

多孔介质中对流的周期性解与混沌¹⁾

孔祥言 余敏
(中国科学技术大学力学系, 合肥 230027)

摘要 研究多孔介质内部有热源的对流传热. 用高阶差分研究在不同的渗流瑞利 (Rayleigh) 数 Ra 下对流随时间进展的演化情况 (为比较起见也适当考察倾斜角的影响). Ra 计算到大约 16 000. 结果表明: 在 Ra 较小时对流是稳定的, Ra 增大到 4 600 出现了非稳定的但为周期性的解. 随着 Ra 进一步增大, 出现一些混沌窗口. 对于有侧斜角的情形, 还出现阵发性.

关键词 自然对流, 多孔介质, 周期振荡, 混沌, 阵发性

引 言

多孔介质中对流的研究始于 20 世纪 40 年代. 起初着重线性稳定性分析. 70 年代开始着重研究非线性特征. 关于多孔介质中对流传热的混沌现象的研究首推 Kimura^[1]的工作, 他使用伪谱方法研究底部加热所引起的自然对流. 这类问题的研究进展详见文献[2].

采用有限差分方法对 Darcy-Boussinesq 方程进行直接的数值模拟, 考察由内部热源所引起的对流, 对方程中的非线性对流项采用 Arakawa^[3]格式进行空间离散. 这种差分格式在油藏数值模拟中用于计算饱和度分布和压力分布被证明是有效的^[4]. 计算给出了稳定解和非稳定解, 周期性解和混沌.

1 物理假设及其数学描述

我们研究矩形截面的多孔材料, 截面积为 A , 其宽为 $2a$, 高为 $2b$, 宽高比 $a/b = \dots$. 四周的力学边界条件为不透水, 热学边界条件为等温, 温度为 T_w . 多孔介质为单相牛顿流体所饱和. 假设固体多孔介质是均质和不变形的, 固相与液相处于热平衡状态. 普朗特-达西数较大, 惯性项可以略去不计. 流场温差较小, Boussinesq 近似成立. 热弥散足够小, 可导出有效热导率.

固体的特性参数有孔隙度 ϕ , 渗透率 K , 单位体积产热率为 q 的均匀热源, 热容量 $(c)_s$, 热导率 k_s . 流体的特性参数有粘度 μ , 热膨胀系数 β , 热容量 $(c_p)_f$, 热导率 k_f . 有效热导率为 $k = \phi k_f + (1 - \phi) k_s$. 而比热容 c 和总的热扩散系数 α 分别为

$$c = \frac{\phi (c_p)_f + (1 - \phi) (c)_s}{(c_p)_f}, \quad \alpha = \frac{k}{(c_p)_f}$$

基于上述物理假设, 我们写出非定常流的连续方程、达西定律和能量方程如下

$$\nabla \cdot V = 0 \tag{1}$$

¹⁾中国科学院渗流流体力学课题资助项目.

1996 - 08 - 07 收到第一稿, 1996 - 12 - 30 收到修改稿.

$$V = \frac{K}{\mu} (\nabla p + g) \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (V \cdot \nabla) T = \nabla^2 T + \frac{q}{(c_p)_f} \tag{3}$$

这是 xy 平面内的二维流动问题. 取坐标原点在矩形中心, x 轴与底边平行, y 轴与侧边平行. 方程(1) ~ (3)中带撇的自变量和应变变量是有量纲量, $V = (u, v)$ 为速度矢, T 为温度, g 为重力加速度. 引进流函数 ψ , 它满足

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

写出方程(2)的分量方程,将 x 和 y 方向的分量方程分别对 y 和 x 求偏导数,容易消去压力 p . 并定义下列无量纲量

$$x = \frac{x}{a}, \quad y = \frac{y}{b}, \quad t = \frac{t}{a^2/\nu}, \quad \psi = \frac{\psi}{\nu} \\ = \frac{T - T_w}{qA/k} \times 100, \quad u = \frac{u}{\nu/a}, \quad v = \frac{v}{\nu/b}$$

则得关于流函数 ψ 和温度函数 θ 的无量纲控制方程

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{100} Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{4}$$

$$\nabla^2 \theta = J(\psi, \theta) + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{4} \tag{5}$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad J(\psi, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

而渗流瑞利数 $Ra = K g q A b / k \mu$. 为计算方便起见,将温度函数乘以 100,使其具有 1 的量级. 如果绕 z 轴旋转使 x 轴对水平方向倾斜一个角度 α ,则方程(4)变为

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{100} Ra \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \alpha \right] \tag{6}$$

不难看出,以上控制方程中含有参变量 Ra , α , 还有倾斜角 α . 本文主要研究 Ra 对解结构的影响,并适当考虑倾斜角 α 的作用.

