

# 引导混沌运动到周期运动的自适应控制策略<sup>1)</sup>

胡海岩

(南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016)

**摘要** 提出一种自适应控制策略,对控制参数作线性反馈将非线性动力系统由混沌运动引导到指定的周期运动.所解决的关键问题是将反馈控制强度的确定转化为扩维相空间中的极点配置问题.给出了将该策略用于控制 Logistic 映射和受迫 Duffing 振子的仿真.

**关键词** 控制混沌,自适应控制,极点配置,Logistic 映射,Duffing 振子

## 引言

非线性动力系统常具有多种稳态运动,实际出现的稳态运动取决于系统控制参数及初始状态.若系统运行中控制参数受到扰动,系统会从当前稳态运动跳跃到其它稳态运动.如何通过调节控制参数使系统返回原运动状态,特别是从混沌运动返回到周期运动,是很有意义的问题.

有限维非线性系统的动力学可由一含控制参数向量的映射来描述

$$u_{k+1} = F(u_k, \mu), \quad u_k \in R^n, \quad \mu \in R^m \quad (1)$$

引导受扰系统返回原运动状态的一种有效方法是下述自适应控制策略,也称作参数自调节控制策略.该策略实时调节控制参数  $\mu$ ,使其增量与系统输出  $u_k$  和控制目标  $u_g$  间的误差成比例

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \Gamma(u_k - u_g), \quad \Gamma \in R^{n \times m} \quad (2)$$

其中  $\Gamma$  为控制强度矩阵. Huberman 和 Lumer (1990) 通过含单参数一维映射受扰后的状态恢复例证了策略(2)的有效性.他们发现,恢复过程所耗时间(简称之恢复时间)反比于控制强度<sup>[1]</sup>.不久, Sinha 和 Ramaswamy (1990) 成功地将该策略用于含单参数的三维自治微分方程系统及含二参数的一维映射<sup>[2]</sup>.这种策略的关键在于选择控制强度. Sinha (1991) 指出:若一维映射的原状态  $u_g$  渐近稳定且控制强度  $\Gamma$  足够小,则该策略可将受扰的一维映射引导回  $u_g$ .为缩短恢复时间,他提出一种逐渐增加控制强度的试算法并给出了用于 Logistic 映射的算例.然而,如何确定控制强度初值及高维系统的控制强度仍是遗留问题.本文的主要目的是提出一种解决上述问题的新策略.为行文简洁,我们仅讨论含单参数的动力系统控制问题,其进一步推广非常容易.

## 1 基于极点配置的新控制策略

我们建议的参数控制策略不仅依赖于系统输出  $u_k$  与控制目标  $u_g$  间的误差,还依赖于当前控制参数  $\mu_k$  与目标参数  $\mu_g$  间的误差

$$\mu_{k+1} \text{ 的增量} = -\Gamma \begin{bmatrix} u_k - u_g \\ \mu_k - \mu_g \end{bmatrix}, \quad \Gamma \in R^{(n+1) \times l} \quad (3)$$

<sup>1)</sup>国家自然科学基金、国家教委跨世纪优秀人才基金、国家教委优秀青年教师基金资助项目.

1995-08-24 收到第一稿,1996-11-04 收到修改稿.

为确定控制强度向量  $\bar{u}$ ，将映射(1)在控制目标  $u_g$  的邻域中线性化为

$$u_{k+1} = u_g + A(u_k - u_g) + B(\mu_k - \mu_g), \quad A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times l} \quad (4)$$

不失一般性,可要求线性化映射(4)可控,从而有满秩可控性矩阵

$$C = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] \in R^{n \times n} \quad (5)$$

将(3)式和(4)式合并,得到一个  $n+1$  维线性映射

$$\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ \mu_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_g \\ \mu_g \end{bmatrix} = (\bar{A} - \bar{B}^{-T}) \begin{bmatrix} u_k \\ \mu_k \end{bmatrix} \quad (6)$$

若能选择向量  $\bar{u}$  使矩阵  $\bar{A} - \bar{B}^{-T}$  的特征值模均小于 1,则  $u_{k+1}$  比  $u_k$  更接近于零,从而系统状态和控制参数同时趋于目标值.在控制论中,给定特征值确定向量  $\bar{u}$  是映射(6)的极点配置问题,实现完全极点配置的充要条件是映射(6)可控.注意到映射(6)的可控性矩阵为

$$\bar{C} = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & B & AB & \dots & A^{n-1}B \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in R^{(n+1) \times (n+l)} \quad (7)$$

矩阵  $C$  满秩可保证矩阵  $\bar{C}$  满秩,故映射(6)可控,进而可选择控制强度  $\bar{u}$  来任意配置极点.

