

柔性机械臂两点边值逆动力学方法 ——理论分析和实验结果¹⁾

毕世华

(北京理工大学机电控制工程系, 北京 100081)

黄文虎 邵成勋 费从宇

(哈尔滨工业大学航天工程与力学系, 哈尔滨 150001)

摘要 基于最优控制模拟思想提出了柔性机械臂的两点边值逆动力学方法. 应用柔性机械臂的两种动力学模型可实现机械臂的点-点位置运动或轨迹追踪, 同时显著降低或消除了结构柔性对其精确定位的影响. 数值仿真和实验结果同理论分析完全一致.

关键词 机器人逆动力学, 非线性两点边值问题, 拟线性化, 轨迹追踪

引言

工业机器人或机械臂的轻质、柔性化, 一方面提高了工作效率和机动性, 另一方面使弹性振动问题更加突出. 振动严重影响其正常工作和精确定位. 有多种途径来减小或消除柔性机械臂的弹性振动, 其中振动的主动控制是有效方法之一, 已经提出了多种控制策略^[1~5], 但由于柔性机械臂强耦合、强非线性的复杂动力学特征, 实时控制中诸如状态重构、可控性、稳定性、实时性等问题还没有得到很好的解决^[6].

近几年提出的柔性机械臂逆动力学方法^[7]是通过直接设计其铰键处的开环输入在实现机械臂点-点位置运动或跟踪优化轨迹的同时有效地降低或消除弹性振动. 柔性机械臂逆动力学方法避免了主动控制中所遇到的困难问题, 是一个很有前景的研究方向, 但由于刚刚提出, 还没有建立完善的求解方法. Bayo 等人^[7,8]提出了基于有限元模型的频域迭代方法, 完成了单连杆和双连杆柔性机械臂的逆动力学分析并进行了简单的实验验证; Meckl, Seering 和 Singer 提出了修正力矩法^[9~11]和动态滤波方法^[12~13], 但这些方法或者依赖线性模型、算法复杂, 或者仅是弹簧-质量简化模型的结果, 难以推广到一般柔性机械臂的强耦合、强非线性情况.

柔性机械臂或多柔体系统一般为连续的无穷维动力学系统, 为处理方便, 在一般的动力学分析与控制应用研究中, 需将其模化为有限自由度系统. 建立柔性机械臂动力学模型的首要任务是模化弹性体的相对弹性变形. 一般说来, 有限元方法的适用面较广, 不受弹性体形状限制, 但所得的动力学方程较为复杂, 响应计算运算量较大^[8]; 而由 Ritz 基函数展开法结合模态截断技术, 可得到较低维数的系统模型, 因而被广泛地应用于控制系统的设计^[1, 2, 4, 5, 7, 9~12, 17~20], 但应注意未模化模态的稳定性问题^[21].

将柔性机械臂的有限维动力学方程化为状态空间描述, 然后应用最优控制理论中的极大值

1) 国家自然科学基金、西安交通大学结构强度与振动实验室开放研究基金及北京理工大学引进人才科研启动基金共同资助项目.
1993-02-26 收到第一稿, 1996-06-14 收到修改稿.

原理将柔性机械臂的点-点位置运动和振动抑制问题归结为非线性两点边值问题的求解. 边值条件由机械臂的初始状态和要求的点位运动或追踪的轨迹及弹性变形条件给出. 为了有效地求解非线性两点边值问题, 作者提出了模型递推算法^[16]作为对拟线性化方法^[14]的改进和推广. 本文提出的两点边值逆动力学方法不受模型限制, 可处理一般柔性机械臂的强耦合、强非线性情况.

1 点位控制两点边值逆动力学方法

柔性机械臂的非线性状态方程可写成一般形式如下^[16]

$$\dot{X} = f(X, U, t) \tag{1.1}$$

式中, 状态向量 $X = ({}^T, q^T, \dot{}^T, \dot{q}^T)^T$, 为描述刚体运动即各连杆间相对转动及滑移坐标构成的向量, q 为描述各连杆相对弹性变形的广义坐标向量, U 为机械臂铰键输入构成的向量.