边界条件:记流动区域为 $R: (-1 \leq x, y \leq 1)$, 则有

$$(\psi = \pm 1, y) = (\psi, y = \pm 1) = 0, \quad (\psi = \pm 1, y) = (\psi, y = \pm 1) = 0 \tag{7}$$

为了研究传热,还需引进 Nusselt 数 $Nu = hD/k$, 其中 D 是特征尺寸,取等效直径 $D = 4ab/(a+b)$. 这里取平均传热系数 $h = qA/C(T_b - T_w)$, $C = 4(a+b)$, T_b 为矩形面积中平均温度. 取平均导热系数 $k = qA/b/100(T_b - T_w)$. 可以导出平均 Nusselt 数

$$Nu = \frac{100}{(1 + \alpha)^2} \frac{1}{b} \tag{8}$$

而 $b = A^{-1} \int_R dx dy$ 为无量纲平均温度. 在计算过程中可以求出每一个时间层上的平均 Nu 值.

2 数值计算方法

为了用差分方法进行计算, 将矩形区域 R 划分为若干网格, 其格点记作 (i, j) , $i = 0, 1, 2, \dots, I+1; j = 0, 1, 2, \dots, J+1$. 本文对于 $\beta = 1$ 的正方形截面采用 $I = J$, $x = y = d$. 对于较大的 β 适当取 $I > J$. 时间步长为 Δt .

关于差分格式, 方程(4)或(6)是人们熟知的椭圆型方程, 且不含时间导数项. 只要知道每个时间层上的 T 值, 不难解出 T 值, 对此方程采用中心差分即可. 方程(5)含有时间导数项 $\frac{\partial T}{\partial t}$, 扩散项 $\nabla^2 T$ 和非线性对流项 $J(T, T)$, 对这三项分别采用不同的差分格式. 对时间导数项采用中心差分即可. 而对于扩散项, 我们采用下列格式进行离散

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_{i,j}^n = \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n-1} + T_{i-1,j}^{n-1}}{d^2} \tag{9}$$

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]_{i,j}^n = \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n-1} + T_{i,j-1}^{n-1}}{d^2} \tag{10}$$

对于非线性对流项 J (Jacobi), $J(T, T)$, 如果采用简单的有限差分会引起数值的不稳定, 我们的实际计算也证明了这一点. 产生这个问题的原因在于简单的中心差分不能避免系统的动能损失. 为此, Arakawa 发展了 9 点和 13 点格式. 将 J 在点 (i, j) 邻近作 Taylor 展开. 虽然 Jacobi 的 9 点式 $J_9(T, T)$ 和 13 点式 $J_{13}(T, T)$ 仍为二级近似, 但是有

$$2J_9(T, T) - J_{13}(T, T) = J(T, T) + O(d^4) \tag{11}$$

即用 $2J_9(T, T) - J_{13}(T, T)$ 作为 $J(T, T)$ 的差分近似, 其截断误差为四阶的, 这是最后的 Arakawa 格式. 我们在靠近边界的格点上采用 9 点差分格式, 而在内点上采用最后的 Arakawa 格式. 至此, 方程(5)的差分方程可写成

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n-1}}{2 \Delta t} = \left[\nabla^2 T \right]_{i,j}^n + \frac{1}{4} [J(T, T)]_{i,j}^n \tag{12}$$

将式(9), (10)代入(12)并整理之可得用 $n-1$ 和 n 时间层上的 T 值求解 $n+1$ 时间层上 T 值的显式方程

$$\left(1 + 2 \frac{\Delta t}{d^2} \right) T_{i,j}^{n+1} = \left(1 - 2 \frac{\Delta t}{d^2} \right) T_{i,j}^{n-1} + \frac{\Delta t}{2} \left[\nabla^2 T \right]_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{4} [J(T, T)]_{i,j}^n \tag{13}$$

其中 $[J(T, T)]_{i,j}^n$ 为 n 时间层上的 Arakawa 差分格式. $n+1$ 时间层上的 T 值一经求出, 可立即由方程(4)或(6)求出同一时间层上的 T 值. 如此沿时间层逐步递进.

