

软铁磁薄板磁弹性屈曲的理论模型¹⁾

周又和 郑晓静

(兰州大学力学系, 兰州 730000)

摘要 铁磁弹性薄板的磁弹性屈曲问题一直作为电磁—弹性力学相互作用的一个基本模型进行研究, 而作用在其磁介质上的磁力计算则是定量理论预测准确与否的关键。到目前为止, 文献上已有的理论模型对悬臂铁磁梁式悬臂板在横向磁场中磁弹性屈曲的理论预测值始终高于实验值, 有的甚至相差 100% 左右。本文基于电磁力计算的微观安培电流模型, 严格给出了软铁磁薄板等效横向磁力的宏观计算表达式。在此基础上, 建立了电磁—力学相互耦合作用的非线性理论模型。该模型能描述铁磁薄板结构在非均匀横向磁场环境中的磁弹性失稳(或屈曲)。其定量分析采用了有限元法和有限差分法相结合。数值结果显示: 本模型给出的磁弹性屈曲的临界磁场值与实验值符合良好。与此同时, 文中还对文献中认为较成功的 Moon-Pao 模型的基本假设进行了分析。定量结果发现: Moon-Pao 理论模型的基本假设仅在梁式板的长厚比 L/h 比较大时(约在 200 左右), 是可以接受的, 而当 L/h 较小时, 该假设将导致理论值与实验值的较大误差。 L/h 比值越小, 理论值与实验值的误差越大。

关键词 软铁磁介质, 磁弹性屈曲, 薄板, 耦合效应

引 言

当一个未被磁化的软铁磁材料的弹性结构处于一静磁场中时, 磁场对磁性材料形成一个较为显著的力场。在结构内部的弹性约束力仅能平衡这种磁力时, 结构所处的平衡构形成为不稳定的, 这种现象就称为结构的磁弹性屈曲。随着核工业、高技术等领域的发展和其它强磁结构应用的日益增多, 铁磁结构在磁场中的稳定性问题就愈来愈被这些技术部门以及力学工作者所关注^[1]。

Moon 和 Pao^[2]首先对处于外加均匀横向磁场中铁磁悬臂板的屈曲进行了实验研究。他们观察到: 当外加磁场达某一临界值时, 板将发生失稳; 失稳临界值与板的长厚比 L/h 呈 $3/2$ 次幂的关系; 失稳构形关于板失稳前的构形对称。为了对这一实验现象进行理论模拟, 他们建立了一个理论模型——Moon-Pao 模型。模型所依据的二个最基本的假设是: 1) 体力偶假设: 磁场作用于板上的力只有力偶且力偶矢位于板面内, 指向沿宽度方向; 2) 线性假设: 磁场作用在板上的分布力偶与板的挠角成正比。这一模型能较好地定性反映实验所观察到的主要现象, 从而大大地推动了磁弹性稳定的研究^[3~7]。但是, 由该模型所得到的临界屈曲磁场值普遍高出实验值, 有的甚至高出实验值 100~200%。这大大影响了该模型的应用价值。

¹⁾国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助课题 《力学学报》英文版 1996 年 Vol 12, No. 3 已刊登本文
1995-10-11 收到

有一大批学者为解释或修正Moon-Pao模型与实验值的较大差别进行了大量的工作。Miyata^[8]考虑了板宽对临界失稳值的影响; Popeler^[9]考虑了缺陷对临界值的修正; van de Ven^[10]等试图建立新的模型。这些工作都是在承认Moon-Pao模型的二个基本假设的前提下进行的, 他们都没能使Moon-Pao模型中的致命问题得以彻底解决。Peach^[11]等曾对模型所采纳的线性假设提出怀疑, 但他们没能进而提出新的改进措施。这样, 对Moon-Pao的实验结果给出准确的定量模拟成为磁弹性稳定研究领域的一个著名的焦点问题, 一直悬而未决。