如果要求柔性机械臂在关心时间 $[t_0, t_f]$ 内成形由 ${}_0$ 转变为 ${}_f$, 并且要求机械臂在 t_f 时刻后完全处于静止状态, 只有使

$$X(t) / t=t_f = ({}_f \ 0^T \ 0^T \ 0^T)^T \tag{1.2}$$

并且考虑输入满足

$$U(t) / t \geq t_f = 0 \tag{1.3}$$

则由机械臂动力学特征^[16]可推得

$$X(t) / t \geq t_f = ({}_f \ 0^T \ 0^T \ 0^T)^T \tag{1.4}$$

记机械臂的初始状态为

$$X(t) / t=t_0 = X_0 \tag{1.5}$$

一种最基本的逆动力学问题是设计时间 $[t_0, t_f]$ 内的铰键输入矢量 $U(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, 且 $U(t) = 0$, $t \notin [t_0, t_f]$, 使柔性机械臂由初始状态 X_0 转移到式(1.2)所示的状态 $X(t_f)$, 同时尽可能抑制状态转移过程中的弹性振动, 这可应用最优控制来实现.

最优控制的目标函数可确定为

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [X^T Q X + U^T R U] dt \tag{1.6}$$

式中, R 为正定, Q 为正定或半正定的加权阵, 分别限制运动中的能耗及弹性振动.

为提高抑振效果, 增强抗干扰性, Q 常设计为时变权阵, 如取

$$Q(t) = Q_0 \exp[a(t - t_0)] \tag{1.7}$$

式中, Q_0 为正定或半正定常数阵, a 为正常数.

满足上述状态转移条件, 使式(1.6)取极小值的状态轨线及最优输入, 由以下各式给出

$$U(X, t) = -R^{-1} \frac{\partial f(X, U, t)}{\partial U} \tag{1.8}$$

$$\dot{X} = f[X, U(X, t), t] \tag{1.9}$$

$$\dot{\lambda} = -X \left[\frac{\partial f(X, U, t)}{\partial X} \right]^T \lambda \tag{1.10}$$

式中, $f^T(t) = [f_1(t) \dots f_n(t)]$ 是与状态向量 X 相对应的伴随向量函数.

当 f 线性依赖 U 时, 方程 (1.8) 右端不再显含 U , 将 (1.8) 代入 (1.9) 及 (1.10) 消去 U , 联同边界条件 (1.2) 和 (1.5) 构成了关于向量 $Z = [X^T, f^T(t)]^T$ 的非线性两点边值问题, 解出 $Z(t)$, 即可求出最优输入 $U^*(t), t \in [t_0, t_f]$.

有关轨迹追踪两点边值逆动力学方法可参见文献 [16]; 有关求解非线性两点边值问题的拟线性化, 改进的拟线性化方法和我们提出的提高收敛速度增强收敛性的模型递推算法 (Model Recurrence Algorithm) 可参阅文献 [14 ~ 16].

2 仿真示例

为说明本文所述逆动力学方法的有效性, 选用图 1 所示带滑移/转动铰的普遍铰形式的平面单连杆柔性机械臂作例子.

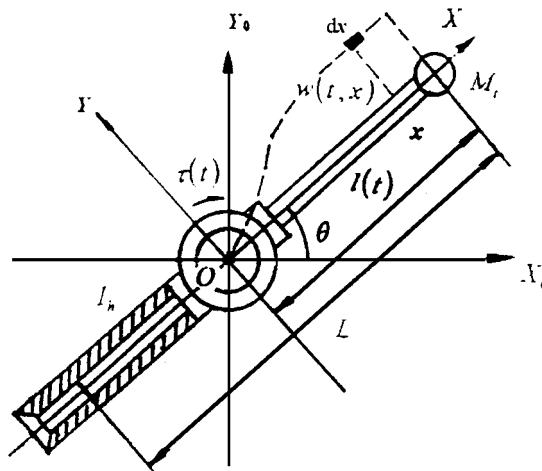


图 1 带滑移/转动铰的平面单连杆柔性机械臂
Fig. 1 Schematic diagram of a planar single-link flexible manipulator with both prismatic and revolute joints