3 计算结果及分析讨论

根据定性判断和考察周期性解与混沌的几种常用方法^[5], 将计算结果用三种图线表示, 即



(1) $Nu-t$ 的时间历程图, (2) 功率谱图, (3) 相轨线图. 本文主要计算宽高比 $\beta = 1$ 和水平放置的情形(为比较起见,也适当计算了倾斜角 $\theta = 10^\circ$ 的情形). 除特别说明者外, 所给结果均指 $\theta = 0^\circ$ 情形. 计算 Ra 直到大约 16 000. 取空间网格数为 41×41 , 即空间步长 $d = 0.05$, 而时间步长 $\Delta t = 0.0005$. 计算是在工作站上进行的.

按上节所述, 可以算出每个时间层上的 (x, y) 和 (x, y) . 有了 (x, y) 以后由式(8)可算出 $Nu-t$ 时间历程图. 对 $Nu-t$ 曲线作快速富里叶变换(FFT)即得功率谱图. 相轨线图是能量 $E-Nu$ 曲线图, 由 (x, y) 可算出速度 $V(x, y)$, 继而算出全流场动能 $E = \int_R V^2 dx dy$. 实际计算表明, 所取的初始值只影响解的初始段, 对解的结构基本上没有影响, 这正是这类非线性方程的特征.

下面分析讨论计算结果. 计算表明: 对于较低的 Ra , 对流是稳定的, 在 $Nu-t$ 图上除初始段外是一条水平线, 而相图上为一点. Ra 增至 4 600(对倾斜角 $\theta = 10^\circ$ 情形, Ra 增至 6 000) 开始出现周期性对流. 图 1 给出 $Ra = 4 800$ 情形下其流线随时间的演变, 从中可以清楚地看出其周期性演变过程. 从流谱的观点, t 从 1.728 到 2.159 是半个周期, 到 2.589 完成一个周期. 但从 Nu 数的观点是完成两个周期, 因为在以上三个 t 值时 Nu 值是相同的. $Ra = 4 800$ 的时间历程图、功率谱图和相轨线图在图 2 的上中下三个部分给出. 上部为 $Nu-t$ 时间历程图, 除初始段受任意的初值影响外, 是周期振荡; 中部是功率谱图, 出现基频为 2.34; 下部为相轨线图, 它是一条封闭曲线. Ra 继续增大到 5 000 ~ 5 200, 流动仍为周期性的. 在 $Ra = 5 400$ 时出现混沌. 但在 Ra 增大到 5 800 时, 竟然又出现稳定对流, 如图 3 所示. 图 3(a) 中除初始段外是一条水平线, 图 3(b), 3(c) 分别为稳定的流线和等温线图. Ra 增大到 6 200 ~ 9 000, 又出现混沌状态. $Ra = 9 000$ 所出现的混沌示于图 4, 时间历程图上无周期振荡, 功率谱图上无明显尖峰频率, 相轨线图是典型的混沌结构, 任意的初始值(如图 4 下里面右下方的线段)很快被吸引到混沌区. 然而在 $Ra = 9 500$ 时, 再次出现周期性解. 这种状态一直持续到 $Ra = 11 000$ 左右.

