第 28 卷 第 5 期 Vol 28, No. 5
1996 年 9 月 ACTA MECHANICA SINICA Sept, 1996

# 空间机械臂逆动力学的 Liapunov 方法[1)]

刘延柱 顾晓勤
(上海交通大学工程力学系, 上海200030)

**摘要** 讨论了空间机械臂的逆动力学问题, 指出了系统的非完整约束性质 以铰转角为变量的 Liapunov 方法由于理论缺陷导致实践中出现计算死点而难以实际应用 文中提出以臂端载荷位形为变量的 Liapunov 方法并给出算例, 可以保证载荷向预定位形转移的渐近稳定性

**关键词** 空间机械臂, 多体系统动力学, 逆动力学, 李雅普诺夫直接方法

## 引 言

安装在航天器上的空间机械臂在擒获或释放载荷时, 其臂端抓手必须从惯性空间中的起始位形转移到指定的终止位形 空间机械臂的路径规划问题要求设计铰转角的控制规律以保证载荷位形稳定地到达终止值 以载体自由悬浮为特点的空间机械臂是典型的自由多体系统 在机械臂操作过程中, 当载体姿控系统由于节省能源而关闭时, 各分体的相对转动必引起载体姿态的偏转, 从而使运动学问题与动力学问题相耦合. 因此空间机械臂的路径规划问题, 或逆动力学问题远比地面机械臂复杂 忽略微弱的重力梯度力矩时, 系统相对质心地动量矩守恒, 其动力学方程可降为一阶而具有非完整约束性质, 使空间机械臂系统成为非完整系统 本文讨论这类非完整系统的逆动力学问题

在现有的各种路径规划方法中, Nakamura 等[1~3]在一系列文章中提出利用运动稳定性理论的 Liapunov 直接方法在机械臂的铰转角空间内进行规划, 以保证载荷和载体向终止位形趋近的渐近稳定性 但由于理论分析不完善, 以致在具体计算中时常发生在载荷到达指定位形以前, 铰转角已处于相对静止状态, 使计算提前结束的死点现象 本文指出 Nakamura 规划方法的缺陷, 并指出非完整约束条件的存在是产生死点的根本原因, 在铰转角空间内进行的规划仅在姿态受控的条件下才有意义, 对于载体姿态不受控的一般情形, 难以同时保证载荷和载体渐近地到达指定位形 文中提出改进的路径规划方法, 即以载荷的位形转移作为路径规划的首要目标, 放弃对载体的预定姿态要求, 直接以载荷的位形空间代替铰转角空间进行规划, 可以有效地实现载荷的位形转移而从根本上解决死点问题 机械臂操作过程中引起的载体姿态偏转可在载荷位形转移实现以后进行调整

## 1 动力学方程

设空间机械臂是载体 $B_1$, 臂构件 $B_i$ ($i=2, \cdots, n-1$)、夹持载荷的抓手 $B_n$ 等 $n$ 个刚

---

1) 国家自然科学基金重点项目及博士点专项科研基金项目.
1995-07-05收到第一稿, 1996-01-12收到修改稿

体以 $n-1$ 个单自由度转动铰 $O_j$（$j=2, \cdots, n$）联结成的无根单链系统如图1所示．以系统的总质心 $O_c$ 为原点建立惯性基 $e_0$，以各分体质心 $O_{ci}$ 为原点建立连体基 $e_i$（$i=1, \cdots, n$）．无力矩状态下系统的动量矩守恒原理要求

$$\sum_{j=1}^{n} I_j \cdot \omega_j = H_0 \tag{1}$$

其中，$I_j$，$\omega_j$ 为分体 $B_j$ 的等效惯量张量和角速度，$H_0$ 为系统的起台动量矩，$I_j$ 可表示为增广体惯量张量 $K_{ij}^*$（$i, j=1, \cdots, n$）的求和式[4]。