假设滑杆作给定的牵连运动, 臂为一均匀等截面梁, 截面尺寸远小于长度, 故可忽略剪切变形和转动效应, 同时假定垂直刚度远大于水平刚度. 图 1 中, $OX_0 Y_0$ 为惯性坐标系, $OX Y$ 为与机械臂固连的动坐标系, OX 轴同未变形轴线重合. 由模态展开方法, 柔性杆的相对弹性变形

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, t) \dot{\phi}_i(t) \quad (2.1)$$

式中, $\phi_i(x, t)$ 为满足边界条件 (或近似满足) 的柔性杆的一组标准正交振型函数^[17], $\dot{\phi}_i(t)$ 为对应的时间坐标.

当取前二阶模态截断时, 用 Lagrange 方法推得机械臂的运动方程

$$\left. \begin{aligned} [a_1(t) \ddot{\theta}_1 + a_2(t) \ddot{\theta}_1 + a_3(t) \ddot{\theta}_2 + a_4(t) \dot{\theta}_1 + a_5(t) \dot{\theta}_1 + a_6(t) \dot{\theta}_2 + a_7(t) \dot{\theta}_1 + a_8(t) \dot{\theta}_2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + 2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 = (t) \\ b_1(t) \ddot{\theta}_1 + b_2(t) \dot{\theta}_1 + b_3(t) \dot{\theta}_2 + b_4(t) \dot{\theta}_1 + b_5(t) \dot{\theta}_2 - 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = 0 \\ c_1(t) \ddot{\theta}_1 + c_2(t) \dot{\theta}_1 + c_3(t) \dot{\theta}_1 + c_4(t) \dot{\theta}_1 + c_5(t) \dot{\theta}_2 - 2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

易于写出机械臂的状态方程

$$\dot{X} = A(t) X + B(t) \tau(t) + G(t) \quad (2.3)$$

式中, $X = (\theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2)^T$.

时变系数 $a_1(t), \dots, c_5(t)$ 同机械臂的物理参数及滑移牵连运动有关, 其详细计算和 $A(t), B(t), G(t)$ 的表达式见文献[16].

给定机械臂物理参数如下:

连杆线密度 $\rho = 2.0 \text{ kg/m}$, 截面惯性矩 $J = 5.0 \times 10^{-10} \text{ m}^4$, 集中转动惯量 $I_h = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 材料弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, 末端集中质量 $M_t = 0.1 \text{ kg}$.

示例 1 滑杆总长 $L = 10.0 \text{ m}$, 要求 $[0, 10] \text{ s}$ 内机械臂转动 1.0 rad 停止, $l(t)$ 牵连运动如下:

$l(t) \text{ (m)}$	$2.0 + 0.25t^2$	$1.0 + t$	$1.0 + t - 0.25(t - 3)^2$	5.0
$t \text{ (s)}$	$t \in [0, 2]$	$t \in [2, 3]$	$t \in [3, 5]$	$t \in [5, 10]$

取权阵: $Q_0 = \text{diag}(0, 10.0, 10.0, 0, 5.0, 5.0)$, $a = 1.0$, $R = 1.0$.

应用第 2 节的点位控制两点边值逆动力学方法计算出最优开环力矩如图 2 所示, 对应的末端点振动和转角分别如图 3 和图 4 所示.