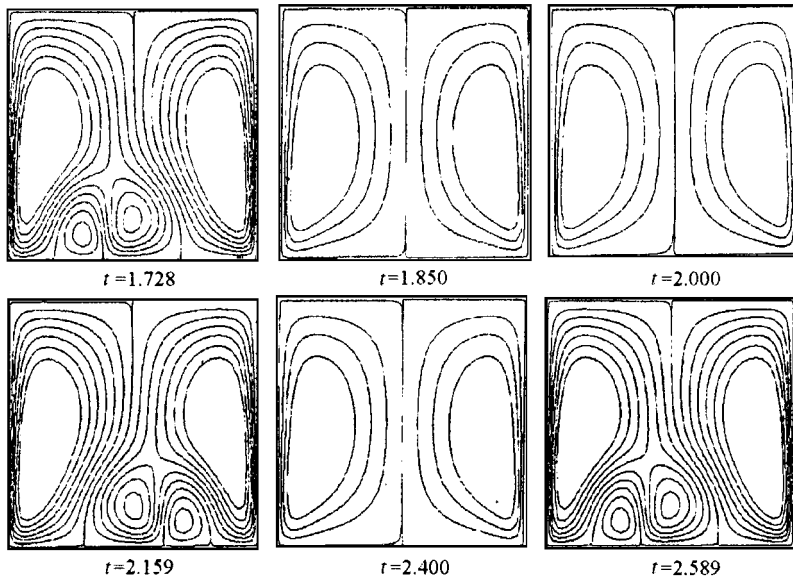


图 1 $Ra = 4 800$ 流线的周期性演变

Fig. 1 Periodic evolution of streamlines at $Ra = 4 800$

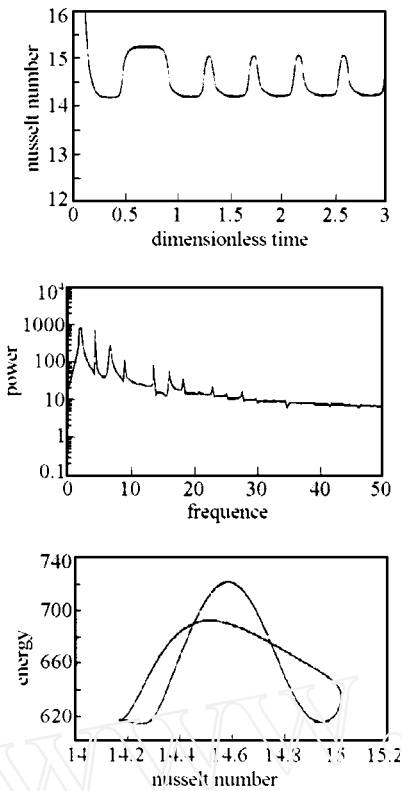


图 2 $Ra = 4\ 800$ 出现周期性解
Fig. 2 Periodic solution at $Ra = 4\ 800$

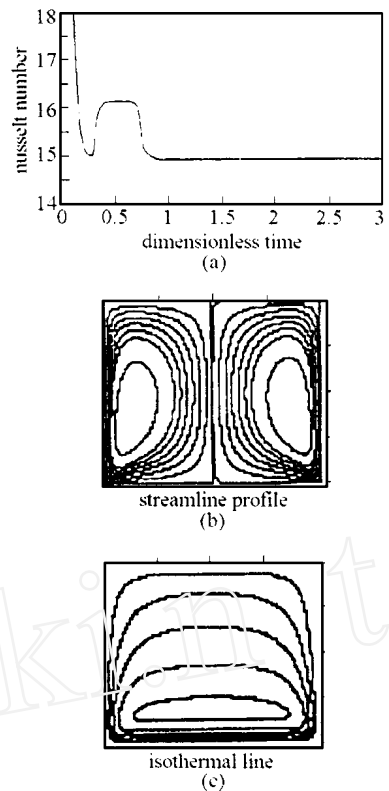


图 3 $Ra = 5\ 800$ 出现稳定的对流
Fig. 3 Stable convection occurs again at $Ra = 5\ 800$

图 5 示出了 $Ra = 11\ 000$ 下的周期性解情况. 此后在 $Ra = 11\ 500$ 流动又进入混沌. Ra 再继续增大, 在我们计算 Ra 直到大约 $16\ 000$ 的范围内, 就只出现混沌解.

特别值得指出的是: 对于倾斜角 $\theta = 10^\circ$, $Ra = 9\ 000$ 的情形, 流动的相轨线图由周期性对流和一个混沌区组成. 解在混沌区经历一段时间后会进入周期轨道, 然后再进入混沌区并又回到周期轨道, 如此循环往复, 如图 6 所示, 其中, 图 6(b), 6(c) 分别为从图 6(a) 中分离出的周期部分和混沌部分. 这种现象即所谓阵发性现象或称间歇性现象.

