

## 多孔介质中的双稳热对流<sup>1)</sup>

吴柏生 金希卓 阎广武  
(吉林大学数学系, 长春 130023)

**摘要** 对矩形横截面多孔介质中热对流的复杂分岔行为——二次分岔进行研究. 使用 Liapunov-Schmidt 约化并充分利用问题本身的对称性, 研究了于最低的两个不同临界 Rayleigh 数处从平凡的静态传热解产生的热对流主分岔解之间的相互作用; 揭示了主分岔解的二次分岔并给出了主分岔解及二次分岔解的渐近展开. 稳定性分析表明从第二临界 Rayleigh 数产生的主分岔解经二次分岔后由不稳定变得稳定, 从而与由最小临界 Rayleigh 数产生的主分岔解组成双稳定热对流. 文中理论分析可较恰当地解释已有的数值模拟结果.

**关键词** 多孔介质流动, 矩形横截面, 热对流, 二次分岔, 稳定性, 双稳状态, 数值模拟

### 引 言

多孔介质材料广泛地应用于航空航天和化学反应工程中. 对多孔介质材料, 人们除了关心其机械性能外, 还需了解其传热特性. 因此, 分析多孔介质中的热对流及其稳定性具有重要的意义.

对等厚度水平放置的多孔介质层, 如下表面温度高于上表面, 文 [1~5] 指出, 当上、下表面的温差很小时, 多孔介质的气体处于静止状态, 此时介质内仅为静态传热过程; 而当上、下表面温差较大, 或无量纲的 Rayleigh 数 (以下简称  $Ra$ ) 达到一定数值时, 多孔介质内的气体出现回流. 文 [6] 对方形多孔介质的解析研究指出: 存在多个临界  $Ra$  值  $Ra_{c1} < Ra_{c2} < Ra_{c3} \dots$ , 当  $Ra$  超过这些临界值时, 从平凡的静态传热解基础上产生的超临界音岔型主 (原始) 分岔解依次为单回流, 双回流和三回流……. 此文虽然指出了从  $Ra_{c1}$  开始的主分岔解是稳定的, 但对由其它临界点产生的主分岔解的稳定性没有做进一步分析, 而且理论分析所得的临界  $Ra$  值除  $Ra_{c1}$  外与文 [7] 的数值模拟结果有很大偏离.

在本文中, 除文 [6] 的分岔参数  $Ra$  外, 我们还引进一个辅助参数——矩形多孔介质的长宽比  $l$ . 利用格林函数, 我们将多孔介质中流体运动的控制方程化为只含一个无量纲温度差函数  $u$  的发展型积-微分方程. 然后使用 Liapunov-Schmidt 约化并充分利用方程本身的对称性, 来研究从最小的两个不同临界  $Ra$  值处产生的热对流主分岔解间的相互作用. 我们发现: 当  $l \neq l_c \equiv \sqrt{2}$  时, 由第二临界点产生的主分岔解上出现二次分岔, 这里  $l_c$  是临界长宽比, 当  $l = l_c$  时, 平凡的静态传热解于最低

<sup>1)</sup> 国家自然科学基金资助项目.

1995-03-13 收到第一稿, 1995-09-08 收到修改稿.

临界  $Ra$  值处相对于两不同的特征温度模式同时失稳. 本文同时给出了主分岔及二次分岔解的渐近展开. 借助于稳定性分析, 我们发现了由第二临界点产生的主分岔解经过二次分岔后由不稳定变得稳定这一更复杂的分岔现象. 特别地, 对方形多孔介质 ( $l = 1$ ), 本文能较恰当地解释已有的数值模拟结果.