本文基于电磁学和铁介质材料的基本理论, 得到磁场与铁磁介质相互作用的力效应并非磁体力偶而是磁体力。进而, 不失一般性地建立了横向磁场中铁磁弹性板非线性变形的基本方程。为验证该模型的可靠性, 文中对Moon和Pao所处理的均匀横向磁场中的铁磁梁式板进行了具体计算, 所得到的理论临界失稳值与Moon-Pao的实验值吻合较好。与此同时, 从理论上和数值计算上证明导致Moon-Pao模型与实验值存在较大差别的根本原因在于体力偶假设的不合理性。

1 磁场与磁效应的描述

考虑一未被磁化的软铁磁材料的弹性薄板置于一与板中面垂直的静磁场中。依分子环流理论^[12], 磁性介质(即薄板)内部的各分子环流的磁矩在外磁场作用下将沿外磁场方向排列起来——介质被磁化, 从而在物体内部形成新的磁场。同时, 板受到磁体力和磁体力偶的作用。这些磁体力和磁体力偶与外加磁场以及板的变形相互影响, 导致这类电磁-力相互耦合问题的复杂性。这里, 我们首先给出板内外磁场的基本方程, 然后导出磁场与铁磁板相互作用的力效应。

1.1 磁场的基本方程

图1所示厚度为 h , 磁极化率为 χ 的软铁磁弹性薄板处于外加非均匀横向磁场 $B_0(x, y, z)$ 中。 $B_0(x, y, z) = B_0(x, y, z)k$ (k 为 z 轴方向单位矢量)。记板内外区域分别为 Ω_1 和 Ω_2 , 其交界面为 S 。当外加磁场为无电流、无电荷分布和无感应电流的静磁场时, 由Maxwell方程^[12]有

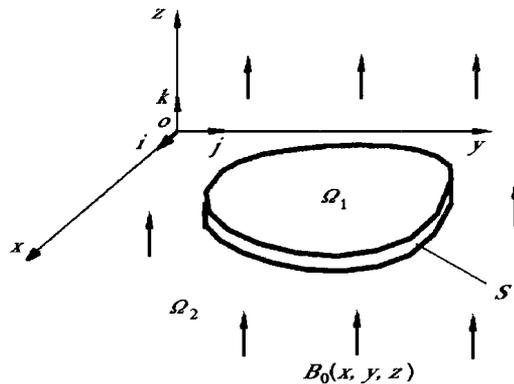


图1 处于外加横向磁场中的软铁磁弹性薄板

Fig. 1 Soft ferromagnetic plates placed in transverse magnetic field

$$\nabla \cdot B_1(x, y, z) = 0, \quad \nabla \times H_1(x, y, z) = 0, \quad \text{在 } \Omega_1 \text{ 内} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot B_2(x, y, z) = 0, \quad \nabla \times H_2(x, y, z) = 0, \quad \text{在 } \Omega_2 \text{ 内} \quad (1.2)$$

$$n \cdot (B_1 - B_2) = 0, \quad n \times (H_1 - H_2) = 0, \quad \text{在 } S \text{ 上} \quad (1.3)$$

$$B_2(x, y, z) = B_0(x, y, z), \quad \text{在无穷远处} \quad (1.4)$$

这里, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$ 为微分矢量算子; n 为磁介质的表面法线矢量; $B_1(x, y, z)$ 和 $B_2(x, y, z)$ 分别为磁介质内外的磁感应强度矢量; $H_1(x, y, z)$ 和 $H_2(x, y, z)$ 分别为其磁场强度矢量且有

$$B_1(x, y, z) = \mu_0 \mu_r H_1(x, y, z) \quad (1.5)$$

$$B_2(x, y, z) = \mu_0 H_2(x, y, z) \quad (1.6)$$

其中 μ_0 为真空磁导率; μ_r 为相对磁导率

取磁标势函数 $\Phi(x, y, z)$, 使得

$$H_1(x, y, z) = -\nabla \Phi_1(x, y, z), \quad H_2(x, y, z) = -\nabla \Phi_2(x, y, z) \quad (1.7)$$