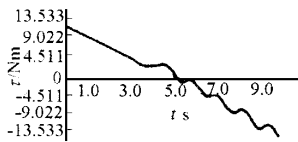


图 2 开环输入力矩
Fig. 2 Open-loop input torque

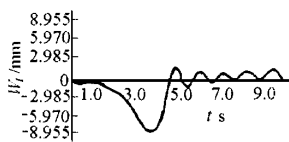


图 3 末端振动
Fig. 3 Tip vibration of the manipulator

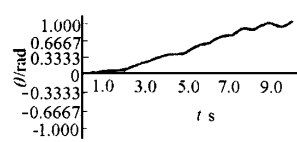


图 4 转角
Fig. 4 Angle of rotation

示例 2 滑杆总长 $L = 8.0 \text{ m}$, 牵连滑动 $l(t) = (4.0 - 0.2t) \text{ m}$, 要求机械臂在 $[0, 5] \text{ s}$ 内转动 0.5 rad , 并且跟踪标称优化轨线 $\theta_1(t), t \in [0, 5] \text{ s}$

$$\theta_1(t) = \begin{cases} \frac{2-t_f}{t_f^2} t^2, & t \in \left[0, \frac{t_f}{2}\right] \\ -\frac{t}{2} + \frac{2-t_f}{t_f} \left[t - \frac{t_f}{2} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{4-t_f}{t_f^2} \left(t - \frac{t_f}{2} \right)^2 - t \right], & t \in \left[\frac{t_f}{2}, t_f\right] \end{cases}$$

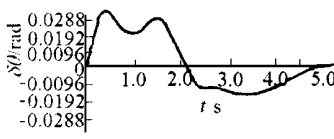


图 8 转角扰动
Fig. 8 Perturbation of the angle of rotation

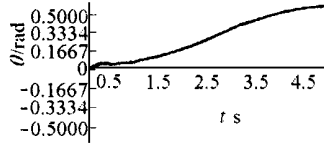


图 9 总转角曲线
Fig. 9 Overall angle of rotation

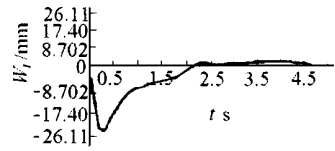


图 10 末端振动
Fig. 10 Tip vibration of the manipulator

3 实验研究

我们研制的柔性机械臂逆动力学实验装置构成如图 11 所示,主要由臂结构、驱动电机、谐波减速器、光电编码器、振动测试部分、测速电机、A/D 转换、功放和主控计算机等构成。

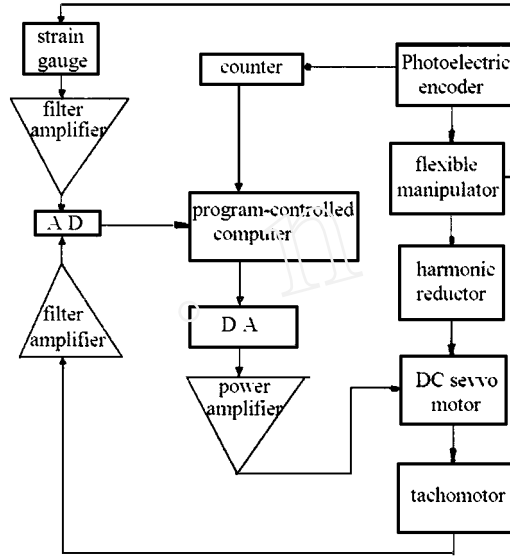


图 11 实验装置各部分联接关系
Fig. 11 Connection relationship of the experimentation

实验用的机械臂为一矩形截面铝合金梁,尺寸为 1.000 m × 0.078 m × 0.002 m,在水平面内转动,垂直方向弹性变形可忽略,主要参数为: $\rho = 0.43212 \text{ kg/m}$, $E = 0.690 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $J = 0.520 \times 10^{-10} \text{ m}^4$, $I_h = 0.0014 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $M_t = 0.0 \text{ kg}$ 。

机械臂前两阶固有频率分别为 1.6123 Hz 和 10.10 Hz。如果要求机械臂在 [0, 2] s 内由静止转动 1.5 rad 后停止,应用本文提出的点位控制两点边值逆动力学方法计算输入最优力矩如图 12 所示。图 13 给出了在最优力矩作用下的理论和实测角轨迹,图 14 是机械臂的实测转速,图 15 是理论转速,图 16 是实测的末端弹性振动。

