

复合材料非对称层板的横向变形特性分析

许 可¹⁾ 张志民

(北京航空航天大学复合材料力学研究所, 北京 100083)

摘要 利用能量变分原理和非线性几何方程建立了具有弹性约束的复合材料层板在面内载荷作用下的非线性稳定性控制方程组. 通过运用广义傅立叶级数法对控制方程组进行求解, 得到了相应的载荷-中心挠度曲线, 并重点分析了非对称层板在面内载荷作用下的变形特性.

关键词 复合材料, 非对称层板, 非线性

引 言

自从 Reissner 和 Stavsky 于 1961 年对层合板静态小挠度理论作系统阐述以来, 许多学者已把这一理论用于非对称层合板的屈曲和后屈曲. 尽管对于非对称层板来说, 由于拉伸-弯曲耦合的存在使得数学求解非常困难, 但仍有大量的关于复合材料层板后屈曲的文献发表. Lagace^[1,2] 等对具有耦合效应的叠层板的屈曲和后屈曲特性进行了实验和理论研究, 结果表明弹性耦合效应会降低屈曲载荷, 不对称叠层板在开始加载时就有离开平面的挠度. Zhang^[3] 基于 Von Karman 理论用能量变分原理研究了不对称层合板和圆柱曲板在面内压缩和剪切载荷作用下的挠曲特性, 对不同的曲率半径和铺层方式进行了一系列的计算, 发现其挠曲特性有三种形式: 1) 有明显的屈曲现象; 2) 屈曲现象不明显; 3) 没有屈曲现象. Harris^[5] 指出, 由于拉弯耦合效应, 非对称层合板的分叉屈曲一般不会发生. 以上的研究工作虽然在复合材料板的几何非线性行为上取得了很大的进展, 但是也存在相当的不足. 例如对复合材料非对称层板的几何非线性分析往往仅局限于一个变形方向, 而未从全局分析, 因而在某些情况下漏掉了无论是从数学上还是从物理上讲均具有重要意义的解枝. 本文对此问题进行了深入的研究, 经过大量的计算及分析, 最后得到了一些比较重要的规律, 较好地解释了所发现的新问题.

1 理论分析

本文采用非线性理论, 考虑初始缺陷的非线性几何方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= u_{0,x} + \frac{1}{2} (w_0 + w_d)_{,x}^2 - \frac{1}{2} w_{d,x}^2 - z \cdot w_{0,xx} \\ St \quad y &= v_{0,y} + \frac{1}{2} (w_0 + w_d)_{,y}^2 - \frac{1}{2} w_{d,y}^2 - z \cdot w_{0,yy} \\ xy &= u_{0,y} + v_{0,x} + (w_0 + w_d)_{,x} \cdot (w_0 + w_d)_{,y} - w_{d,x} \cdot w_{d,y} - 2z \cdot w_{0,xy} \end{aligned} \right\}$$

¹⁾作者现在北京航空航天大学计算机科学与工程系攻读博士学位, 联系地址: 北航 7-63 信箱.
1996-03-02 收到第一稿, 1997-07-08 收到修改稿.

由此可得积分形式的平衡方程组如下

$$\int_0^a \int_0^b (N_{x,x} + N_{xy,y}) u_0 dx dy = 0 \tag{3}$$

$$\int_0^a \int_0^b (N_{y,y} + N_{xy,x}) v_0 dx dy = 0 \tag{4}$$

$$\int_0^a \int_0^b [M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} + (w_0 + w_d)_{,yy} (w_0 + w_d)_{,xx} + (w_0 + w_d)_{,xx} (w_0 + w_d)_{,yy} - 2(w_0 + w_d)_{,xy} (w_0 + w_d)_{,xy}] w_0 dx dy + \int_0^b [M_x(w_0)_{,x} + M_{xy}(w_0)_{,y}] / x=0^a dy + \int_0^a [M_y(w_0)_{,y} + M_{xy}(w_0)_{,x}] / y=0^b dx = 0 \tag{5}$$

显然 (3), (4) 自动满足, 利用余虚功原理可得积分形式的协调方程如下

$$\int_0^a \int_0^b \{ (w_0 + w_d)_{,xx} (w_0 + w_d)_{,yy} + (w_d)_{,xy}^2 - w_{d,xx} w_{d,yy} \} dx dy = 0 \tag{6}$$

将 (1), (2) 代入 (5) 和 (6), 并引入以下无量纲参数

$$\bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/b, \quad \bar{r} = a/b, \quad \bar{w} = w_0/h, \quad \bar{w}_d = w_d/h$$