## 1 发展型控制积 - 微分方程

考虑长宽分别为  $lL$  和  $L$  的矩形多孔介质,  $L$  为长度量纲,  $X', Y'$  轴分别与矩形多孔介质的下边界和左边界重合, 沿  $Z'$  方向, 假设介质为无限长, 只限于考虑二维问题. 设多孔介质中的流体不可压缩并遵循 Darcy 定律, 以无量纲的流函数  $\psi$  和温度  $\theta$  为未知量的流体运动的控制方程为 [6]

$$\left. \begin{aligned} \Delta\psi &= -Ra \frac{\partial\theta}{\partial X} \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} &= \Delta\theta + \frac{\partial\psi}{\partial X} \frac{\partial\theta}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y} \frac{\partial\theta}{\partial X} \end{aligned} \right\} \quad (1.1a, b)$$

式中  $Ra$  是 Rayleigh 数, 它与上、下表面的温度之差等有关,  $\Delta$  为 Laplace 算子, 求解域是边长为  $l \times 1$  的矩形, 在各边界上满足如下条件

$$\left. \begin{aligned} X=0, X=l, Y \in (0, 1), \frac{\partial\theta}{\partial X} = 0, \psi = 0; \\ X \in (0, l), Y=0, \theta = 1, \psi = 0; \quad X \in (0, l), Y=1, \theta = 0, \psi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

由方程 (1.1a) 及 (1.2) 中关于  $\psi$  的边界条件并引入坐标变换

$$X = lx, \quad Y = y \quad (1.3)$$

我们可将  $\psi$  用  $\theta$  表示 [8]

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, y) &= Ra\bar{\psi}(\theta(x, y), l), \\ \bar{\psi}(\theta, l) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{4}{\pi^2 l} \sum_{m, n} \frac{\sin m\pi x \sin n\pi y \sin m\pi x' \sin n\pi y'}{(m/l)^2 + n^2} \frac{\partial\theta(x', y')}{\partial x'} dx' dy' \end{aligned} \right\} \quad (1.4a, b)$$

再引进温度差函数  $u$ , 使得

$$\theta = \theta_0 + u \quad (1.5)$$

式中  $\theta_0 = 1 - y$  相应于方程 (1.1) 的静态传热解. 由 (1.1~1.5) 可得  $u$  满足下面的非线性发展型积 - 微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= F(u, Ra, l) \equiv \\ &\frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{Ra}{l} \frac{\partial\bar{\psi}(u, l)}{\partial x} + \frac{Ra}{l} \left( \frac{\partial\bar{\psi}(u, l)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial\bar{\psi}(u, l)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.6a)$$

式中  $u$  满足下述边界条件

$$x=0, x=1, \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad y=0, y=1, u=0 \quad (1.6b)$$

## 2 热对流主分岔解的二次分岔

我们研究 (1.6) 的驻态解, 即方程

$$F(u, Ra, l) = 0 \quad (2.1)$$

的解, 这里我们视  $Ra$  为分岔参数, 而  $l$  为辅助参数.

方程 (2.1) 有平凡解:  $u \equiv 0$ . (2.1) 关于该平凡解的线性化方程为

$$\frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{Ra}{l} \frac{\partial \bar{\psi}(u, l)}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

式中  $u$  满足 (1.6b). 容易知道方程 (2.2) 和 (1.6b) 的临界  $Ra$  值为

$$Ra_c(l, m, n) = \left( \frac{n}{l} + \frac{lm^2}{n} \right)^2 \pi^2, \quad m, n \text{ 为正整数} \quad (2.3)$$

有实际意义的仅是最小的临界  $Ra$  值, 故 (2.3) 中应取  $m = 1$ . 此外, 对任给正整数  $n$ , 当  $n(n-1) < l^2 < n(n+1)$  时, 最低临界  $Ra$  值为  $Ra_c(l, 1, n)$ . 若对某正整数  $n$ , 有

$$l^2 = l_c^2 \equiv n(n+1)$$

则最小临界  $Ra$  值  $Ra_c = Ra_c(l_c, 1, n)$  是双重的且相应的两个特征温度模式为

$$u_{n,1} = 2 \cos n\pi x \sin \pi y, \quad u_{n+1,1} = 2 \cos (n+1)\pi x \sin \pi y \quad (2.4)$$