为了进一步证实逆动力学方法设计的开环输入具有点位控制和抑振特点,我们还进行了对比实验。

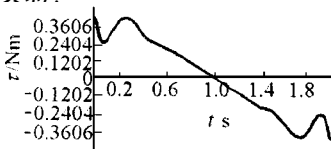


图 12 开环输入力矩
Fig. 12 Open-loop input torque

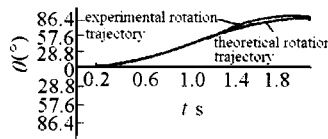


图 13 角轨迹
Fig. 13 Rotation trajectories

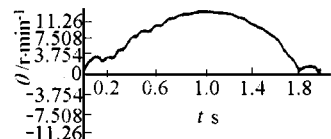


图 14 实际转速
Fig. 14 Experimental rotational speed

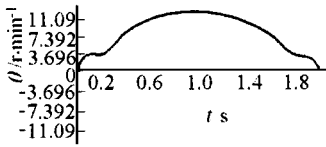


图 15 理论转速
Fig. 15 Theoretical rotational speed

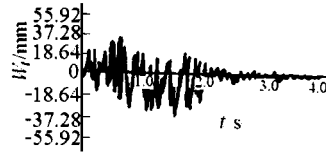


图 16 实测机械臂末端振动
Fig. 16 Experimental tip vibration of the manipulator

图 17 为刚性机械臂常用的阶跃输入力矩,在其作用下,实验机械臂的角轨迹和末端弹性振动分别如图 18 和图 19 所示.

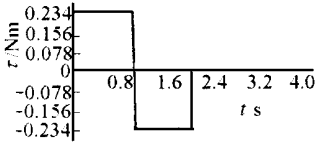


图 17 阶跃力矩
Fig. 17 Step input torque

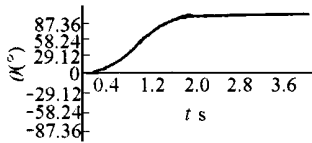


图 18 转角
Fig. 18 Experimental angle of rotation



图 19 末端振动
Fig. 19 Experimental tip vibration of the manipulator

4 讨论与结论

从第 2 节的仿真结果图 2 ~ 图 10 可见,本文提出的柔性机械臂逆动力学方法所设计的开环输入,可实现:

- 1) 精确的点位控制或轨迹追踪;
- 2) 运动中的抑振和运动结束时的消振.

在控制实验中,逆动力学方法所设计的开环力矩作用下,机械臂的角轨迹及转速同理论结果基本吻合,较精确地实现了点位控制,运动结束时的残振很小.高频干扰主要是由偏心、干摩擦和谐波减速器的啮合间隙造成的.

在对比实验中,阶跃力矩(图 17)和实验中设计的最优力矩(图 12)使机械臂产生大体相同的转动(图 13 和图 18),但从振动曲线可见(图 16 和图 19)后者具有明显的抑振和消振作用,这从另一个角度证明了本文方法的有效性.

总之,本文所提出的两点边值逆动力学方法使柔性机械臂的点-点位置控制或轨迹追踪和有效地抑制或消除弹性振动这两个相互耦合、相互矛盾的问题得以同时解决,并且算法简便,没有应用上的限制条件,显示了优越性.

参 考 文 献

- 1 Jerzy ZS et al. Dynamic modelling and adaptive control of a single-link flexible manipulator. *J of Guidance*, 1989, 12 (6) : 839 ~ 844
- 2 Sigeru Futami et al. Vibration absorption control of industrial robots by acceleration feedback. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1983, IE30(3) : 299 ~ 305
- 3 Astrachan IR et al. Vibration control of nonlinear flexible structures. AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, 1987, January 12 ~ 15
- 4 Friddrich Pfeiffer et al. A feedforward decoupling concept for the control of elastic robots. *J of Robotic Systems*, 1989, 6(4) : 407 ~ 416
- 5 王大力. 弹性机器人非线性系统动力学与控制问题的研究:[博士论文]. 北京:清华大学,1990
- 6 Baruh H, Tadikonda SSK. Issues in the dynamics and control of flexible robot manipulators. *J of Guidance*, 1989, 12(5) : 659 ~ 668