由此得到无因次稳定性控制方程组如下

$$\int_0^1 \int_0^1 [\bar{L}_1(F) - \bar{L}_2(w) + \frac{1}{2} \bar{L}_A(w + \bar{w}, w + \bar{w}) - \frac{1}{2} \bar{L}_A(\bar{w}, \bar{w})] F d\bar{x} d\bar{y} = 0 \tag{7}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 [\bar{L}_3(w) + \bar{L}_4(F) - \bar{L}_D(w + \bar{w}, F)] w d\bar{x} d\bar{y} + \int_0^1 \int_0^1 \{ [\bar{L}_5(F) + \bar{L}_6(w)] (w)_{,xy} \} / \bar{r} d\bar{x} d\bar{y} + \int_0^1 \int_0^1 \{ [\bar{L}_7(F) + \bar{L}_8(w)] (w)_{,xy} \} / \bar{r} d\bar{x} d\bar{y} = 0 \tag{8}$$

其中 $\bar{L}_1 \sim \bar{L}_8$ 及 \bar{L} 为微分算子.

假定板边对横向挠度刚性支承, 对相对边具有同样程度的转动弹性约束, 则无因次的边界条件可以写为:

在 $\bar{x} = 0, 1$ 处

$$w = 0, \quad w_{,x} = -\beta_1 w_{,x}, \quad F_x = -\bar{N}, \quad F_y = -\bar{N}$$

在 $\bar{y} = 0, 1$ 处

$$w = 0, \quad w_{,y} = -\beta_2 w_{,y}, \quad F_x = -\beta^2 \bar{N}, \quad F_y = -\bar{N}$$

其中 β_1, β_2 分别是板边 $\bar{x} = 0, 1$ 和 $\bar{y} = 0, 1$ 处的弹性转动约束系数.

将方程 (7) 和 (8) 的解用傅立叶级数的形式表示为

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{N} \left[-\frac{2}{2} \mu - \frac{2}{2} \mu^2 - \mu + \sum_{m=1} \sum_{n=1} F_{mn} X_m(\cdot) Y_n(\cdot) \right] \\ w &= \sum_{m=1} \sum_{n=1} W_{mn} \phi_m(\cdot) \psi_n(\cdot) \\ \bar{w} &= \sum_{m=1} \sum_{n=1} \tilde{W}_{mn} \phi_m(\cdot) \psi_n(\cdot) \end{aligned} \right\}$$

www.cnki.net

关于复合材料非对称层板的稳定性问题，近年来已有多篇文章论述，由于非对称层板存在拉-弯耦合效应，因此从加载开始就会产生出面位移和弯矩，这时候稳定问题转化为弯曲问题。但是，就笔者所见到的文章，基本上都只讨论了非对称层板在受力以后一个方向上的变形，而另一个方向的情况未作分析。本文经过求解非线性稳定性方程组，得到了非对称层板在两个方向上的载荷-中心挠度曲线并且对此进行了分析和解释。由于本文所考虑的算例在面内力作用下所产生的位移模态在两个方向上均为一个半波，因此本文在绘制载荷-挠度曲线时，以中心挠度代表整块板的变形情况。

首先我们从图 1，图 2 中可以看出，非对称层板从加载开始便会产生出面位移，随着载荷的增大，位移也随之增大，只是当载荷增大到一定程度时，横向挠度随载荷增大的幅度有显著的提高。以上所述的这些现象在以前的文章中已有较详细的讨论，在此就不重复了。下面重点讨论另一个方向（在本文所计算的铺层情况下，即为负方向）的变形和受力状况。从图 1，2 中，我们可以发现，当层板向负方向变形时，载荷值也是负值，而载荷值为负则表示所受的力为拉力，也就是说当层板承受拉力时就产生了负方向的位移，但随着拉力的进一步增大，位移又逐渐趋于一定值。产生这种现象的原因是，当拉力增大，出现负向的变形以后，层板内会产生由拉力所引起的反弯矩，因此将阻止变形的进一步增大，如果不考虑层板的破坏，当拉力趋近于无穷大时，层板就会趋近于一个稳定的平衡状态。当位移值跨过渐近线 L 时，载荷值迅速地从负无穷大变为正无穷大，并且随负向位移的增大而迅速下降，当下降到最低点 C 以后又开始稳定上升。通过以上的分析，我们可以得到如下结论：尽管非对称层板在受载的初始阶段只能产生一个方向的变形，但是在另一个方向上也存在稳定的变形状态，只要当载荷值高于 C 点对应的数值以后，就有可能在外力的作用下产生如图所示的从 A 到 B 的跳跃，并稳定在 B 点对应的变形状态上。从上面的讨论可以看出，非对称层板在两个方向上的变形和受力都是有意义的，由于以前的文献只考虑了一个方向上的变形，因此是不全面的，通过本文的研究则可以使我们对非对称复合材料层板的稳定性问题有更进一步的认识。