则方程 (1.1) ~ (1.4) 可化为如下方程

$$\nabla^2 \Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \text{在 } \Omega_1 \text{ 内} \quad (1.8)$$

$$\nabla^2 \Phi_2(x, y, z) = 0, \quad \text{在 } \Omega_2 \text{ 内} \quad (1.9)$$

$$\mu_r \frac{\partial \Phi_1(x, y, z)}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2(x, y, z)}{\partial n}, \quad \Phi_1(x, y, z) = \Phi_2(x, y, z), \quad \text{在 } S \text{ 上} \quad (1.10)$$

$$\nabla \Phi_2(x, y, z) = \frac{B_0}{\mu_0}, \quad \text{在无穷远处} \quad (1.11)$$

1.2 磁体力与磁体力偶

依安培分子环流假说^[12], 磁性介质内部的环形电流是组成磁性材料的最小单位, 如图2 设 O 点为一固定点, 介质内部任一点 P 处的分子环流电流元 $I dr$ 所受的安培力和力偶分别为

$$df = I dr \times B(r) \quad (1.12)$$

$$dc = \rho \times [I dr \times B(r)] \quad (1.13)$$

这里 I 为分子环流的电流强度; r 为从固定点 O 到电流元的矢径; $B(r)$ 为矢径为 r 处除该分子环流外其它场源在该点的磁

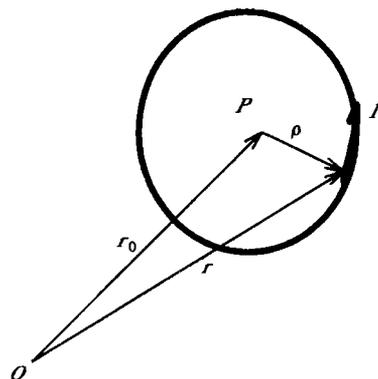


图2 分子环流示意图
Fig. 2 Schematic drawing of amperion current model

感应强度; ρ 为分子环流半径; f 和 c 分别为环流所受的安培力和力偶. 在引入磁化强度 M 后, 介质内任一点所受的电磁体力 f 和体力偶 c 分别为

$$f = M(r_0) \cdot \nabla B(r_0) \quad (1.14)$$

$$c = M(r_0) \times B(r_0) \quad (1.15)$$

显然, 由 (1.14) 和 (1.15) 式不难看出介质内部任一点的磁体力和磁体力偶均与该点所在处的磁感应强度 B 以及磁化强度 M 有关. 考虑到线性软磁材料的本构方程^[12]和 (1.5) 式, 有

$$M = \chi H_1 = \frac{\chi}{\mu_0 \mu_r} B_1 \quad (1.16)$$

其中 $\chi = \mu_r - 1$ 为材料的磁化率. (1.16) 式意味着线性铁磁介质内某点的磁化强度矢量 M 的方向与该点处磁感应强度矢量 $B(r_0)$ 的方向一致. 因此, 对线性磁化介质, 总有

$$c(r_0) = M(r_0) \times B(r_0) = 0 \quad (1.17)$$

$$f(r_0) = \frac{\chi \mu_0 \mu_r}{2} \nabla H_1^2(r_0) \quad (1.18)$$

即: 线性各向同性的磁化材料在外磁场作用下仅受磁体力作用. 将 (1.5) 和 (1.16) 式代入体力表达式 (1.18) 然后向板中面简化, 则作用在软铁磁薄板上的磁面力分量为

$$F_x(x, y) = \frac{\chi \mu_0 \mu_r}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} H_1^2(x, y, z) dz \quad (1.19)$$

$$F_y(x, y) = \frac{\chi \mu_0 \mu_r}{2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} H_1^2(x, y, z) dz \quad (1.20)$$

$$F_z(x, y) = \frac{\chi \mu_0 \mu_r}{2} [H_1^2(x, y, h/2) - H_1^2(x, y, -h/2)] \quad (1.21)$$

2 横向磁场中铁磁弹性板的控制方程

不失一般性, 这里我们将讨论处于非均匀横向外磁场中铁磁弹性板发生几何非线性变形的情况. 这时, 板的平衡方程为

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + F_y = 0 \quad (2.1a, b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_z + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.1c)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (2.1d, e)$$

板的几何方程

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad \epsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \quad (2.2a, b)$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2c)$$

$$\chi_x = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \chi_y = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.2 \text{ d, e, f})$$