4 结 论

本文对不透水和等温边界矩形截面多孔材料中有热源的对流问题进行了动力学模拟. 对控制方程中不同的项采取不同的差分格式, 给出该系统的相干图, 用以描述该系统的非线性特性. 这些特性主要有以下几点:

1) 瑞利数 Ra 较小情形, 可以得到稳定的对流解. 计算表明: 有倾斜角比起无倾斜角, 稳定对流受到破坏的 Ra 有增大的趋势. 本文中, 无倾斜角情形 Ra 值约为 $4\ 500$, 而有倾斜角为 10° 情形 Ra 值约为 $6\ 000$.

2) 随着 Ra 增大, 首先出现的非稳定解是周期性对流解. 由对称涡卷的对流发展为非对称的, 然后又恢复为对称的, 如此周而复始, 形成周期振荡.

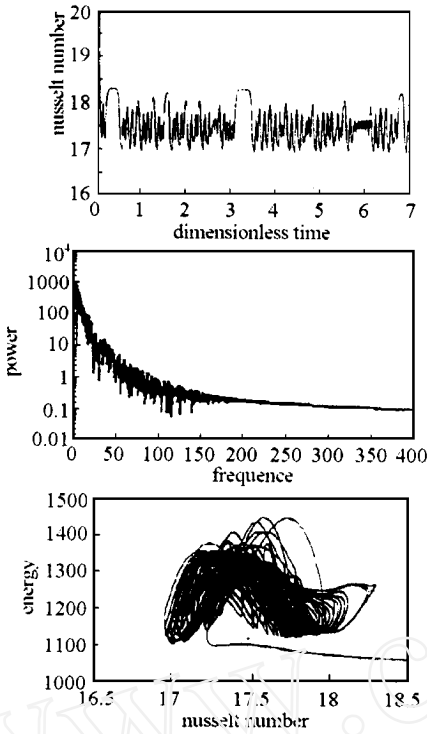


图4 $Ra = 9\ 000$ 出现混沌

Fig.4 Chaotic state occurs at $Ra = 9\ 000$

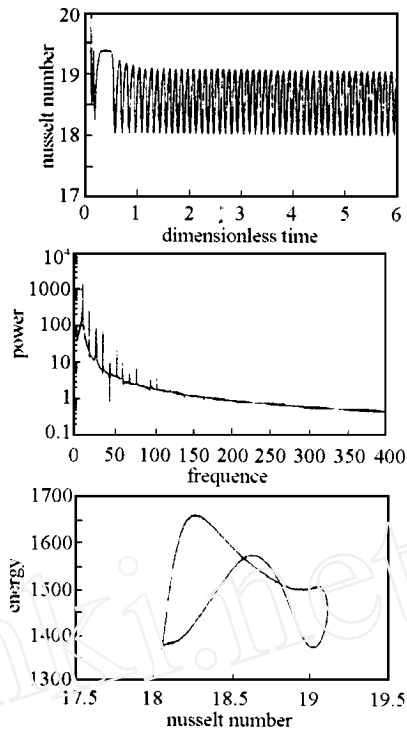
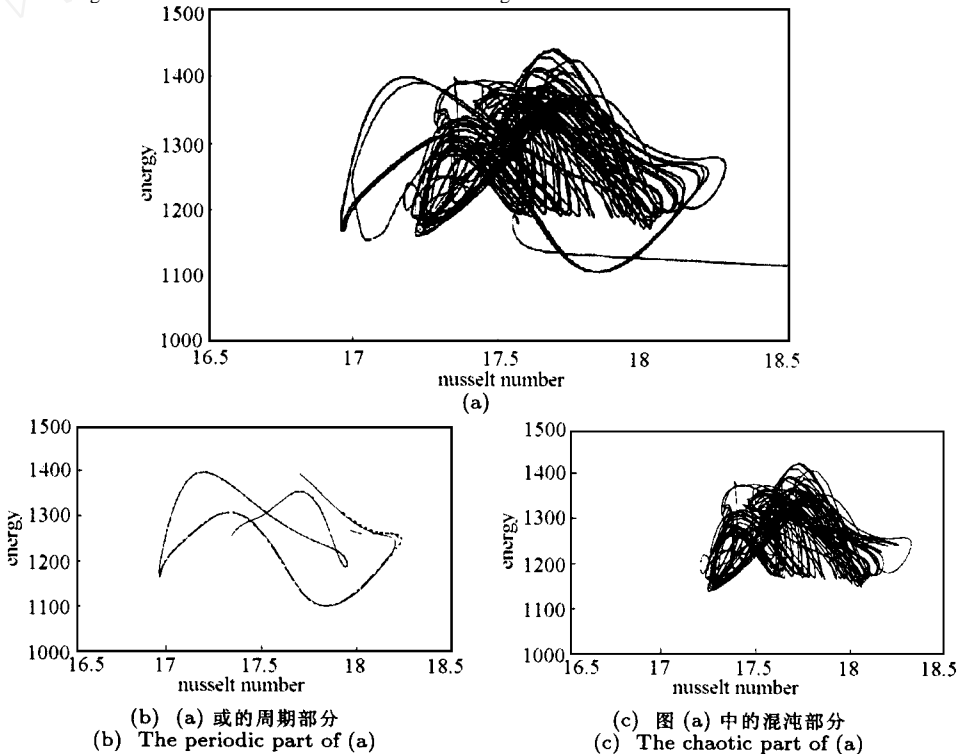