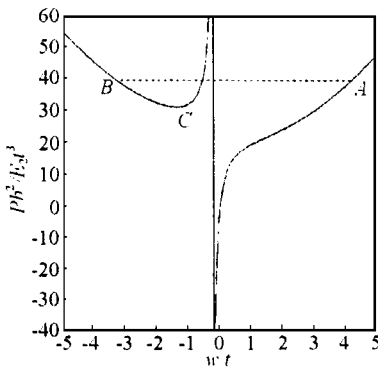


图 1 (15/0) 层板在简支边界条件下受面内力作用的载荷-中心挠度曲线

Fig. 1 Load-central deflection curve for simply supported (15/0) laminated plates under inplane load

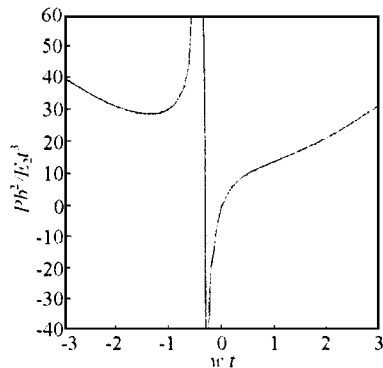


图 2 (45/0) 层板在简支边界条件下受面内力作用的载荷-中心挠度曲线

Fig. 2 Load-central deflection curve for simply supported (45/0) laminated plates under inplane load

从图 3~图 6 中可以看到，随着层板层数的增加，即当耦合作用减弱时，渐近线也越来越靠近纵轴，当层数趋近于无穷多，也就是耦合作用完全消除时，载荷-挠度曲线就转化为抛物线型曲线，并且渐近线也退化为纵轴。

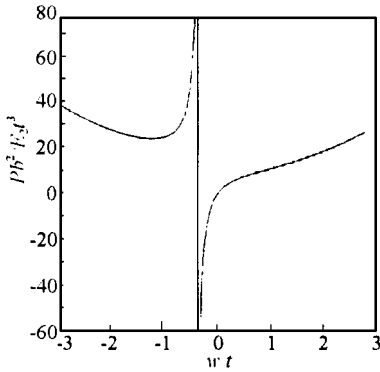


图 3 (90/0) 层板在简支边界条件下受面内力作用的载荷-中心挠度曲线

Fig. 3 Load-central deflection curve for simply supported (90/0) laminated plates under inplane load

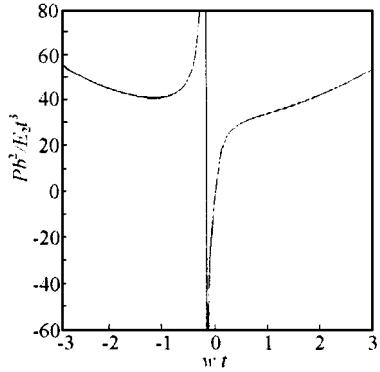


图 4 (90/0)_2 层板在简支边界条件下受面内力作用的载荷-中心挠度曲线

Fig. 4 Load-central deflection curve for simply supported (90/0)_2 laminated plates under inplane load

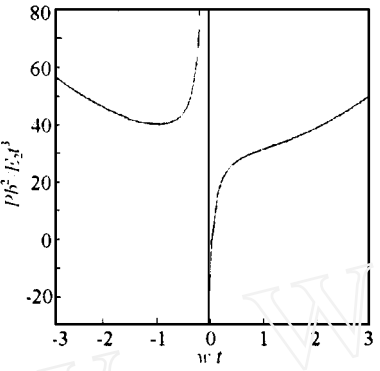


图 5 (90/0)_4 层板在简支边界条件下受面内力作用的载荷-中心挠度曲线

Fig. 5 Load-central deflection curve for simply supported (90/0)_4 laminated plates under inplane load

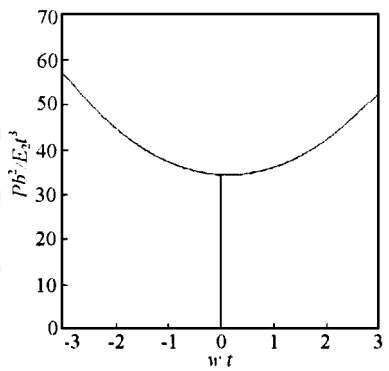


图 6 (90/0) 层板在简支边界条件下受面内力作用的载荷-中心挠度曲线

Fig. 6 Load-central deflection curve for simply supported (90/0) laminated plates under inplane load

与上面的分析类似, 从图 7~图 10 中可以看出, 当弹性支持系数增大时, 也就是随着边界抗弯能力的增强, 渐近线也越来越靠近纵轴, 当弹性支持系数趋近于无穷大, 即在固支边界条件下, 载荷-挠度曲线就转化为抛物线型曲线, 这时候渐近线也退化为纵轴.

