

复合材料应力分析的均匀化方法

刘书田 程耿东

(大连理工大学工程力学研究所, 大连 116024)

摘要 建立了基于均匀化理论确定复合材料结构应力场的方法. 其实质是用均质的宏观结构和非均质的具有周期性分布的细观结构描述原结构; 将力学量表示成关于宏观坐标和细观坐标的函数, 并用细观和宏观两种尺度之比为小参数展开, 用摄动技术将原问题化为一细观均匀化问题和一宏观均匀化问题. 这两个问题的解确定了包含等效位移和一阶近似位移的位移场, 由此获得应力场. 利用该方法给出了圆柱形孔隙材料和单向纤维复合材料在单向拉伸时的应力场以及空隙材料筒支梁的局部应力场, 说明了该方法的有效性.

关键词 应力分析, 复合材料, 均匀化方法

引言

通常确定复合材料应力场的方法是将细观非均质的复合材料等效成均质材料处理^[1], 该方面的重要工作是复合材料等效材料常数的定义和预测^[2]. 这种方法只能给出应力场的等效值, 而不能确定由于非均质性引起的在小范围内存在的不均匀分布规律. 无限体中含单一夹杂问题的应力场^[3,4]可以模拟非均质性的影响, 但仍不能完全反映各夹杂间的相互影响, 其结果仍令人不甚满意. 另一类方法是代表体元模型, 其实质是在代表体元上施加一定的作用, 利用有限元等数值方法计算应力分布情况, 以反映界面处的应力集中现象^[5,6].

利用基于连续介质理论的有限元法不能有效地直接求解上述非均质问题. 因为描述材料的非均匀分布需要很密的网格和大量未知数. 确定复合材料应力场的有效的方法应是建立一种既能反映材料的细观非均质性影响, 而不必考虑材料每一点处的细观结构细节的数学模型. 本文的目的就是根据均匀化理论^[7,8]这一数学方法, 建立复合材料弹性应力分析的新方法. 文中, 假设各相材料界面的联结是完全的.

本文用均质的宏观结构和非均质的具有周期性分布的细观结构描述原结构, 一点的细观结构认为是由具有细观尺度的单胞在空间上周期性重复堆积而成; 用宏观和细观两种尺度描述由于非均匀材质引起的力学响应量在一点的很小范围内的变化, 将位移和应力展开为关于小参数(细观尺度和宏观尺度之比)的渐近级数. 用摄动技术建立渐近级数的各项所应满足的一系列方程, 由此将应力分析问题归结为称之为细观均匀化问题和宏观均匀化问题的求解. 细观均匀化问题确定一广义位移函数, 用以描述等效位移和一阶近似位移的关系和计算等效材料常数. 宏观均匀化问题确定材料的等效位移场. 完整的应力场可由各级近似位移的迭加结果确定. 作为例子, 本文给出了圆柱形孔隙材料和单向纤维复合材料在单向拉伸时的应力场以及空隙材料筒支

1995-08-03 收到第一稿, 1996-08-12 收到修改稿.

梁的局部应力场.

1 问题的提法与分析方法

图 1 所示的复合材料结构,在宏观某一位置 x 处可认为是由单胞在空间中周期性重复堆积而成的.单胞的尺度相对于结构的宏观几何尺度来讲,是很小的量,设为 $(0 < \ll 1)$ 量级.因此结构的非均质性是最高层次的(细观层次).不同空间位置的单胞形状及其排列方式可能是变化的.但是,在某点的单胞尺度邻域内,这种变化可认为是极其微小的,因此,从宏观上的一点来观察,材料仍然具有周期性分布的特点.结构的周期性和单胞如图 1(b)和 1(c)所示.由于非均质性的存在,在体积力 f 和表面力 t 作用下的应力和位移在宏观位置 x 的非常小的邻域(邻域)内也有很大的变化.因此,可以认为所有的量均依赖于宏观和细观两种尺度坐标 x 和 $y = x/$,也就是说,如果 $g(x)$ 表示物体内的位移或应力,则有 $g(x) = g(x, y)$.由于材料细观结构的周期性特征,这些量对细观坐标 $y = x/$ 的依赖关系也具有周期性,即