这里的两个模式已按内积  $(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 uv dx dy$  定义的模  $\|u\| = [\int_0^1 \int_0^1 u^2 dx dy]^{1/2}$  归一化. 因我们的目的之一是解释方形多孔介质内热对流的数值模拟结果<sup>[7]</sup>, 故这里取临界长宽比  $l = l_c = \sqrt{2}$ , 即  $n = 1$ . 在产生双重临界  $Ra$  值的情况下, 此  $l$  值是最靠近  $l = 1$  的. 这时最小临界  $Ra$  值是

$$Ra_c = \frac{9}{2} \pi^2$$

为了研究方程 (2.1) 的解结构并简化分岔方程, 先来探讨它的对称性. 定义两个有界线性算子

$$S_1 u(x, y) = -u(1-x, 1-y), \quad S_2 u(x, y) = u(1-x, y) \quad (2.5a)$$

则

$$S_i^2 = I, \quad i = 1, 2 \quad (2.5b)$$

这里  $I$  是恒等算子. 可以验证, 这两个算子与方程 (3.1) 可交换, 即

$$F(S_i u, Ra, l) = S_i F(u, Ra, l), \quad i = 1, 2 \quad (2.6)$$

且相应的两个特征温度模式  $u_1 \equiv u_{1,1}, u_2 \equiv u_{2,1}$  满足

$$S_1 u_1 = u_1, \quad S_1 u_2 = -u_2, \quad S_2 u_1 = -u_1, \quad S_2 u_2 = u_2 \quad (2.7)$$

此外易知算子  $F_u^0 \equiv F_u(0, Ra_c, l_c)$  ( $F_{uRa}^0$  表示算子  $F_{uRa}(0, Ra_c, l_c)$  等等) 是自共轭的具有两维零空间的 Fredholm 算子. 于是, 可以用 Liapunov-Schmidt 约化并利用上述对称性来研究方程 (2.1) 在  $(u, Ra, l) = (0, Ra_c, l_c)$  附近解的结构.

令  $N = \text{span}\{u_1, u_2\}$  是  $u_1, u_2$  张成的子空间,  $N^\perp$  是  $N$  的正交补, 则对任给的  $u$ , 有正交分解

$$u = (\alpha u_1 + \beta u_2) + z, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad z \in N^\perp$$

再令  $P$  是到  $N$  的投影算子, 即

$$Pu = (u_1, u)u_1 + (u_2, u)u_2$$

则方程 (2.1) 等价于下述两个方程

$$\left. \begin{aligned} (I - P)F(\alpha u_1 + \beta u_2 + z, Ra, l) &= 0 \\ PF(\alpha u_1 + \beta u_2 + z, Ra, l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8a, b)$$

由隐函数定理, 从 (2.8a) 可得  $z = \hat{z}(\alpha, \beta, Ra, l)$ ,  $\hat{z} \in N^\perp$ , 利用对称性 (2.6) 和 (2.7) 及隐函数的唯一性可得:  $S_1 \hat{z}(\alpha, \beta, Ra, l) = \hat{z}(\alpha, -\beta, Ra, l)$ ,  $S_2 \hat{z}(\alpha, \beta, Ra, l) = \hat{z}(-\alpha, \beta, Ra, l)$ . 将  $z = \hat{z}(\alpha, \beta, Ra, l)$  代入 (2.8b), 再结合前述投影算子  $P$  的定义可得分岔方程<sup>[9,11]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3}\alpha(Ra - Ra_c) - \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2}\alpha(l - l_c) - \frac{9}{8}\pi^4\alpha^3 - \frac{45}{8}\pi^4\alpha\beta^2 + \alpha h_1(\alpha, \beta, Ra, l) &= 0 \\ \frac{2}{3}\beta(Ra - Ra_c) + \sqrt{2}\pi^2\beta(l - l_c) - \frac{63}{16}\pi^4\alpha^2\beta - \frac{9}{2}\pi^4\beta^3 + \beta h_2(\alpha, \beta, Ra, l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

式中  $\alpha h_1, \beta h_2$  是高阶小量,  $h_1, h_2$  分别是  $\alpha, \beta$  的偶函数.