图1　链结构多体系统

Fig. 1　An $n$ body open chain system

$$\begin{aligned} I_j &= \sum_{i=1}^{n} K_{ij}^* \ (j=1, \cdots, n) \\ K_{ij}^* &= \delta_{ij} K_i^* - (1-\delta_{ij}) m [ (b_{ji} \cdot b_{ij} E - b_{ji} b_{ij} ] \\ K_i^* &= J_i + \sum_{k=1}^{n} m_k (b_{ik}^2 E - b_{ik} b_{ik}) \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $m_i$，$J_i$（$i=1, \cdots, n$）为 $B_i$ 的质量和中心惯量张量，$\delta_{ij}$ 为Kronecker符号．将载体相对 $e_0$ 的姿态角 $\theta_{1k}$（$k=1, 2, 3$）和相应的转轴基矢量 $p_{1k}$ 相对 $e_1$ 的投影列阵 $p_{1k}$（$k=1, 2, 3$）构成列阵 $\theta_1$ 和方阵 $p_1$

$$\theta_1 = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13})^T, \quad p_1 = (p_{11}, p_{12}, p_{13})^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

将 $O_j$ 铰关联的邻接刚体 $B_j$ 相对 $B_{j-1}$ 的转角 $\theta_j$（$j=2, \cdots, n$）构成列阵 $\theta^*$

$$\theta^* = (\theta_2, \cdots, \theta_n)^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

设 $p_j$ 为 $O_j$ 铰的转轴基矢量相对 $e_j$ 的投影列车，则分体 $B_i$ 的角速度 $\omega$ 相对 $e_i$ 的投影列阵 $\omega$ 为

$$\omega = \sum_{j=1}^{i} A_{ij} p_j \dot{\theta}_j \quad (i=1, \cdots, n) \tag{5}$$

设动力学方程（1）中的起始动量矩 $H_0$ 为零，写出其相对 $e_0$ 的投影式，导出

$$\dot{\theta}_1 + J \dot{\theta}_* = 0 \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} &\theta_* = (\theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_n)^{\mathrm{T}}, \quad J = (J_2, J_3, J_n) \\ &J_i = p_1^{-1} \left( \sum_{k=1}^{n} A_{1k} I_k A_{k1} \right)^{-1} \left( \sum_{k=i}^{n} A_{1k} I_k A_{ki} \right) p_i \quad (i=2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{7}$$

臂端载荷的质心 $O_{cn}$ 在惯性空间中的位置由 $O_{cn}$ 相对 $O_c$ 的矢径 $\rho_n$ 确定，$\rho_n$ 可利用增广体矢量 $b_{ij}$（$i, j=1, \cdots, n$）的求和算出[4]，其相对 $e_0$ 的投影式确定 $O_{cn}$ 相对 $e_0$ 的坐标 $x=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，有

$$x = \sum_{i=1}^{n} A_{oi} b_{in}, \qquad A_{oi} = \prod_{j=1}^{i} A_{j-1,j}(\theta_j) \tag{8}$$

其中，$b_{in}$为增广体矢量$b_{in}$相对$e_n$的投影列阵，$A_{oi}$为$B_i$的连体基$e_i$相对$e_0$的方向余弦矩阵. 负载相对$e_0$的姿态$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$可根据$e_n$相对$e_0$的方向余弦矩阵$A_{on}$导出

$$A_{on}(\psi) \prod_{j=1}^{n} A_{j-1,j}(\theta_j) \tag{9}$$

式(8)，(9)所含的独立方程数为6，当$n=7$时，对于给定的载荷位形$x$，$\psi$及载体姿态角$\theta_1$，原则上可从方程(8)，(9)确定相对应的铰转角$\theta_*$. 因此空间机械臂的路径规划可从臂端载荷的位形空间转换至铰空间内进行. 当$n>7$时可附加约束条件以确定$\theta_*$；当$n<7$时仅对平面运动有可能求解，对一般空间情况无解.