图5 $Ra = 11\ 000$ 出现周期性解

Fig.5 Periodic solution occurs at $Ra = 11\ 000$



(b) (a) 中的周期部分

(b) The periodic part of (a)

(c) 图(a)中的混沌部分

(c) The chaotic part of (a)

图6 倾斜角 $\theta = 10^\circ, Ra = 9\ 000$ 出现阵发性

Fig.6 Intermittent phenomenon occur at $Ra = 9\ 000, \theta = 10^\circ$

3) 多孔介质中对流的一个重要特点是随着 Ra 不断增大,并非是单调地由有序状态到越来越无序状态,而是从周期性对流进入混沌以后,会再回到周期状态,甚至稳定对流.继而再进入周期性对流,再进入混沌.

4) 在某些特定的 Ra 和倾斜角下,如本文中 $Ra = 9\ 000$, $\theta = 10^\circ$; 对流状态是混沌和周期性运动的循环往复,形成阵发性.这也是这类非线性流动的重要特性.

参 考 文 献

- 1 Kimura S, Schubert G, Straus JM. Route to chaos in porous - media. *J Fluid Mech*, 1986, 166: 305 ~ 324
- 2 孔祥言,卢德唐,徐献芝,王晓冬.多孔介质中对流的研究.力学进展,1996,26(4): 510 ~ 520
- 3 Akarawa A. Computational design for long - term numerical integration of the equations of fluid motion: Two - dimensional incompressible flow. *J Comput Phys*, 1966, 1: 119 ~ 143
- 4 Stevenson MP, Kagan M, Pinczewski, WV. Computational method in petroleum reservoir simulation. *Computers & Fluids*, 1991,19(1): 1 ~ 19
- 5 李翊神等编著.非线性科学选讲.合肥:中国科技大学出版社,1994.55 ~ 60

PERIODIC AND CHAOTIC SOLUTIONS OF CONVECTION IN POROUS MEDIA

Kong Xiangyan She Min

(Department of Modern Mechanics, USTC, Hefei 230027, China)

Abstract Convective heat transfer in a porous medium with uniform internal heat generation per unit volume q is studied. Evolution of convection with the lapse of time at various Rayleigh numbers is investigated by higher order difference techniques (effect of tilted angle is properly studied for comparison). Convection is computed up to about $Ra = 16\ 000$. The results show that the convection is stable at small Ra , and becomes periodic when Ra is increased to 4 600, as Ra is further increased there are some windows of chaos. For the tilting cases, intermittent phenomenon occurs.

Key words convection, porous media, periodic oscillation, chaos, intermittent phenomenon