使用如下重标尺度变换

$$Ra - Ra_c = \nu^2 \Lambda, \quad l - l_c = \nu^2 \tau, \quad \alpha = \nu x, \quad \beta = \nu y \quad (2.10)$$

及文 [9], 可知方程 (2.1) 的解结构: 当  $l < l_c$  时, 从关于  $S_2$  对称的主分岔解  $\Gamma_{1l}^{S_2}(\alpha = 0)$  上的二次分岔点产生二次分岔解  $\Gamma_{2l}^{S_2}$ ; 而当  $l > l_c$  时, 从关于  $S_1$  对称的主分岔解  $\Gamma_{1l}^{S_1}(\beta = 0)$  上的二次分岔点产生二次分岔解  $\Gamma_{2l}^{S_1}$ . 再由 Taylor 展开并参照文 [10,11] 可得这些主分岔解及二次分岔解的渐近展开

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{1l}^{S_1}(\alpha) &= \{u = \alpha u_1 + \frac{1}{2}\alpha^2 z_{11} + O(\alpha^3, \alpha(l - l_c)), \\ Ra &= \left(\frac{1}{l} + l\right)^2 \pi^2 + \frac{27}{8}\pi^4 \alpha^2 + O(\alpha^4, (l - l_c)\alpha^2) : |\alpha| < \alpha_0\}; \\ \Gamma_{1l}^{S_2}(\beta) &= \{u = \beta u_2 + \frac{1}{2}\beta^2 z_{22} + O(\beta^3, \beta(l - l_c)), \\ Ra &= \left(\frac{2}{l} + \frac{l}{2}\right)^2 \pi^2 + \frac{27}{4}\pi^4 \beta^2 + O(\beta^4, (l - l_c)\beta^2) : |\beta| < \beta_0\}; \end{aligned} \right\} \quad (2.11a, b)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Gamma_{2l}^{S_2}(x) &= \left\{ u = y_0 \nu u_2 + \frac{1}{2} y_0^2 \nu^2 z_{11} + \nu x u_1 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} [\nu x^2 y_{xx}(0,0) u_2 + 2 y_0 \nu^2 x z_{12}] + O(\nu^3, \nu^2 x^2, \nu x^4), \right. \\
 Ra &= Ra_c + \nu^2 (\Lambda_0 + \frac{1}{2} \Lambda_{xx}(0,0) x^2) + O(\nu^4, \nu^2 x^4) : |x| < x_0; \\
 \Lambda_0 &= \frac{b_1 s - b_2 r}{a_1 s - a_2 r}, \quad y_0 = \pm \left| \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 s - a_2 r} \right|^{1/2}, \\
 \Lambda_{xx}(0,0) &= \frac{2(ps - qr)}{a_2 r - a_1 s}, \quad y_{xx}(0,0) = \frac{a_1 q - a_2 p}{(a_2 r - a_1 s) y_0}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

式中

$$z_{12} = -\frac{9}{4} \pi \cos \pi x \sin 2\pi y, \quad z_{11} = -\frac{3}{2} \pi \sin 2\pi y, \quad z_{22} = -3\pi \sin 2\pi y \quad (2.13)$$

类似地可给出当  $l > l_c$  时，于  $\Gamma_{1l}^{S_1}$  上的二次分岔点产生的二次分岔解的渐近展开。此外，由 (2.11a,b) 和 (2.12) 看出，所有这些分岔解都是超临界的；进一步，由此可给出原驻态温度解  $\theta = \theta_0 + u$  及相应的流函数  $\psi = \bar{\psi}(u, l)$  (参见 (1.4a,b))。限于篇幅，省略了它们的表达式。

### 3 各分岔解的稳定性

从控制温度差  $u$  的动力学方程 (1.6) 出发，我们来研究原静态传热解 ( $u = 0$ ) 及各分岔解 ( $\Gamma_{1l}^{S_1}, \Gamma_{1l}^{S_2}, \Gamma_{2l}^{S_1}, \Gamma_{2l}^{S_2}$ ) 的稳定性。注意到 (1.6) 是一发展型方程，故可用作者建立的研究双重特征值附近分岔解的稳定性方法<sup>[12]</sup> 来研究本文的热对流问题。

在重标尺度变换 (2.10) 下，可得决定对称、反对称主分岔解及其上产生的二次分岔解的稳定性二阶矩阵<sup>[12]</sup>，再计算这些矩阵的特征值便可判断各分岔解的稳定性。基于本节及前一节的讨论，我们在图 1 中给出空间  $(Ra, \alpha, \beta)$  的分岔图。图中实线表示稳定的分岔解；虚线表示不稳定的分岔解。该图关于  $Ra$  轴是对称的，故我们只画出一半。