$$g(x, y) = g(x, y + Y) \tag{1}$$

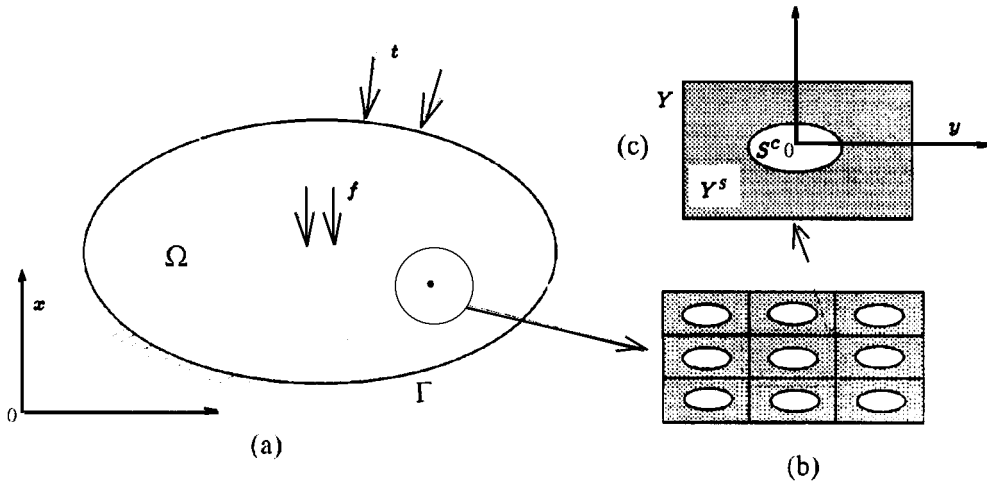


图 1 具有细观结构的复合材料结构, (a) 宏观结构, (b) 细观结构及其周期性, (c) 单胞

Fig. 1 The composite structure with microstructure

(a) macrostructure, (b) microstructure and its periodicity, (c) unit cell

Y 表示周期函数的周期,具有上式性质的函数称为 Y -周期性函数.此时,任意函数对 x 的微分应表示为

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x_i} + \frac{1}{Y} \frac{\partial g(x, y)}{\partial y_i} \tag{2}$$

假设复合材料所占宏观域为 Ω , 其外边界用 Γ 来表示(见图 1(a)). 为了能够反映孔隙材料的情况,我们将单胞取为含有内边界 S^c 的区域(见图 1(c)). 单胞 Y 上,材料性能参数是变化的,不同组分材料具有不同的数值,单胞中没有画出各组分,但通过材料常数随细观坐标的变化可以体现各组分的存在.材料的热膨胀系数张量 α_{ij} 可用热弹性常数张量 E_{ijkl} 表示成

$$\alpha_{ij} = [E_{ijkl}]^{-1} \epsilon_{ij} \tag{3}$$

对式(9)取极限并进行分部积分,注意到各函数的周期性,得边界问题

$$\text{母} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} = 0, \quad y \in Y^s \right) \\ E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} n_j = 0, \quad y \in S^c \end{aligned} \right\} \quad \text{现的} \quad \text{下}$$

www.cnki.net

将上式作用平均算子 $\bar{\cdot}_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y (\cdot) dy$, 知, 等效应力是一阶近似 应力在单胞上的均值.

$$\sigma_{ij}^H(x) = \bar{\sigma}_{ij}^H(x, y) \quad (23)$$

等效应力 σ_{ij}^H 只是宏观坐标 x 的函数, 而 (22) 式定义的应力是宏观和细观坐标的函数, 随细观坐标的变化反映了应力场在小范围内的不均匀性.

至此, 复合材料弹性应力分析问题的求解转化为求解细观均匀化问题 (16) 和宏观均匀化问题 (19). 这两个均匀化问题可利用成熟的有限元法求解. 宏观均匀化问题 (19) 就是通常的线弹性问题, 其有限元列式是熟知的. 若将式 (16) 写成

$$E_{ijkl} \left[\sigma_{km} \tau_{ln} - E_{ijkl} \frac{\partial \sigma_{kn}}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] dy = 0, \quad \forall v \in V_Y \quad (24)$$

可知, 细观均匀化问题相当于有初应变 $\epsilon_{kl}^{(mn)} = -\sigma_{kn} \tau_{ml}$ 作用的线弹性问题. 可采用同通常有限元法类似的过程求解该问题. 所不同的是应考虑周期性条件.