根据控制论中的极点配置公式,控制强度向量应取为

$$\bar{u}^{-T} = [b_{n+1} - a_{n+1} \quad b_n - a_n \quad \dots \quad b_1 - a_1](\bar{C} \tilde{W})^{-1} \quad (8)$$

其中

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & k & \dots & \dots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{(n+1) \times (n+1)} \quad (9)$$

$a_i, i=1,2,\dots,n+1$  是矩阵  $\bar{A}$  的特征多项式系数;而  $b_i, i=1,2,\dots,n+1$  是矩阵  $\bar{A} - \bar{B}^{-T}$  特征多项式系数,与所配置的极点之间由韦达定理提供联系.

### 2 新控制策略的特点

与现有控制策略<sup>[1~3]</sup>不同,新策略中受控系统在目标状态附近的渐近稳定性与原系统在目标状态附近是否稳定无关.因此,新策略可将受控系统引导到原系统的不稳定运动上,特别是将受控系统引导到嵌入在混沌吸引子中的各种不稳定周期轨道上.因此新策略是 OGY 控制策略<sup>[4]</sup>的一种推广,其控制范围比 OGY 控制策略的大.

将式(2)与式(3)相比较易见,文献[1~3]中的控制策略是新策略的一种特殊形式,即取

$$\bar{u} = [1 \quad 2 \quad \dots \quad n \quad n+1]^T = [1^T \quad 1]^T \quad (10)$$

这一方面说明,新策略中的式(8)为现有控制策略提供了一种确定控制强度的方法;另一方面表明,现有控制策略是一种附加约束  $u_{n+1} = 1$  后的极点配置,因此不能实现任意极点配置.



由于该策略基于线性化映射(4),因此所得控制强度的有效性限在目标状态附近.如果系统控制参数受到大扰动而使系统状态严重偏离目标,则由控制策略(2)或(3)所确定的控制参数增量均有可能超出实际所允许的范围.为此,有必要对控制策略附加一饱和条件.一种自然选择是允许控制参数增量在目标值和大扰动值间变化.

### 3 数值仿真

为行文方便,以下用 HL 代表具有定常控制强度的 Huberman-Lumer 策略,用 SV 代表具有时变控制强度的 Sinha 策略,用 PA 代表上述新策略.此外,用 PA-1 和 PA-2 分别代表确定控制强度时是否附加约束  $n_{+1} = 1$ .

#### 3.1 Logistic 映射

考察具有自适应参数  $\mu$  的一维 Logistic 映射

$$\left. \begin{aligned} u_{k+1} &= \mu_k u_k (1 - u_k), \\ \mu_{k+1} &= \mu_g - \mu_1 (u_k - u_g) - \mu_2 (\mu_k - \mu_g), \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} u_k \in [0, 1], \mu_k, \mu_g \in [0, 4] \end{array}$$

和 $\mu_{1,2} = 0.0$ . 这时 HL 和 SV 失效,而 PA 成功地将映射状态引导到 P-1 不稳定不动点. 因篇幅所限,图 2 仅给出 SV 和 PA-2 的控制效果对比.

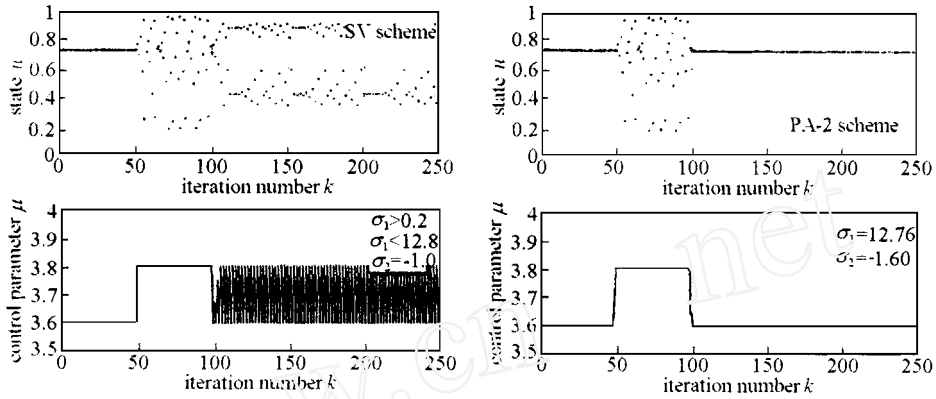


图 2 二种策略在引导 Logistic 映射不稳定不动点时的效果对比

Fig. 2 Comparison of SV and PA-2 in recovering a stable P-1 fixed point of the Logistic map

### 3.2 简谐激励下的 Duffing 振子

研究激励幅值  $\mu$  可控的受迫 Duffing 振子

$$\ddot{x}(t) + 0.1 \dot{x}(t) + x^3(t) = \mu \cos t \tag{12}$$

它描述了一个基础简谐运动的倒摆的中等幅度摆动,摆较线性扭转弹簧产生的扭矩与重力产生的扭矩线性项相平衡. 通过对振子状态在整倍激励周期时刻  $2k$  的采样,振子的动力学可由一含控制参数  $\mu$  的二维 Poincare 映射来描述.