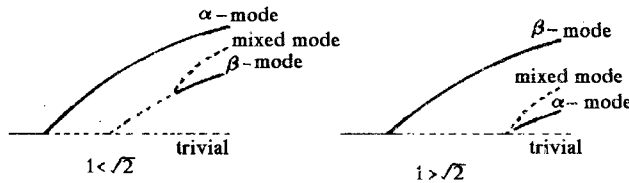


图 1  $l$  于  $\sqrt{2}$  附近热对流解的分岔图

—— 稳定的热对流解，--- 不稳定的热对流解

Fig.1 Bifurcation diagrams of thermal convective solutions for  $l$  near  $\sqrt{2}$

—— Stable thermal convective solutions, --- Unstable thermal convective solutions

从上述分岔图可见，如果  $l < l_c$ ，则当  $Ra$  跨过最小临界值  $Ra_c(l, 1, 1)$  时，平凡的静态传热解由稳定变得不稳定，并由此产生超临界的稳定的主分岔解。随着  $Ra$  增加到达平凡解上的第二临界值  $Ra(l, 1, 2)$ ，又一新的超临界主分岔解由此发生。当  $Ra$  继续增加而跨过此主分岔解上的二次分岔点后，该解由不稳定变得稳定，于是导致两个稳定的主分岔解存在。对  $l > l_c$  时的二次分岔现象，可作出类似的解释。取  $l = 1.2$ ，图 2 是根据 (2.11a,b) 和 (2.12) 以及 (1.4a,b) 画出的  $Ra = 57.0$  的流线及等温线。可以

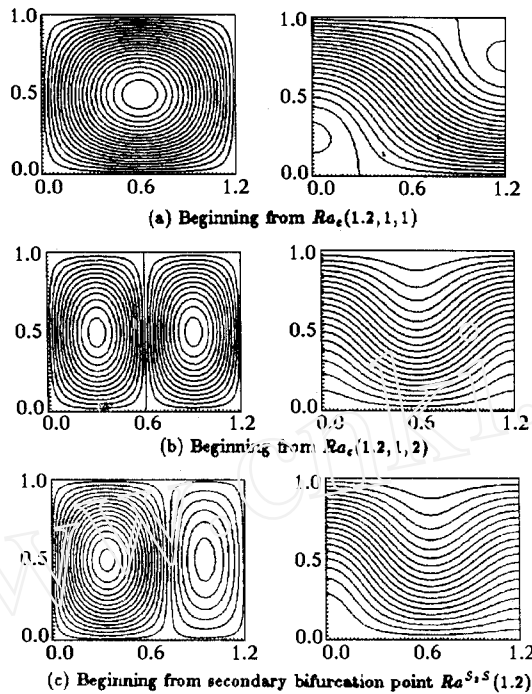


图 2  $l = 1.2$  时于  $Ra = 57.0$  处主分岔解及二次分岔解的流线 (左) 和等温线 (右)

Fig.2 Streamlines(left) and temperature contours(right) of primary and secondary bifurcation solutions at  $Ra = 57.0$  for  $l = 1.2$

看出, 从  $Ra_{c1}(1.2, 1, 1)$  开始的主分岔解是单回流, 从  $Ra_{c1}(1.2, 1, 2)$  开始的主分岔解是关于  $X = 0.6$  反对称的双回流, 而二次分岔解对应的虽然是双回流, 但关于  $x = 0.6$  是非对称的. 应该指出, 虽然有两个稳定的热对流驻态存在, 但发展方程的解究竟收敛到哪一个却与出始状态及扰动的幅度、历程有关.

注意本文的结果与文 [6] 有很大不同. 由于引进了矩形多孔介质的长宽比. 我们发现了比其更复杂的热对流解的分岔结构, 这使我们能较恰当地解释已有的数值模拟结果 [7]. 文 [7] 对方形 ( $l = 1$ ) 多孔介质内热对流的数值研究发现: 当  $Ra$  跨过 77.25 时, 便可出现稳定的双回流. 事实上, 此值恰是上节中  $l = 1$  时双回流主分岔解上的二次分岔点的  $Ra$  值.