2 算例与分析

作为例子, 我们考虑圆柱形孔隙铝在单向均匀拉伸时的应力场. 外力密度取为一个单位力, 作用方向垂直于孔轴线. 该问题的宏观均匀化问题就是均匀材料的简单拉伸问题, 其解形式 (等效位移和应力) 是已知的, 即, 除拉伸方向的正应力分量为 1 外, 其它应力分量均为零. 本文选中心含圆柱形孔的方柱体为单胞 (其截面形状如图 2 所示, $a = 1$), 利用四边形等参数有限单元求解细观均匀化问题. 当孔隙体分比为 5% 时, 所得拉伸方向的正应力 σ_{11} 在单胞的 $y_1 \text{--} y_2$ 面内的分布情况如图 3 和图 4 所示. 图 5 给出了截面 $y_1 = 0$ 上正应力沿 y_2 方向的分布情况. 图中曲线 (面) 反映了孔的存在引起的应力集中现象以及应力分布的不均匀性. 最大应力产生在孔的边处, 表 1 给出了不同孔隙体分比的孔隙材料在单向拉伸 ($p = 1$) 时的最大应力值 $\sigma_{11 \max}$ 和应力集中系数 k_c . 这里应力集中系数定义为截面 $y_1 = 0$ 上的最大正应力与该截面的平均正应力之比, k_c 反映了应力的集中程度. 随着孔隙体分比的增加, 最大应力也随之增加, 但应力集中系数减小了, 这说明孔隙含量的增加降低了应力的集中程度.

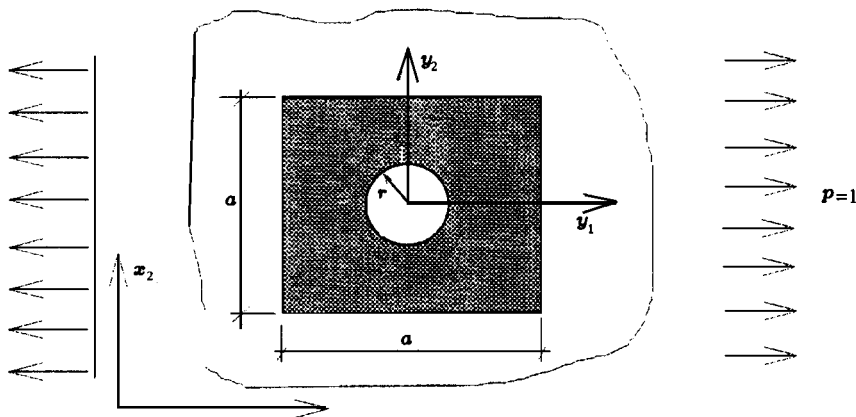


图 2 孔隙材料的受力与单胞

Fig. 2 Loading on porous materials and unit cell

表 1 Table 1

Void ratio	0.001	0.05	0.10	0.15	0.20
$\frac{\sigma_{11 \max}}{\sigma_{11} = p / (1 - 2f)}$	2.85	2.90	3.00	3.18	3.33
$k_c = \sigma_{11 \max} / \sigma_{11}$	2.75	2.16	1.94	1.79	1.65

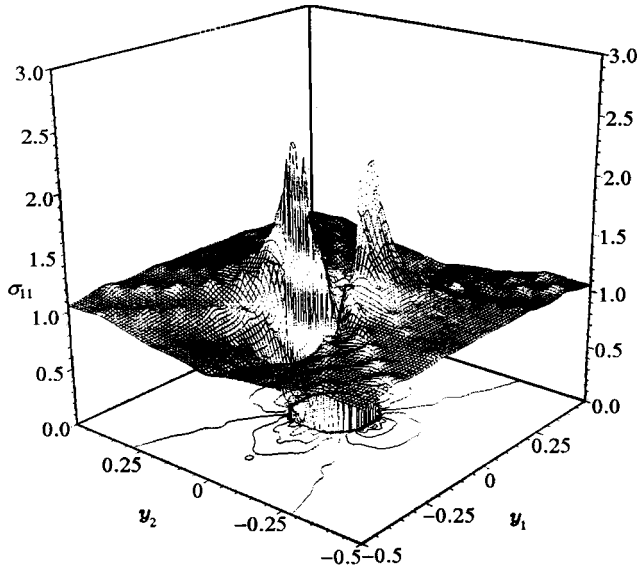


图 3 拉伸方向正应力 σ_{11} 在单包横截面上的分布(空隙比为 5%)
 Fig. 3 The distribution of the tensile stress σ_{11} within the cross-section of the unit cell (porous fraction 5%)