板的物理方程为

$$\epsilon_x^0 = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu W_y), \quad \epsilon_y^0 = \frac{1}{Eh} (N_y - \nu W_x), \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{xy} \quad (2.3 \text{ a, b, c})$$

$$M_x = D (\chi_x + \nu \chi_y), M_y = D (\chi_y + \nu \chi_x), M_{xy} = D (1 - \nu) \chi_{xy} \quad (2.3 \text{ d, e, f})$$

这里 N_x, N_y, N_{xy} 分别为板中面的面内力; F_x, F_y, F_z 分别为板受到的外载, 此处即为磁面力; M_x, M_y, M_{xy} 为板的内力矩; Q_x, Q_y 为板的剪力; u_0, v_0, w 分别为板中面的三个位移分量; $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \epsilon$ 为板的面内应变分量; $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ 为板的曲率改变量; E 为板的杨氏弹性模量; ν 为板的泊松比; $D = Eh^3 / [12 (1 - \nu^2)]$ 为板的抗弯刚度

对 (2.1a, b) 取特解 N_x^*, N_y^* 且

$$N_x = N_x^* + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad N_y = N_y^* + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.4 \text{ a, b, c})$$

这里 $\phi(x, y)$ 为应力函数 将 (2.4a, b, c) 式代入 (2.1a, b) 式且考虑到 (1.19) ~ (1.21) 式, 得

$$N_x^* = N_y^* = - \frac{1}{2} \chi \mu_0 \mu_r \int_{-h/2}^{h/2} H^2(x, y, z) dz \quad (2.5)$$

对 (2.1) ~ (2.5) 式进行重新整理, 可得到软铁磁弹性薄板在横向磁场中大挠度变形的基本方程

$$D \nabla^4 w - L [w, \phi] = \frac{1}{2} \chi \mu_0 \mu_r [H^2(x, y, h/2) - H^2(x, y, -h/2)] + \nabla^2 \omega \int_{-h/2}^{h/2} H^2(x, y, z) dz \quad (2.6)$$

$$\nabla^4 \phi - \frac{1}{2} (1 - \nu) \chi \mu_0 \mu_r \int_{-h/2}^{h/2} \nabla^2 H^2(x, y, z) dz = - \frac{Eh}{2} L [w, w] \quad (2.7)$$

这里

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j \quad (2.8)$$

$$L [w, \phi] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.9)$$

而上述板方程的边界条件与薄板在通常载荷作用下的 von Kaman 板方程的边界条件完全一样, 其一般情形见文 [13] 在没有初张力和初位移情形, 其边界条件关于板的位移是齐次的

3 关于新模型的讨论

方程 (1.7) ~ (1.11) 和方程 (2.7), (2.8) 构成描述非均匀横向磁场中铁磁薄板几何非线性变形的基本方程 由于这组方程是基于磁效应表达式 (1.17), (1.18), 故

不妨称其为描述此类问题的体力模型 为了论证这一新模型的合理性, 即: 是否能准确地预测 Moon 和 Pao 所观察到的实验现象, 同时, 也为了与 Moon-Pao 模型进行比较以探讨他们所提基本假设的合理性, 在本节我们将对新模型——体力模型进行必要的定性分析

结论1 对于任意大小的横向外磁场 $B = B_0(x, y, z)k$, 在板未变形 (即 $w(x, y) = 0$) 时, 其磁场分布具有如下特征

$$H_x(x, y, z) = -H_x(x, y, -z) \quad (3.1)$$

$$H_y(x, y, z) = -H_y(x, y, -z) \quad (3.2)$$

$$H_z(x, y, z) = H_z(x, y, -z) \quad (3.3)$$

根据磁场分布的这一特征, 可检验静磁场数值计算的准确性

结论2 对于任意大小的横向外磁场 $B = B_0(x, y, z)k$, 当板无初张力和初位移时, 其零挠度解 $w(x, y) = 0$ 是控制方程 (1.7) ~ (1.11), (2.7), (2.8) 的一个解