现在, 我们从二次分岔解  $\Gamma_{2l}^{S_2}$  的渐近展开来估计二次分岔点的  $Ra$  值. 由 (2.12), 我们知道二次分岔点的  $Ra$  值 (令  $x = 0$ ) 是

$$Ra^{S_2S}(l) = Ra_c + \nu^2 \Lambda_0 + O(\nu^4) \tag{3.1}$$

令  $l = 1(\nu^2 = \sqrt{2} - 1)$  并忽略  $O(\nu^4)$  项, 我们有  $Ra^{S_2S}(1) \approx 64.65$ . 如果我们利用 Pade' 逼近来改进这一估计可得

$$Ra^{S_2S} \approx Ra_c / \left(1 - \frac{\Lambda_0}{Ra_c} \nu^2\right) = 81.58 \tag{3.2}$$

上述值与数值模拟 [7] 的第二临界  $Ra$  值 77.25 非常接近.

#### 4 结 论

通过引进矩型多孔介质的长宽比, 我们揭示了由方程 (1.6) 所描述的热对流的复

杂分岔现象——二次分岔. 再由对各个分岔解的稳定性研究, 我们发现, 如果  $l$  偏离临界值  $l_c = \sqrt{2}$ , 则当  $Ra$  跨过第二临界点产生的热对流主分岔解上的二次分岔点后, 该热对流状态由不稳定变为稳定, 从而与由最小临界  $Ra$  值产生的热对流主分岔解组成双稳定热对流状态. 特别地, 当  $l = 1$  时, 本文的理论分析所预言的二次分岔点的 Rayleigh 数与已有数值模拟发现的第二临界 Rayleigh 数更趋一致. 数值模拟<sup>[7]</sup>还发现: 当  $Ra$  跨过 158.39 时, 可出现稳定的三回流. 如何从理论上预言数值模拟所发现的这第三临界 Rayleigh 数, 有待进一步的研究.

### 参 考 文 献

- 1 Elder JW. *J Fluid Mechanics*, 1967, 27(part 1): 29~48
- 2 Horne RN, O'Sullivan MJ. *J Fluid Mechanics*, 1974 66(part 2): 329~352
- 3 Caltagirone JP. *J. Fluid Mechanics*, 1975, 72(part 2): 269~287
- 4 Kim S, Russel WB. *J Fluid Mechanics*, 1985, 154: 269~286
- 5 Ramesh PS, Torrance KB. *Numerical Heat Transfer*, part B, 1990, 17(1)
- 6 张涵信. 力学学报, 1994, 26(2): 129~138
- 7 张树海. 力学学报, 1993, 25(6): 721~725
- 8 郭敦仁. 数学物理方法, 人民教育出版社, 1979
- 9 Shearer M. *SIAM J Math Anal*, 1980, 11: 365~389
- 10 吴柏生. 力学学报, 1993, 25(4): 443~451
- 11 Wu Baisheng. Secondary buckling of an elastic strut under axial compression, *ZAMM*, 1995, 75(10): 741~751
- 12 吴柏生. 吉林大学自然科学学报, 1992, 3: 20~24
- 13 王仁宏. 数值有理逼近, 上海科学技术出版社, 1980

## BISTABLE STATES OF THERMAL CONVECTIONAL FLOW IN POROUS MEDIA

Wu Baisheng Jin Xizhuo Yan Guangwu

(Department of Mathematics, Jilin University, Changchun 130023, China)

**Abstract** The behaviour of bifurcations for thermal convectional flow in porous media, with respect to two parameters: bifurcational Rayleigh number and auxiliary aspect ratio of rectangular porous media, is studied. Attention is focused on those values of the aspect ratio at which, the two lowest critical Rayleigh numbers are near each other. We found the secondary bifurcation of the thermal convectional flow by means of the Liapunov-Schmidt reduction, and give the asymptotical expansions of the primary and secondary branches of these steady solutions. The analysis of stabilities indicates that the primary branch bifurcated from the secondary critical point becomes stable from unstable if the secondary bifurcation point is stridden. Thus this branch and the stable primary branch developed from the first critical point form bistable states of thermal convectional flow.

**Key words** porous media, rectangular cross-section, thermal convectional flow, secondary bifurcation, stability, bistable states, numerical simulation