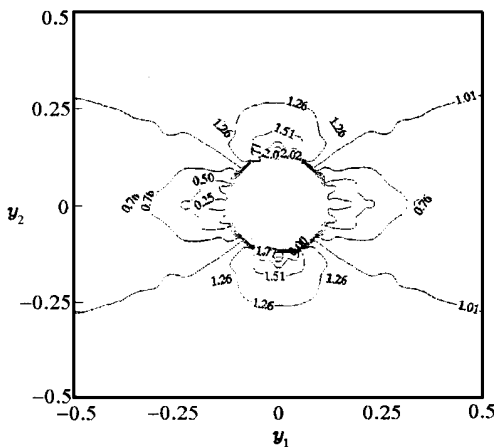


图 4 拉伸方向正应力 σ_{11} 的等值线图(空隙比为 5%)
 Fig. 4 Contour map of the tensile stress σ_{11} (porous fraction 5%)

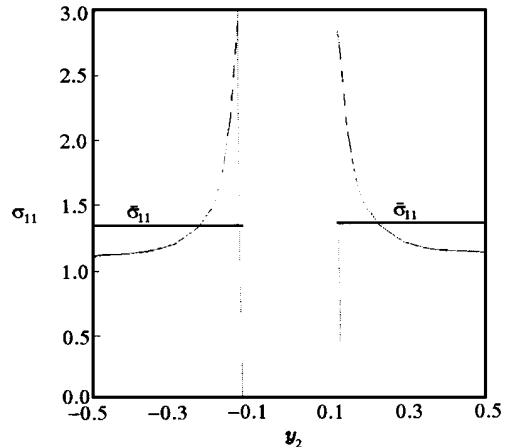


图 5 拉伸方向正应力 σ_{11} 沿 $y_2 (y_1 = 0)$ 轴的分布
 Fig. 5 Distribution of the tensile stress σ_{11} along the $y_2 (y_1 = 0)$ axis

作为另一个例子,我们确定单向纤维复合材料 P100/2 024A1 无限体在无穷远处,沿垂直于纤维方向作用均匀拉应力 $\sigma_0 = 1$ 时的应力场. 纤维在基体中呈正方形点阵分布. 单胞取为含有单一纤维的方柱体. 单胞形状如图 2 所示,截面尺寸为 $a \times a = 2 \times 2$,纤维体分比为 10%. 此时半径

为 $r = 0.3568$. 应力在单胞横截面内的分布情况如图 6 所示. 由于材料性质的不同, 在截面 $y_1 = 0$ 上纤维和基体交界处有较大的应力集中, 在点 $(0, 0.3568)$ 附近产生的 y_1 方向的正应力为 $\sigma_{11max} = 2.455$. 由于纤维的横向弹性模量小于基体的弹性模量, 纤维内部产生的应力小于基体内部的应力, 并且, 应力在纤维内的分布是均匀的. 图 7 给出了截面 $y_1 (= 0)$ 上的正应力分布.

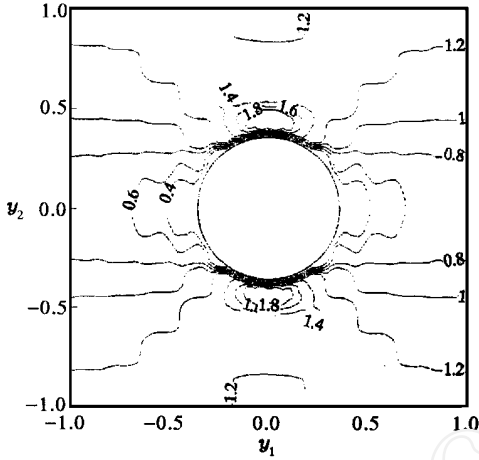


图 6 拉伸方向正应力 σ_{11} 在单胞横截面内的分布 (P100/2 024 Al)
Fig. 6 Distribution of the tensile stress σ_{11} within the cross-section of the unit cell (P100/2 024 Al)