该结论说明本文建立的理论模型是完全能描述横向磁场中铁磁板的失稳现象的, 尽管其基本方程从形式上看类似板的弯曲方程

结论3 若基本方程 (1.7) ~ (1.11) 和方程 (2.7), (2.8) 具有非零挠曲解 $w(x, y) \neq 0$, 则必有 $w^*(x, y) = -w(x, y)$ 也是同一横向外磁场 $B_0(x, y, z)$ 作用下的非零挠曲解

这一结论与 Moon 和 Pao 所观察的实验现象吻合, 说明非零屈曲解的模式是成对且对称出现的

结论4 当只考虑铁磁弹性板发生线性变形时, 对应的基本方程仍然是相互耦合的, 并且是非线性的

这里值得指出的是: 对于磁介质区域 Ω 内和 S 上的点的坐标, 在计算磁场时应考虑到磁介质变形的影响, 即

$$X = x + u_0(x, y) - \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) z \quad (3.4)$$

$$Y = y + v_0(x, y) - \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) z \quad (3.5)$$

$$Z = z + w(x, y) \quad (3.6)$$

这里 (x, y, z) 和 (X, Y, Z) 分别为磁介质变形前后的点的坐标 这样, 对于这类力-磁相互耦合的问题, 即使力学系统和磁学系统分别考虑为线性系统, 其基本方程最终仍为非线性的 这是力-磁耦合问题的一个主要特征^[14].

4 算 例

由于电磁弹性问题本质上的非线性耦合, 使定量求解带来更多的困难 为了表明本文所建立模型的有效性, 我们将采用具有实验结果的典型问题——铁磁弹性悬臂梁式板在均匀横向磁场中的屈曲作为算例 这里, 我们将对梁式板的几何变形处理为线性的 进而通过数值结果与实验值的对比来表明本模型的有效性 同时, 还将对仅利用 Moon 和 Pao 的体力偶假设所得到的体力偶模型进行数值计算以定量说明体力偶假设的不合理性

设长为 L , 厚为 h 的铁磁梁式悬臂板置于一外加均匀横向磁场 B_0 中 (如图3). 依本文提出的体力模型得到该边值方程为 ∇^2

$$\phi(x, z) = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (4.1)$$

$$\nabla^2 \phi(x, z) = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (4.2)$$

$$\mu_r \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad \phi = \phi_0, \quad \text{在 } S \text{ 上} \quad (4.3)$$

$$\nabla \phi = -\frac{B_0}{\mu_0} k, \quad \text{在无穷远} \quad (4.4)$$

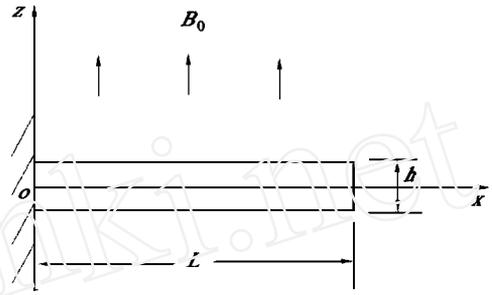


图3 均匀横向磁场中的梁式悬臂板
Fig. 3 Cantilevered beam plate in uniform transverse magnetic field

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{\chi \mu_0 \mu_r}{2} \{ [\nabla \phi(x, h/2)]^2 - [\nabla \phi(x, -h/2)]^2 \} \quad (4.5)$$

$$x = 0: w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (4.6)$$

$$x = L: \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \quad (4.7)$$

若延用 Moon-Pao 模型中的体力偶假设, 即

$$c = M(r_0) \times B_0, \quad f = 0 \quad (4.8)$$

则对应这一体力偶假设的该问题控制方程是将上述方程中的 (4.5) 式换为

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = \chi B_0 \left[\nabla \phi \left(x, \frac{h}{2} \right) - \nabla \phi \left(x, -\frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.9)$$

对均匀横向外磁场中的铁磁悬臂梁分别采用体力模型方程 (4.1) ~ (4.7) 和体力偶模型方程 (4.1) ~ (4.4), (4.9), (4.6), (4.7) 进行数值计算. 用有限元法处理磁场方程 (4.1) ~ (4.4), 用有限差分法 (4.5) ~ (4.7) 和 (4.9), (4.6), (4.7); 同时在计算中用 (3.4) ~ (3.6) 式以计及板变形对磁场的影响, 并用迭代法来处理这种非线性耦合效应. 由有限元法计算得到的磁场很好地满足了结论一中给出的 (3.1) ~ (3.3) 式; 有限差分程序的计算结果与已有的无磁场作用时的精确解进行了比较, 从而保证了计算程序的正确性.

