

# 双材料间界面断裂分析的广义界面层模型

王旭跃 邹振祝\* 王 铎

(哈尔滨工业大学航天工程与力学系, 哈尔滨 150001)

\* (石家庄铁道学院交通系, 石家庄 050043)

**摘要** 给出了双材料间界面层区域的广义模型, 并对承受扭转载荷的界面间硬币形裂纹进行了分析与计算. 通过处理奇异积分方程得到了应力强度因子, 数值结果给出了材料特性、界面层厚度、尤其是分布特征参数  $k$  对应力强度因子的影响. 与 Erdogan 界面层模型的结果比较表明, 本文的模型更具有一般性.

**关键词** 界面层, 分布特征参数, 硬币形裂纹, 奇异积分方程, 应力强度因子

## 引言

自 Williams<sup>[1]</sup>发现了双材料间界面裂纹的应力振荡奇异性以来, 界面断裂问题一直为人们所关注. 几种小尺度接触区模型<sup>[2~5]</sup>和弹塑性分析方法<sup>[6~8]</sup>被引入以描述界面断裂机制. 另一方面, 一些研究者<sup>[9~12]</sup>引入了界面层的概念. 尤其是复合材料工艺的发展确定了界面层的存在, 这就使得在双材料间引入界面层实际可行. 由于界面层中弹性模量连续分布与相邻材料无模量间断, 因而振荡奇异性不再是一个问题, 问题在于更合理建立界面层模型. Erdogan<sup>[9~11]</sup>提出了一种界面层模型, 沿界面层厚度方向, 模量分布取为  $\mu_2(z) = \mu_1 e^{-z/h}$ , 其中  $h = \frac{1}{\ln \frac{\mu_3}{\mu_1}}$ . 从 Erdogan 近几年给出的很多数值结果容易发现, 他提出的模型完全依赖于与界面层相邻的材料特性与界面层厚度, 这与实际未必相符, 另外也极大地限制了界面层中模量分布的类型. 我们提出一种更为一般的界面层模型, 取  $\mu_2(z) = (a + bz)^k$ , 这里  $a = \sqrt[k]{\mu_1}$ ,  $b = (\sqrt[k]{\mu_3} - \sqrt[k]{\mu_1}) / h$ ,  $k$  与  $\mu_1$ ,  $\mu_3$  及界面层厚度  $h$  无关. 基于此模型, 我们给出了双材料间承受扭转载荷的硬币形裂纹的分析与计算结果. 与 Erdogan 的结果比较表明, 本文提出的界面层模型更灵活更具有一般性. Erdogan 的界面层模型可以通过对本文所引入的模型取  $k \rightarrow 0$  时获得.

## 1 基本方程与奇异积分方程的获得

研究图 1 所示的界面间硬币形裂纹问题.  $h$  为界面层厚度,  $c$  为裂纹半径, 裂纹面上沿周向作用反对称载荷  $p(r)$ , 这样, 位移  $u = v$  及应力  $\sigma_r$  与  $\sigma_z$  是非零物理量, 其控制方程为

$$\text{tV} \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + \frac{\mu_2(z)}{\mu_2(z)} \frac{\partial \mu_2}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} v_2(r, 0) = p(r), \quad 0 \leq r < c \quad (3)$$

$$v_2(r, +0) = v_1(r, -0) \quad r > c \quad (4)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} v_2(r, h) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_2(r, h), \quad 0 \leq r < c \quad (5)$$

$$v_3(r, h) = v_2(r, h), \quad 0 \leq r < c \quad (6)$$

引入一阶 Hankel 变换

$$v_i(r, z) = \int_0^\infty V_i(z, \rho) J_1(\rho r) \rho d\rho, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

式中  $J_1$  为第一类 Bessel 函数. 式 (1) 成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V_i(z, \rho)}{\partial z^2} - \rho^2 V_i(z, \rho) &= 0, \quad i = 1, 3 \\ \frac{\partial^2 V_2(z, \rho)}{\partial z^2} + \frac{\mu_2(z)}{\mu_2(z)} \frac{\partial V_2(z, \rho)}{\partial z} - \rho^2 V_2(z, \rho) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