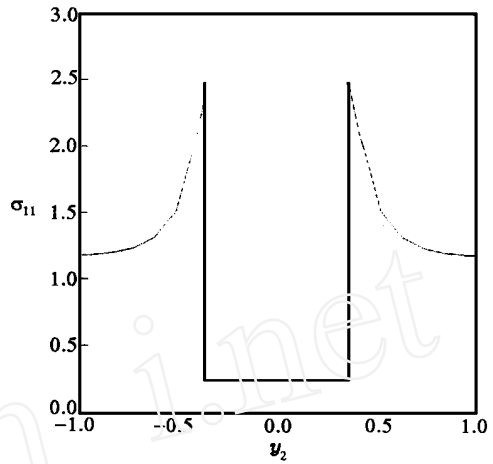


图 7 拉伸方向的正应力 σ_{11} 在截面 $y_1 = 0$ 上的分布 (P100/2 024 Al)
Fig. 7 Distribution of the tensile stress σ_{11} on the section $y_1 = 0$

作为第 3 个例子, 我们考虑单位均布荷载作用下的简支梁的应力分析问题. 材料为圆形空隙材料, 孔隙比为 5%. 单胞形状如图 2 所示, 图中 $a = 20$ (注意, 单胞的截面尺寸 a 是在微观尺度下度量的). 宏观均匀化问题采用有限元法求解, 其网格如图 8 所示. 梁内点 A 附近的局部应力分布如图 9 所示, 梁轴线方向 (x_1, y_1 方向) 的正应力分量在 A 点附近的最大值为: $\sigma_{11} = 45.86$.

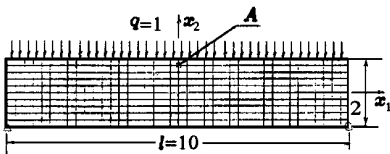


图 8 简支梁的几何与网络
Fig. 8 The geometry and mesh of a simple beam

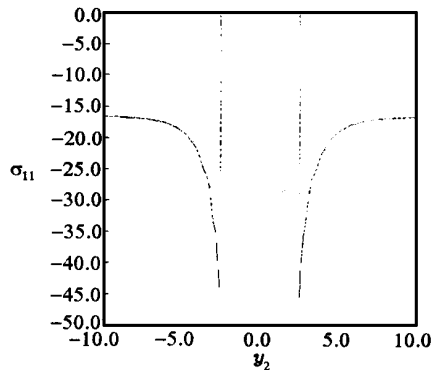


图 9 A 点附近轴向正应力 σ_{11} 沿 y_1 轴的分布
Fig. 9 The distribution of normal stress σ_{11} at point A along y_1 axis

3 结束语

本文建立了基于均匀化理论的复合材料结构应力分析方法. 对圆柱形孔隙材料和单向纤维复合材料的应力场计算, 说明了该方法是有效的.

参 考 文 献

- 1 琼斯, RM 著, 朱颐龄等译. 复合材料力学. 上海: 上海科技出版社, 1981
- 2 Hashin Z. Analysis of composite materials: A survey. *J. Applied Mechanics*, 1983, 50: 481 ~ 505
- 3 Eshelby JD. The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society, London*, 1957, A(241): 376 ~ 396
- 4 Mura T. Inclusion problems. *Applied Mechanics Reviews*, 1988, 41(1)
- 5 Nassehi V, Kinsella M, Mascia L. Finite element modelling of the stress distribution in Polymer composites with coated fiber interlayers. *J. Composite Materials*, 1993, 27(2): 195 ~ 214
- 6 Unger WJ, Hanshen. The effects of thermal processing on residual strain development in unidirectional graphite fiber reinforced PEEK. *J. composite Materials*, 1993, 27(1): 59 ~ 82
- 7 Lion JL. *Some Methods in the Mathematical Analyses of Systems and Their Control*. Beijing: Science Press, 1981
- 8 Bendsor. MP and Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989, 71: 197 ~ 224

HOMOGENIZATION METHOD OF STRESS ANALYSIS OF COMPOSITE STRUCTURES

Liu Shutian Cheng Gengdong

(Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract A homogenization method has been presented for determining the stress distributions of composite structures. In this method, the composite structures are depicted by a homogeneous macrostructure and a heterogeneous microstructure. All quantities are expressed as functions of microscopic coordinates and macroscopic coordinates, and expanded into asymptotic series. Based on the perturbation method, the stress analysis problem leads to a microscopic homogenization problem and a macroscopic homogenization problem, from which the displacements included the effective displacement and the first order perturbation, are determined. The stress fields are obtained by these displacements. Finally, the stress distributions of structures composed of circular cylindrical porous or/ and unidirectional fiber reinforced composites are given. The results show that the method is reliable and effective.

Key words stress analysis, composite materials, homogenization method