先对初始静止的振子施加一定常幅值为  $\mu = 4.5$  的简谐激励,100 个激励周期后振子运动被吸引到稳定的 P-1 轨道上. 在此后 100 个激励周期中,将激励幅值阶跃扰动为  $\mu = 7.5$ ,使振子进入混沌运动. 然后,分别启动上述控制策略将振子的状态引导回原来的稳定 P-1 轨道. 在 HL 中取  $\mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.0, \mu_3 = -1.0$ ,而 P-2 的极点配置在 0.1, 0.0 和 0.0. 图 3 给出了 HL 和 PA-2 二种控制策略的效果对比,新策略再一次体现出恢复时间短的优点.

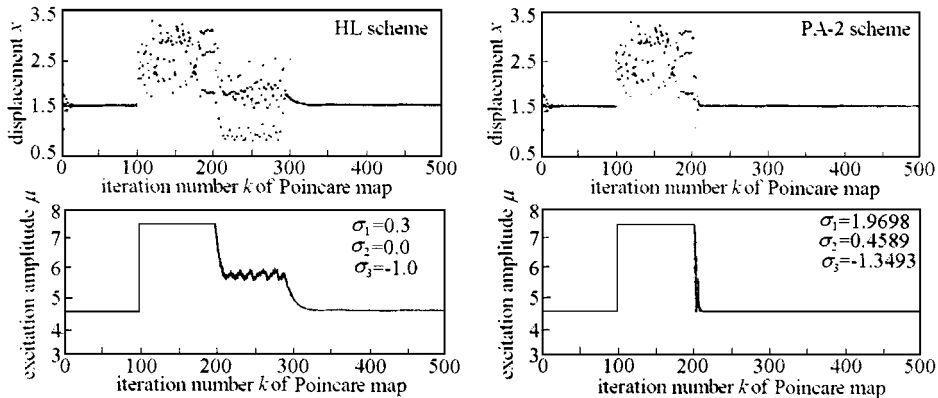


图 3 二种策略在恢复受迫 Duffing 振子稳定 P-1 轨道时的效果对比

Fig. 3 Comparison of HL and PA-2 in recovering a stable P-1 orbit of the forced Duffing oscillator

#### 4 结 论

1) 新控制策略提供了根据线性化受控系统极点来选择控制强度的方法, 从而无需根据经验猜测控制强度或其初值. 因此, 可通过零极点配置获得最短的恢复时间.

2) 该控制策略可将系统引导到事先选定的不稳定不动点或周期轨道, 特别是混沌吸引子中嵌入的不稳定周期轨道. 因此, 新策略还是对 OGY 控制策略的一种推广.

#### 参 考 文 献

- 1 Huberman BA, Lumer E. Dynamics of Adaptive Systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1990, 37: 547 ~ 550
- 2 Sinha S, Ramaswamy R. Adaptive Control in Nonlinear Dynamics, *Physica D*, 1990, 43: 118 ~ 128
- 3 Sinha S. An Efficient Control Algorithm for Nonlinear Systems, *Physics Letters A*, 1991, 156: 75 ~ 478
- 4 Ott E et al. Controlling Chaos, *Physical Review Letters*, 1990, 64: 1196 ~ 1199

### AN ADAPTIVE CONTROL STRATEGY FOR DIRECTING CHAOTIC MOTION TO PERIODIC MOTION

Hu Haiyan

( Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China )

**Abstract** The paper presents an adaptive control strategy for directing the chaotic motion of a nonlinear system to a periodic motion through the linear feedback of a control parameter. The key problem solved is to choose the control stiffness in the feedback by means of the pole assignment of linearized controlled system in an extended state space spanned by the system state and the system parameter. The paper gives the simulations of recovering the fixed point of the Logistic map and the periodic orbit of a harmonically forced Duffing oscillator from the chaos due to a large disturbance in the control parameter. The simulations demonstrate well the efficacy and the advantages of the adaptive control strategy.

**Key words** controlling chaos, adaptive control, pole assignment, Logistic map, Duffing oscillator