计算结果表明: 尽管体力模型和体力偶模型均能预测出板在横向磁场中的失稳现象, 各模型得到的临界失稳值与 L/h 比值也大致成 $3/2$ 次幂的关系, 但不同模型所得到的临界失稳值则大不相同 (见图4, 图5和表1). 图4给出了由体力模型和体力偶模型分别得到的临界失稳值与 Moon-Pao 模型结果的比较 (其中图4 (b) 是图4 (a) 结果在对数坐标下的反映). 从图4 (a) 或图4 (b) 中不难看出: 由本文建立的体力模型所得到的结果低于 Moon-Pao 的理论值; 而由延用体力偶假设得到的体力偶模型的结果却高出 Moon-Pao 的理论值. 图5 (a) 和图5 (b) 给出了临界失稳值与已有实验值^[8] 的比较. 显然, 由体力模型所得到的结果与实验值吻合较好. 因此, 本文建立的描述横向磁场中铁磁板力学行为的基本模型——体力偶模型是合理、有效的. 而体力偶模型的结果远远高出实验值, 这定量说明 Moon-Pao 模型中的体力偶假设是导致理论值与实验值相距甚远的根本原因. 由计算结果还可看到: 体力偶模型和 Moon-Pao 模型以及体力模型三者的结果随 L/h 的增大而趋于接近, 这是由

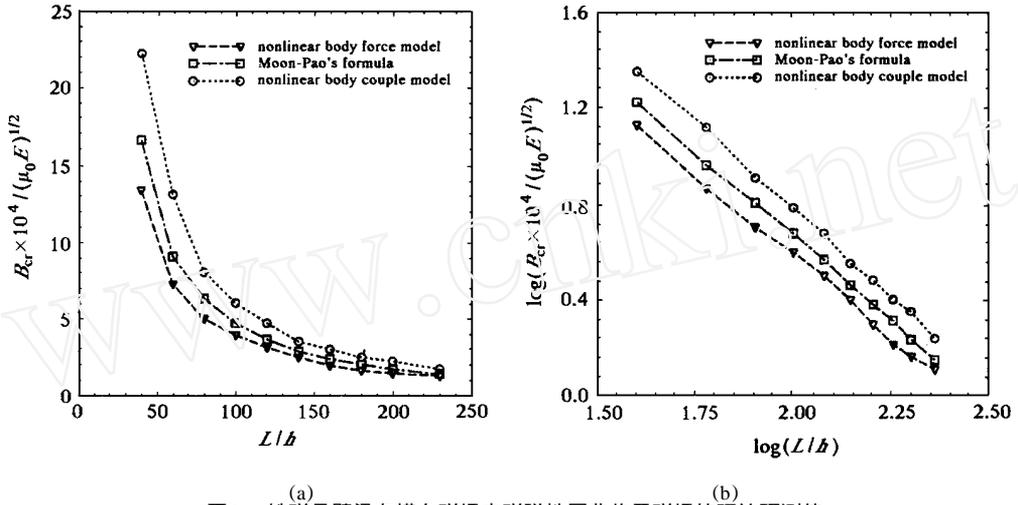


图4 铁磁悬臂梁在横向磁场中磁弹性屈曲临界磁场的理论预测值
Fig. 4 Theoretical predictions of critical buckling magnetic field for cantilevered beam plates in uniform transverse magnetic field