## 2 关于 Nakamura 规划方法的讨论

当设计要求的载荷和载体终止位形$x_f$，$\psi_f$，$\theta_{1f}$所对应的转角终止值$\theta_{jf}$ $(j=2, \cdots, n)$确定以后，可将$\theta_{jf}$ $(j=1, \cdots, n)$视作$\theta_j$的未扰状态，实际转角$\theta_j$与$\theta_{jf}$之差视作扰动量，则可利用运动稳定性理论讨论机械臂的路径规划，令

$$X_1 = \theta_1 - \theta_{1f}, \qquad X_* = \theta_* - \theta_{*F} \tag{10}$$

动量矩积分方程(6)要求$X_1$，$X_*$满足非完整约束方程

$$\mathring{X}_1 = -J\mathring{X}_* \tag{11}$$

设$A$，$B$分别为任选的3阶及$n-1$阶正定对角阵，设计机械臂的铰转角控制规律为

$$\mathring{X}_* = J^{\mathrm{T}} A X_1 - B X_* \tag{12}$$

选择正定的 Liapunov 函数V

$$V = \frac{1}{2}(X_1^T A X_1 + X_*^T B X_*) \tag{13}$$

V 函数通过方程(11)，(12)的全导数为常负函数

$$\mathring{V} = -(J^{\mathrm{T}} A X_1 - B X_*)^{\mathrm{T}}(J^{\mathrm{T}} A X_1 - B X_*) \tag{14}$$

因此根据Liapunov定理，无扰运动$X_1 = X_* = 0$，但非渐近稳定，控制规律(12)只能保证扰动量$X_1$，$X_*$不继续增大，但不能保证$X_1$，$X_*$趋近于零. 在计算过程中只要$X_1 \neq 0$，$X_* \neq 0$的数据恰能使$J^TAX_1 - BX_* = 0$满足，计算即自动结束而出现死点. Nakamura 等在一系列文献中试图减少出现死点机会，但未能根本避免. 本文指出只有在机械臂操作过程中，载体受控保持固定姿态，即$X_1 \equiv 0$的特殊情况下，$\dot{V}$负定，控制规律(12)才能保证$X_* = 0$为渐近稳定，使铰转角$\theta_*$渐近地趋近终止位形$\theta_f$.

## 3　改进的路径规划方法

以上分析表明, 由于非完整约束条件 (11) 的存在, 难以实现空间机械臂的载体和载荷同时渐近地趋向预定位形　考虑到在航天技术中, 载荷到达预定位形是机械臂操作的首要任务, 载体的姿态可在载荷到达预定目标后利用机械臂的闭曲线运动进行调整[5]. 因此可将路径规划的目标仅限于臂端载荷的位形

将载荷的质心位置$x$ 及姿态角 $\psi$组成广义坐标$q$, $q$ 的目标值为$q_f$, 即

$$q = (x^T, \psi^T)^T, \qquad q_f = (x_f^T, \psi_f^T)^T \tag{15}$$

引入扰动量$X = q - q_f$, 设$A$ 为任选的6阶正定对角阵, 设计机械臂的控制规律为

$$\dot{X} = - A X \tag{16}$$

选择正定的Liapunov 函数V

$$V = \frac{1}{2} X^T A X \tag{17}$$

V 函数通过方程 (16) 的全导数为负定函数

$$\mathring{V} = - X^T A^2 X \tag{18}$$

根据Liapunov 定量, 无扰运动$X = 0$必渐近稳定, 变量$X$ 必渐近地趋近于$X_f$. 为将载荷位形$X$ 的控制规律转化为铰转角变量$X_*$ 的控制规律, 将式 (8) 对 $t$ 求导并将式 (5) 代入得到

$$\mathring{x} = - \sum_{i=1}^{n} A_{oi} \tilde{b}_{in} \sum_{j=1}^{i} A_{ij} p_j \dot{\theta}_j \tag{19}$$

其中, $\tilde{b}_{in}$为增广体矢量$b_{in}$相对$e_i$ 的反对称投影方阵　令式 (5) 中 $i = n$ 并向$e_0$投影, 导出

$$\mathring{\psi} = \sum_{j=1}^{n} A_{oj} p_j \dot{\theta}_j \tag{20}$$

利用方程 (6) 消去式 (19), (20) 中的$\dot{\theta}_1$导出

$$\dot{X} = C \dot{X}_* \tag{21}$$

其中

$$C = \begin{pmatrix} - \sum_{i=1}^{n} A_{oi} \tilde{b}_{in} A_{i1} p_1 J - p \\ A_{o1} p_1 J + p_0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = (p_{o2}, p_{o3}, \cdots, p_{on}), \quad p = (p_2, p_3, \cdots, p_n) \tag{22}$$

$$p_{oi} = A_{oi} p_i, \quad P_i = \sum_{j=1}^{n} A_{oj} \tilde{b}_{jn} A_{ji} p_i \ (i = 2, \cdots, n)$$