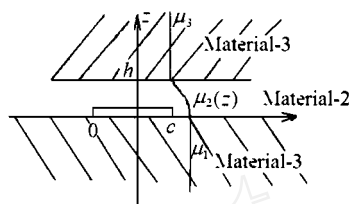


图 1 界面硬币形裂纹

$$\mu_2(z) = (a + bz)^k, \quad \mu_2(0) = \mu_1, \quad \mu_2(h) = \mu_3$$

Fig. 1 Interface penny-shaped crack,

$$\mu_2(z) = (a + bz)^k, \quad \mu_2(0) = \mu_1, \quad \mu_2(h) = \mu_3$$

)

]

交换和 Chebyshev 多项式展开, 方程 (15) 和 (16) 被转化为如下的线性方程组

$$\begin{aligned}
 + \quad & \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{t_k - x_r} + \frac{c}{2} Q(t_k, x_r) \right] \cdot \frac{F(t_k)}{n} = \left. \begin{aligned} & p \\ & \frac{1+x_r}{2} c \\ & \mu_2(0) \end{aligned} \right\} = \\
 & \sum_{k=1}^n \frac{1+t_k}{n} F(t_k) = 0
 \end{aligned}$$

www.cnki.net

了这种差别.

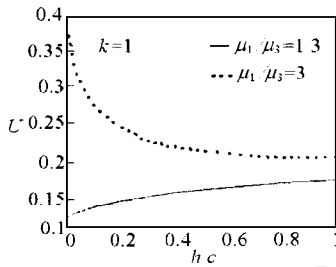


图 2  $U$  随  $h/c$  的变化趋势  
Fig.2  $U$  as a function of  $h/c$

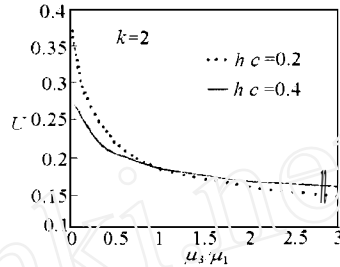


图 3  $U$  随  $\mu_3/\mu_1$  的变化趋势  
Fig.3  $U$  as a function of  $\mu_3/\mu_1$

表 2  $K_{III}$  与  $U$  随  $\mu_1/\mu_3$  的变化规律

Table 2 The variation of  $K_{III}$  and  $U$  with  $\mu_1/\mu_3$

	$h/c=0.1 \quad k=2$						
	$\mu_1/\mu_3$	1/22	1/3	1/2	2	3	22
$K_{III}$		0.315 15	0.362 76	0.381 20	0.482 85	0.522 58	0.734 28
$U$		0.099 32	0.131 59	0.145 31	0.233 14	0.273 09	0.539 17

表 3 说明，对于固定的  $\mu_1/\mu_3$  及  $h/c$ ， $K_{III}$  与  $U$  随着分布特征参数  $k$  的增加而缓慢增大。表 4 表明，对于固定的材料组合与界面尺寸，本文给出的三种分布形式所确定的应力强度因子均小于 *Erdogan* 所给出的相应于指数分布的结果。对本文所引入的分布形式进行极限分析，得到

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_2(z) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_1 \left[ 1 + \frac{k \sqrt{\mu_3/\mu_1 - 1}}{h} z \right]^k = \mu_1 e^{\frac{z}{h} \ln \frac{\mu_3}{\mu_1}} \quad (25)$$

上式恰好是 *Erdogan* 的指数型分布  $\mu_2(z) = \mu_1 e^{\frac{z}{h} \ln \frac{\mu_3}{\mu_1}}$ 。表 3 和表 4 的结果则反映了  $k$  增大时的这一趋势，当  $k \rightarrow +\infty$  时，应力强度因子会递增接近于 *Erdogan* 的结果。*Erdogan* 所给出的结果是本文广义界面层模型所能给出的结果的上限。

表 3  $K_{III}$  与  $U$  随分布特征参数  $k$  的变化规律

Table 3 The variation of  $K_{III}$  and  $U$  with distribution parameter  $k$

$k$	$\mu_1/\mu_3 = 3 \quad h/c = 0.2$			$\mu_1/\mu_3 = 1/3 \quad h/c = 0.2$		
	1	2	3	1	2	3
$K_{III}$	0.371 70	0.373 70	0.374 99	0.488 03	0.492 93	0.494 23
$U$	0.138 16	0.139 65	0.140 62	0.238 17	0.242 98	0.244 27