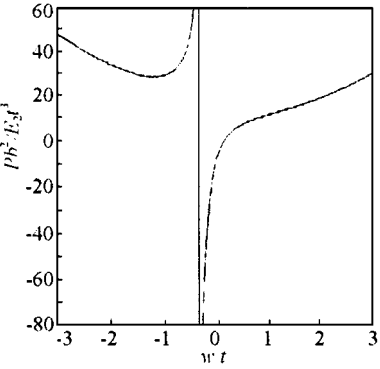


图 7 (90/0) 层板在弹性支持边界条件下受面内力作用的载荷-中心挠度曲线 (= 1)

Fig. 7 Load-central deflection curve for elastically supported (90/0) laminated plates under inplane load (= 1)

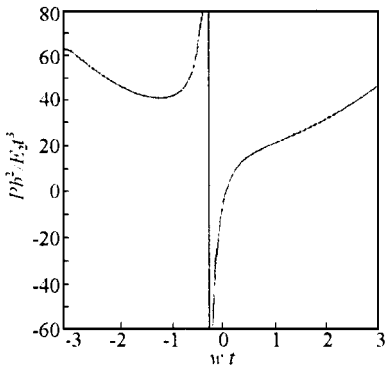


图 8 (90/0) 层板在弹性支持边界条件下受面内力作用的载荷-中心挠度曲线 (= 5)

Fig. 8 Load-central deflection curve for elastically supported (90/0) laminated plates under inplane load (= 5)

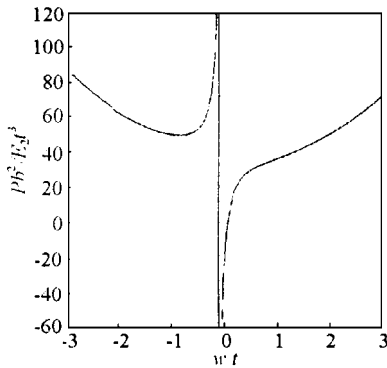


图9 (90/0) 层板在弹性支持边界条件下受面内力作用的载荷-中心挠度曲线 ($\nu = 25$)
Fig. 9 Load-central deflection curve for elastically supported (90/0) laminated plates under inplane load ($\nu = 25$)

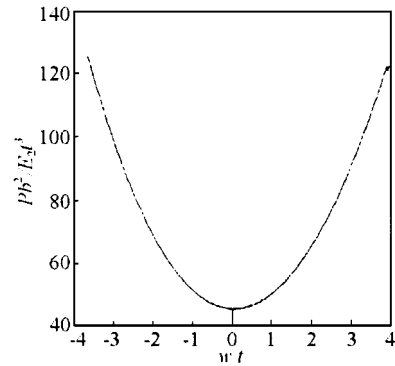


图10 (90/0) 层板在固支边界条件下受面内力作用的载荷-中心挠度曲线 ($\nu = 25$)
Fig. 10 Load-central deflection curve for clamped supported (90/0) laminated plates under inplane load ($\nu = 25$)

参 考 文 献

- 1 Lagace PA, Jesen DW, Firch DC. Buckling of Unsymmetric Composites, *Int J of Composite Struct*, 1986 (5)
- 2 Jesen DW, Lagace PA. Influence of Mechanical Coupling on The Buckling and Postbuckling Behavior of Anisotropic Plates, *AIAA J*, 1988, 26 (10)
- 3 Zhang Y. Buckling and Postbuckling Behaviour of Generally Layered Composite Panels, Ph. D. Thesis, University of London, Oct. 1982
- 4 Chia CY. Nonlinear Analysis of Plates, McGraw-Hill, New York, 1980
- 5 Harris GZ. The Buckling and Postbuckling Behaviour of Composite Plates under Biaxial Loading, *Int J Mech Sci*, 1975
- 5 许可. 复合材料加筋板在弹性支持边界条件下的非线性稳定性分析. 北京航空航天大学硕士学位论文, 1996
- 6 张志民. 复合材料结构力学. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1993

THE TRANSVERSE DEFLECTION ANALYSIS OF UNSYMMETRICAL COMPOSITE LAMINATED PLATES

Xu Ke Zhang Zhimin

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract The nonlinear governing equations of composite laminated plates with elastical restraint are established by use of energy variational principle and nonlinear geometric equations in this paper. The governing equations are solved by means of generalized Fourier series method, subsequently the corresponding load-deflection curves are obtained. The analysis in this paper is focused on the transverse deflection of unsymmetrical laminates.

Key words composite, unsymmetrical laminated plates, nonlinear