当 $n - 1 = 6$时, 可对式 (21) 求逆并将式 (16) 代入得到铰转角$X_*$ 的控制规律

$$\overset{\circ}{X}_* = -(C^{-1}A)X \tag{23}$$

当 $n-1<6$ 时仅对一些平面运动有解, $n-1>6$ 时存在运动学冗余, 可附加其它约束条件择路径规划进行优化

## 4　数值算例

以空间机械臂平面运动为例, 设 $n=4$, 质量几何参数为: $m_1=1\ 000$kg, $m_2=m_3=10$ kg, $m_4=100$ kg, $J_1=500$kg/m$^2$, $J_2=J_3=5$kg/m$^2$, $J_4=50$kg/m$^2$, $O_1O_2=1$m, $O_2O_3=O_3O_4=4$m, $O_2O_{c2}=O_3O_{C3}=2$m, $O_4O_{c4}=1$m. 要求将载荷位形从 $A$ 点 ($x_{10}=7.88$m, $x_{20}=3.64$m, $\psi_0=0.7$rad) 转移到 $B$ 点 ($x_{1f}=6.89$m, $x_{2f}=2.94$m, $\psi_f=1.05$rad), 令 $A=\mathrm{diag}(1, 0.378, 0.745)$, 得到载荷位形与预定位形之差即扰动量变化规律如图 2 所示, 机构臂及载体转角规律如图 3.

图2　扰动量变化规律

Fig. 2　Perturbed motion trajectories

图3　机械臂、载体转角规律

Fig. 3　Angle Trajectories

## 5　结　论

1) 由于非完整约束条件的存在, 空间机械臂不可能同时实现载体和载荷渐近地转移至预定位形

2) 以铰转角为规划目标的 Nakamura 规划方法存在理论缺陷, 导致实践中出现计算死点而不可行.

3) 仅在载体受控保持固定姿态的特殊条件下, Nakamura 规划方法才能保证载荷位形转移的渐近稳定性

4) 改进的 Liapunov 方法直接以载荷位形为规划目标, 可以保证载荷向预定位形转移的渐近稳定性

## 参 考 文 献

1 Nakamura Y, Mukherjee R. Nonholomic Path Planning of Space Robots via a Bidirectional Approach. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1991, 7 (4): 500～514

2 Nakamura Y, Mukherjee R. Exploiting Nonholomic Redundancy of Free-Flying Space Robots *IEEE on Transactions on Robotics and Automation*, 1993, 9 (4): 499～506

3 Mukherjee R, Nakamura Y. Nonholonomic Redundancy of Space Robots and its Unilization Via Hierarchical Liapunov Functions American Control Conference, 1991: 1491～1496

4 **刘延柱, 洪嘉振, 杨海兴 多刚体系统动力学 北京: 高等教育出版社**, 1989. 128～165

5 **顾晓勤, 刘延柱 上海交通大学学报**, 1996, 30 (sup): 132

# THE LIAPUNOV'S METHOD FOR THE INVERSE DYNAMICS OF A SPACE MANIPULATOR

Liu Yanzhu Gu Xiaoqin

(*Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030, *China*)

**Abstract** The inverse dynamics of a space manipulator is discussed in this paper. It is shown that as the result of the nonholonomic behavior of the system, the Liapunov's method with the joint angles as variables is infeasible in the practice, owing to the theoretical incorrectness and the appearance of dead point in computation. The Liapunov's method using the configuration of the payload as variables is suggested, and a numerical example is given. The improved method of path- planning can ensure the asymptotic stability of the motion of the payload toward the desired target.

**Key words** space manipulator, multibody dynamics, inverse dynamics, Liapunov's direct method