注意到分布特征参数  $k$  的大小反映了模量分布在  $z = 0$  点的导数特性，我们引入  $\frac{1}{|\mu_2'(0)|}$  表示裂纹界面层材料的局部均匀化程度。从表 3 和表 4 中可以看出，对于确定的材料组合与界面层厚度，当裂纹处于低模量材料界面处时，局部均匀化程度越小，应力强度因子越大。当裂纹处于高模量材料界面处时，局部均匀化程度越大，应力强度因子越小。

表4 本文结果  $K_{III}$  与 Erdogan 的结果  $K_{III}$  比较Table 4 The comparison between Erdogan's results  $K_{III}$  and our results  $K_{III}$ 

$h/c = 0.1 \quad k = 1$				
$\mu_1/\mu_3$	1/22	1/3	3	22
$K_{III}$	0.304 02	0.361 06	0.518 90	0.685 50
$K'_{III}$	0.319 00	0.364 00	0.513 00	0.803 00
$h/c = 0.1 \quad k = 1$				
$\mu_1/\mu_3$	1/22	1/3	3	22
$K_{III}$	0.317 85	0.363 27	0.525 39	0.756 72
$K'_{III}$	0.319 00	0.364 00	0.531 00	0.803 00

## 参 考 文 献

- Williams ML. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bull Seisimol Soc Am*, 1959, 49: 199 ~ 204
- Rice JR. Elastic fracture mechanics: Concepts for interfacial crack. *J Appl Mech*, 1988, 55: 98 ~ 103
- Comninou M. The interface crack. *J Appl Mech*, 1977, 44: 631 ~ 636
- Achenbach JD. Loss of adhesion at the tip of an interface crack. *J Elasticity*, 1979, 9: 397 ~ 424
- Atkinson C. The interface crack with a contact Zone. *Int J Fract*, 1982, 18: 161 ~ 171
- 高玉立, 楼志文, 杜庆华. 幂硬化材料复合型界面裂纹问题. *力学学报*, 1988, 20: 375 ~ 380
- 夏霖, 王自强. 弹性双材料界面裂纹的渐近分析. *固体力学学报*, 1992, 3
- Shih CF. Crack on bimaterial interface: elasticity and plasticity aspects, for presentation at the US-Japan Seminar, 1990, Honolulu, Hawaii
- Ozturk M, Erdogan F. Antiplane shear crack problem in bonded materials with a graded interfacial zone. *Int J Engng Sci*, 1993, 51: 1641 ~ 1657
- Ozturk M, Erdogan F. An axisymmetric crack in bonded materials with a nonhomogeneous interfacial zone under torsion. *J Appl Mech*, 1995, 62: 116 ~ 125
- Delale F, Erdogan F. On the mechanical modelling of the interfacial region in bonded half-planes. *J Appl Mech*, 1988, 55: 317 ~ 324
- Yang Wei. Fracture along an interlayer. *Int J Solids Struct*, 1994, 31: 985 ~ 1002
- Erdogan F. Complex function technique. In: *Continuum Physics, Vol II*. New York: Academic Press, 1975. 523 ~ 603

## A GENERALIZED INTERLAYER MODEL FOR INTERFACE FRACTURE ANALYSIS BETWEEN BIMATERIALS

Wang Xuyue Zou Zhenzhu \* Wang Duo

(Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

\* (Department of Transportation, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China)

**Abstract** A generalized model of interfacial zone between bimaterials is presented. By virtue of this model, a penny-shaped interface crack is investigated under torsion. Stress intensity factor is obtained by solving singular integral equation. Numerical examples are given to show the effects of material properties, interlayer thickness, and especially the distribution parameter  $k$  on the stress intensity factor. The comparison between Erdogan's results and our results shows that the interlayer model presented in this paper is more general.

**Key words** interlayer, distribution parameter, penny-shaped crack, singular integral equation, stress intensity factor