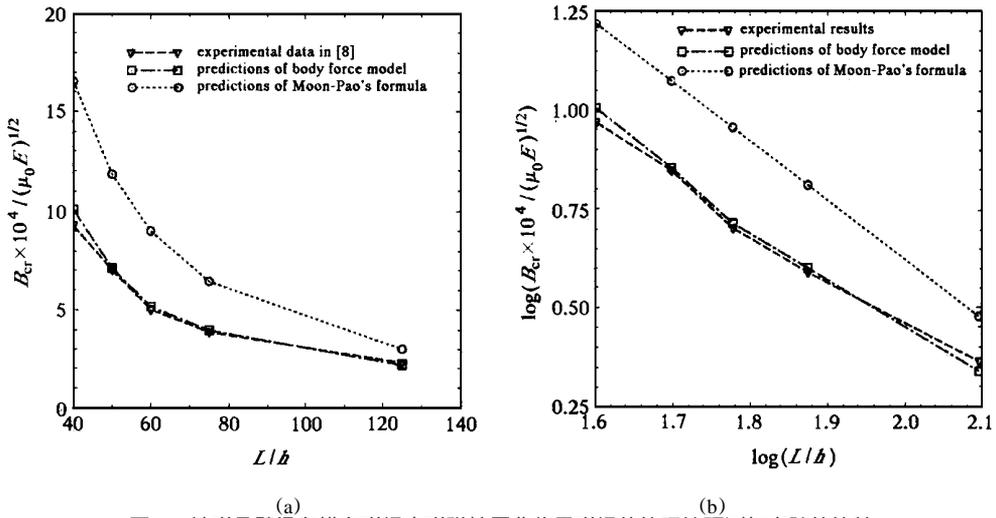


图5 铁磁悬臂梁在横向磁场中磁弹性屈曲临界磁场值的理论预测与实验的比较
Fig. 5 Comparison of theoretical predictions with experimental data for buckling magnetic field of the cantilevered beam plates

表1 由本文体力模型计算得到的临界磁场值 \bar{B}_F 与已有实验结果^[8] \bar{B}_E 以及Moon-Pao模型的理论值^[2] \bar{B}_M 的比较 $\left(\bar{B} = \frac{B_{cr} \times 10}{(\mu_0 E)^{1/2}} \right)^4$
Table 1 Comparison of theoretical predictions with experimental data of buckling magnetic field $\left(\bar{B} = \frac{B_{cr} \times 10}{(\mu_0 E)^{1/2}} \right)^4$

L/h	\bar{B}_M	\bar{B}_E	\bar{B}_F	$\epsilon_1 = \frac{\bar{B}_M - \bar{B}_E}{\bar{B}_E} \times 100\%$	$\epsilon_2 = \frac{\bar{B}_E - \bar{B}_F}{\bar{B}_E} \times 100\%$
40	16.55	9.29	10.01	78.15	7.75
50	11.84	7.02	7.12	68.66	1.42
60	9.01	5.02	5.17	79.48	2.99
62.5	8.47	5.48	4.98	54.56	-9.12
75	6.45	3.89	3.97	65.81	2.06
125	3.0	2.31	2.18	29.81	-5.63

于当板非常薄时, 板内磁场与外磁场的差别缩小, 故可近似用外磁场值代替板内磁场。然而, 这种替代一般在 L/h 达 200 左右时才可行。

5 结 论

本文从磁介质分子环流理论的微观机理出发, 经严格推导, 获得了作用在软铁磁介质上磁体力的表达式, 从而建立了铁磁弹性板结构在任意横向外磁场环境中大挠度变形的磁弹性相互作用的基本模型, 即本文称之为体力模型。并用有限元法与有限差分法相结合分别对磁场分布与变形进行了定量分析。通过对软铁磁悬臂梁在均匀横向磁场中磁弹性屈曲这一典型问题的数值计算表明: 体力模型所给出的外加磁场在构件发生磁弹性屈曲时的临界值与实验结果吻合良好。这样, 使长期以来在这一问题上的理论值与实验值之间的较大差别得以消失。与此同时, 文中对 $Moon-Pao$ 模型所采用的体力偶假设进行了分析和相应的数值计算。结果证实: $Moon-Pao$ 模型的基本假设导致临界磁场的理论值与实验值在 L/h 较小时发生较大误差, 而只是在 L/h 较大 (约大于 200 左右) 时才能使二者接近。这是因为当板的长厚比很大时, 在板内才有 $B(r_0) = B_0$ ——这正是体力偶假设的核心。

