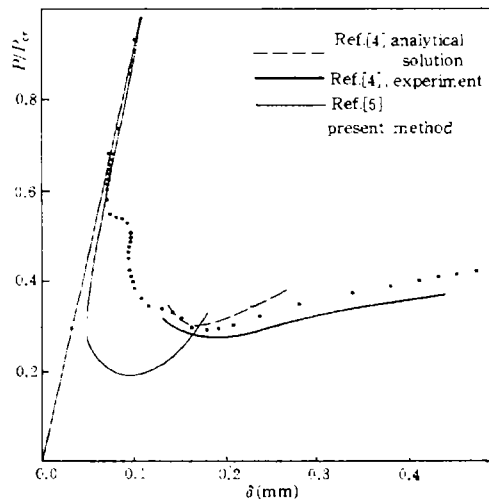


图 1 轴压完善圆柱壳的载荷 - 边缘缩短曲线
Fig.1 Load versus edge-short curve for a perfect circular cylindrical shell under axial compression

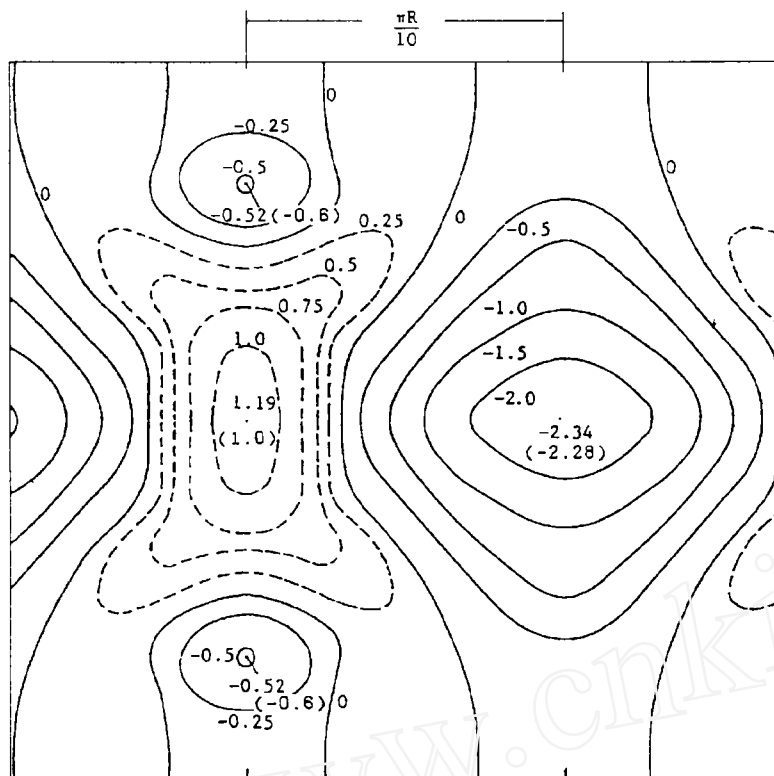


图2 后屈曲形状 ($n = 10$, $P = 373.8\text{N}$, $\delta = 0.178\text{mm}$. • 实线表示向内的位移 $-w[\text{mm}]$, 带括号的数据是文献 [4] 的实验结果)

Fig.2 Postbuckling shape for computed shell: $n = 10$, $P = 373.8\text{N}$, $\delta = 0.178\text{mm}$. Solid lines represent inward displacement $-w[\text{mm}]$. Data with brackets are the experiment result from Ref.[4]

的变形图, 图中也标出了文献 [4] 报导的由实验得到的波峰、波谷数据. 可以看出, 用本方法计算的结果, 不仅在波形形状, 而且在波峰、波谷的幅度上都和精细的实验结果较好的一致. 由于所绘的波形只是在下极限点附近计算所得的平衡点的波形, 如果特意去搜索下极限点, 是有可能使波峰、波谷的数值与实验值更接近的. 此外, 从图 1 中也可看到, 在分支点与下极限点之间有类似于在实验中观察到的二次屈曲的现象发生, 从而使平衡路径似乎是一个沿着波数不同的后屈曲路径的下包络线. 但是, 这一段平衡路径的位置多半是不正确的, 因为计算仅取 $\pi R/10$ 的弧壳进行, 它不可能正确地描述出 $n > 10$ 的完整的波形. 不过这表明, 如果取半个圆周的弧壳来进行计算, 用提出的方法多半是有能力描绘出正确地反映二次屈曲的平衡路径的. 当然这样做首先会对计算机的能力提出相当高的要求.

参 考 文 献

- 1 Esslinger M, Geier B. Postbuckling behavior of Structures. New York: Springer-Verlag, 1975: 82-132
- 2 Sheinman I, Simitses GJ. Buckling and postbuckling of imperfect cylindrical shells under axial compression. *Computers & Structures*, 1983, 17(2): 277-285
- 3 中国科学院力学研究所固体力学研究室壳组. 加筋圆柱曲板与圆柱壳. 北京: 科学出版社, 1983, 260-274

- 4 Yamaki N. Elastic stability of circular cylindrical shells. Amsterdam. New York: Oxford: Elsevier, 1984: 141-262
- 5 Maewal A, Nachbar W. Stable postbuckling equilibria of axially compressed, elastic circular cylindrical shells: A finite-element analysis and comparison with experiments. *J of Applied Mechanics, Tran of ASME*, 1977, 44: 475-481
- 6 Kröplin B-H. Postbuckling instability analysis of shells using the mixed method. in E Ramm, Buckling of Shells, Proceedings of a State-of-the-Art Colloguium, Universität Stuttgart, Germany, 1982. Springer-Verlag, 1982, 175-199
- 7 Bellini PX, Chulya A. An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equation. *Computers & Structures*, 1987, 26(1/2): 99-110
- 8 Flügge W. Tensor analysis and continuum mechanics. Springer-Verlay, 1972
- 9 Mason J. Variational, incremental and energy methods in solid mechanics and shell theory. Elsevier Scientific Publishing Company, 1980
- 10 Wempner GA. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *I J Solids Structures*, 1971, 7: 1581-1599
- 11 Riks E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *J Applied Mechanics*, 1972; 39: 1060-1066
- 12 Ramna E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. in W. Wunderlich, E. Stein and K.J. Bathe, Nonlinear finite element analysis in structural mechanics, Berlin; Springer, 1981, 63-69
- 13 Forde BWR, Stierner SF. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures*, 1987, 27(5): 625-630
- 14 苏先樾, 王颖坚, 武际可, 胡海昌. 含参数的非线性方程组的数值解法. *计算结构力学及其应用*, 1988, 5(3): 1-9
- 15 Crisfield MA. A fast incremental/iterative solution procedure that handles "Snap-through". *Computers & Structures*, 1981, 13: 55-52

POSTBUCKLING ANALYSIS OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL UNDER AXIAL COMPRESSION BY FINITE ELEMENT METHOD

Zhu Dashan

(Department of Mechanics Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract Present paper reports a numerical analysis for the postbuckling problem of the circular cylindrical shell under axial compression using a spline curve shell element which is based on the convected curvilinear coordinates. An artifice of passing through and evaluating bifurcation points and an improvement for the arc-length method are presented. The load versus edge-short curve obtained is closer to the experiment result than the analytical solution and the postbuckling shape obtained is good agreement with the experiment result.

Key words circular cylindrical shell, postbuckling, large deformation shell theory, spline finite element, nonlinear finite element