- 7 Bayo E, Movaghar R et al. Inverse dynamics of a single-link flexible robot-analytical and experimental results. *Inter J of Robotics and Automation*, 1988, 3(3): 150 ~ 157
- 8 Bayo E. A finite-element approach to control the end-point motion of a single-link flexible robot. *J of Robotic Systems*, 1987, 4(1): 63 ~ 75
- 9 Meckl PH, Seering WP. Controlling velocity-limited systems to reduce residual vibration. Proc. of the IEEE Int. Conf on Robotics and Automation, Philadelphia Pennsylvania, April 25 ~ 29, 1988: 1428 ~ 1433
- 10 Meckl PH, Seering WP. Reducing residual vibration in systems with time varying resonances. Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Raleigh, North Carolina, March 31 ~ April 3, 1987: 1690 ~ 1695
- 11 Meckl PH, Seering WP. Minimizing residual vibration for point-to-point motion. *ASME J of Vibration, Acoustics, Stress & Reliability in Design*, 1985, 107(4): 378 ~ 382
- 12 Meckl PH, Seering WP. Feedforward control techniques to achieve fast settling time in robots. Proc. of the American Controls Conf. Seattle, Washington, June 1986
- 13 Singer NC, Seering WP. Using acausal shaping techniques to reduce robot vibration. *Trans of IEEE*, 1988: 1434 ~ 1439
- 14 Miele A, Iyer RR. Modified quasilinearization method for nonlinear, two-point boundary-value problems. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 1971, 36: 674 ~ 692
- 15 Miele A. Method of particular solutions for linear two-point boundary-value problems. *J of Optimization Theory Application*, 1968, 2: 260 ~ 273
- 16 毕世华. 带滑移/转动铰的平面柔性机械臂逆动力学与振动主动控制:[博士论文]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 1992
- 17 Wang PKC, Wei JD. Feedback control of vibrations in a moving flexible robot arm with rotary and prismatic joints. Proc. 1987 IEEE Conf. on Robotics and Automation, Raleigh, North Carolina, March 31-April 3 1987: 1683 ~ 1689
- 18 毕世华, 黄文虎, 邵成勋. 柔性机械臂逆动力学的轨迹追踪方法. *工程力学*, 1991, 8(4): 51 ~ 59
- 19 黄文虎, 毕世华, 邵成勋. 带滑移/转动铰的单柔性机械臂逆动力学. *振动与冲击*, 1992, (1-2): 1 ~ 10
- 20 费从宇, 毕世华等. 柔性机械臂点位控制逆动力学方法的实验研究. *振动与冲击*, 1994, 13(2): 1 ~ 6
- 21 Chalhoub NG, Ulsoy AG. Control of a flexible robot arm: experimental and theoretical results. *ASME J Dynamic Systems, Measurement & Control*, 1987, 109: 299 ~ 309

TWO-POINT BOUNDARY-VALUE INVERSE DYNAMIC METHODS OF FLEXIBLE MANIPULATORS ——THEORETICAL ANALYSIS AND EXPERIMENTAL RESULTS

Bi Shihua

(Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Huang Wenhua Shao Chengxun Fei Congyu

(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract Two-point boundary-value inverse dynamic methods of flexible manipulators based on optimal control theory are proposed in the present paper. The open-loop inputs obtained by the proposed method can make the flexible manipulator accomplish the point-to-point motion or trajectory tracking while greatly reduce or eliminate the influence of the flexibility on the accurate positioning. Numerical imitation and experimental results coincide with the theoretical analyses.

Key words inverse dynamics of robot, nonlinear two-point boundary-value problem, quasilinearization, trajectory tracking