致谢 作为本文第一作者在日本东京大学核工程研究实验室工作的一部分得到了 *Kenzo Miyata* 教授的资助和支持, 在此表示诚挚的谢意。

参 考 文 献

- 1 Moon FC. *Magneto-Solid Mechanics*. New York: John Wiley and Sons, 1984
- 2 Moon FC, Pao YH. Magnetoelastic buckling of a thin plate. *ASME J Appl Mech*, 1968, 35 (1): 53~ 58
- 3 van de Ven AAF. A variational principle for magneto-elastic buckling. *J Eng Math*, 1987, 21: 227~ 252
- 4 van Lieshord PH, van de Ven AAF. A variational approach to the magnetoelastic buckling of an arbitrary number of superconducting beams. *J Eng Math*, 1991, 25: 353~ 374
- 5 Wolfe P. Bifurcation theory of an elastic conducting wire subject to magnetic forces. *J Elasticity*, 1990, 23: 201~ 217
- 6 谢慧才, 方葛丰, 王德满. 平面圆形线圈的磁弹性屈曲. *力学学报*, 1991, 23 (6): 706~ 711
- 7 王璋奇. 考虑尺寸效应板梁的磁弹性屈曲. *应用力学学报*, 1991, 8 (4)
- 8 Miyata K, Tagaki T, Audo F. Finite-element analysis of magnetoelastic buckling of ferromagnetic beam-plate. *ASME J Appl Mech*, 1980, 47: 377~ 382
- 9 Popelar CR, Bast CO. An experimental study of the magneto-elastic postbuckling behavior of a beam. *Experimental Mechanics*, 1972, 12: 537~ 542
- 10 van de Ven AAF. Magnetoelastic buckling of thin plates in a uniform transverse magnetic field. *J. Elasticity*, 1978, 8: 279~ 312
- 11 Peach MO, Christopherson NS, Dalrymple JM et al. Magnetoelastic buckling: Why theory and experiment disagree? *Experimental Mechanics*, 1987, 27: 65~ 69
- 12 曹昌祺. 电动力学. 北京: 人民教育出版社, 1979
- 13 郑晓静. 圆薄板大挠度理论及应用. 长春: 吉林科学技术出版社, 1990
- 14 周又和, 郑晓静. 磁弹性薄板屈曲的研究进展和存在的若干问题. *力学进展*, 1995, 25 (4): 525~ 536

A THEORETICAL MODEL OF MAGNETOELASTIC BUCKLING FOR SOFT FERROMAGNETIC THIN PLATES

Zhou Youhe Zheng Xiaojing

(Dept. of Mech., Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract As an essential model of magnetoelastic interaction between magnetic field and mechanical deformation, the study on magnetoelastic buckling phenomenon of soft ferromagnetic plates in a magnetic environment has been conducted. One of the key steps for the theoretical prediction of the critical magnetic field is how to formulate magnetic force exerted on the magnetized medium. Till today, the theoretical predictions, from all theoretical models in publications, to the magnetoelastic buckling of ferromagnetic cantilevered beam-plate in transverse magnetic field are higher than their experimental data. Sometimes, the discrepancy between them is as high as 100%. In this paper, the macroscopic formulation of the magnetic forces is strictly obtained from the microscopic Amperion current model. After that, a new theoretical model is established to describe the magnetoelastic buckling phenomenon of ferromagnetic thin plates with geometrically nonlinear deformation in a nonuniform transverse magnetic field. The numerical method for quantitative analysis is employed by combining the finite elemental method for magnetic fields and the finite difference method for deformation of plates. The numerical results obtained from this new theoretical model show that the theoretical predictions of critical values of the buckling magnetic field for the ferromagnetic cantilevered beam-plate are in excellent agreement with their experimental data. By the way, the region of applicability to the Moon-Pao's model, or the couple model, is checked by quantitative results. It is the same as the prerequisite conditions of the Moon-Pao's model.

Key words soft ferromagnetic medium, nonlinear thin plates, magnetoelastic interaction, theoretical model of buckling, critical magnetic field