

正交各向异性平板开孔弹性波的 衍射与动应力集中¹⁾

马兴瑞 胡超 王本利 牛玉清

(哈尔滨工业大学航天工程与力学系, 哈尔滨 150001)

摘要 采用各向异性平板弯曲波动方程及摄动方法, 对正交各向异性无限平板开孔弹性波的衍射及动应力集中问题进行了分析研究, 得到了在稳态波作用下此种平板满足开孔边界条件波动问题的渐近形式分析解. 同时采用复变函数方法及保角映射技术, 为求解正交各向异性无限平板开孔弹性波的衍射及动应力集中问题提供了一种统一规范的分析方法.

关键词 正交各向异性平板, 摄动方法, 开孔, 弹性波衍射, 动应力集中

引言

在工程中平板经常作为构件使用. 有时为满足工程设计要求需要在平板上开各种各样的孔. 由于结构几何不连续, 承受荷载作用时平板在开孔附近就会产生应力集中现象. 应力集中会极大地降低结构的承载能力, 减少结构的使用寿命. 因此, 在近代力学研究中, 国内外有许多专家和学者从事这方面的理论分析、计算及实验研究^[1~6].

在弯矩作用下平板开孔附近的静应力集中问题, 人们已经研究了多年并获得了较成熟的求解方法. 可是, 弯曲波的衍射在平板开孔附近引起的动应力集中问题与静应力集中问题不同, 特别是各向异性平板弯曲波衍射及动应力集中问题, 它是目前人们提出的新课题. 60 年代, Y. H. Pao^[7~9]首次研究了平板开圆孔弯曲波的散射及动应力集中问题, 给出了问题的分析解及数值算例. I. I. Klyukin^[10]等曾研究了平板中一排圆形夹塞物引起的弯曲波散射问题. 由于它们所采用的分析方法局限性, 运用算子理论分解降阶后直接采用波函数展开法, 只解决了各向同性平板开圆孔不同边界条件下弯曲波散射及动应力集中问题. 波函数展开法是分析各向同性介质弹性波散射问题的主要工具, 对于各向异性介质中的弹性波而言, 求解弹性波散射问题的主要困难在于不能直接分离变量. 各向异性将使材料及其结构的力学性能复杂化, S. G. Lekhnitskii^[3]曾对含孔各向异性平板弯曲的静应力集中问题进行了分析研究, 得到了平板弯曲问题的解. 对于含孔各向异性平板弯曲波的散射及动应力集中问题, 由于基本控制方程复杂及经典分析方法的局限, 直到现在还无人问津, 该问题一直没有获得解决.

本文采用摄动法将正交各向异性平板弯曲波动问题化成一系列边值问题解的叠加, 分析研究了含任意形状开孔各向异性平板弯曲波衍射及动应力集中问题, 得到了此种平板弯曲波动问题开孔附近渐近形式的分析解. 给出了稳态波作用下, 各向异性平板开孔弯曲波散射问题一般解的函数逼近序列和满足边值条件的表达式. 用复变函数方法和保角映射技术满足给定的边界条件, 即可求得各弯曲波模式系数. 用正交函数展开的方法, 将待解的边值问题归结为求解一组无穷代数方程组. 从而使平板开孔附近引起的动应力集中问题获得解决.

1) 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助项目.

1996 - 05 - 27 收到第一稿, 1996 - 10 - 10 收到修改稿.

1 正交各向异性平板弯曲波动方程的渐近解

平板弯曲波动问题可归结为,在给定的荷载及边界条件下求解中面挠度的问题.在直角坐标系 (x, y) 中,其波动控制方程为^[11]

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q \tag{1}$$

式中 $D_i (i = 1, 2, 3)$ 为平板的广义抗弯刚度, $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$, $D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$, $D_3 = \nu_{12} D_{22} + \frac{G_{12} h^3}{6}$; ρ, h 分别为平板的密度和厚度; t 为时刻; q 为横向荷载,取 $q = 0$.

设平板弯曲波动方程的稳态解为 $W = \text{Re}(w e^{-i t})$, 同时做坐标变换,设 $x = a x_1, y = a y_1$ $\left[\frac{D_2}{D_1} a y_1 = z^{1/4} a y_1; \right]$ 引进无量纲量 $\bar{w} = \frac{w}{h}$, 可有下列方程式

$$\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y_1^4} - \frac{\partial^4 \bar{w} \partial x_1^2}{\partial y_1^2} - 4 \bar{w} = 0 \tag{2}$$

式中 Re 表示取实部; ω 为平板弯曲波动的圆频率, k 为无量纲波数, $k = \left[\frac{h^2}{D_1} \right]^{1/4}$; a 为与开孔大小有关的尺度,如入射波方向上开孔的长度, $ka = 2 \left[1 - \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2}} \right]^{1/2}$ 为无量纲波数, $\mu_i = \frac{D_i}{D_1} (i = 2, 3)$ 为平板材料各向异性系数.

用复变函数方法,引进复变量 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy, z_1 = x_1 + iy_1, \bar{z}_1 = x_1 - iy_1$, 由直角坐标系 (x, y) 和 (x_1, y_1) , 可得关系式 $z = \frac{1}{2} [(1 + \mu) z_1 + (1 - \mu) \bar{z}_1]$, 其中 $\mu = 2^{-1/4}$.

对于大多数正交各向异性材料^[11]来说, μ 的绝对值是远小于 1 的,可取为小参数. 设偏微分方程(2)的解如下

$$\bar{w} = \sum_{m=0}^{+\infty} \mu^m \bar{w}_m \tag{3}$$

将式(3)代入(2)中,可得相对于小参数 μ 的各阶摄动方程如下

$$\nabla^2 \nabla^2 \bar{w}_m - 4 \bar{w}_m = \mu^{-1} H(m-1) \left[\frac{\partial^4 \bar{w}_{m-1}}{\partial z_1^4} - 2 \frac{\partial^4 \bar{w}_{m-1}}{\partial z_1^2 \partial \bar{z}_1^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}_{m-1}}{\partial \bar{z}_1^4} \right] \tag{4}$$

其中 ∇^2 为 Laplace 算子, $\nabla^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}$; $H(\cdot)$ 为 Heaviside 函数.

为满足开孔的边界条件可使用保角映射方法,映射函数可取如下形式

$$z = z_1 \left(\frac{z_1}{a} \right) = R \left\{ z_1^2 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^{-k} \right\} \tag{5}$$

式中 R 为与开孔的尺寸 a 有关的实常数; c_k 一般为复常数.

将式(5)代入(4)中,由文献[12]可知方程(4)的齐次解为

$$\bar{w}_m^{(h)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_{mn} H_n^{(1)}(r_1) e^{in_1} + B_{mn} K_n(r_1) e^{in_1}] \tag{6}$$



式中 A_{mn}, B_{mn} 为弯曲波模式系数; $H_n^{(1)}(\cdot), K_n(\cdot)$ 分别为 *Hankel* 函数及修正 *Bessel* 函数. 同时,

$$r_1 = r_1 e^{i\theta_1}, r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mu^2) + (1 - \mu^2) \operatorname{Re} \left[\frac{(\cdot)}{(\cdot)} \right] \quad (2)$$

$$\text{分, 别为} \quad \left[(1 + \mu^2) + (1 - \mu^2) \operatorname{Re} \left[\frac{(\cdot)}{(\cdot)} \right] \right]^{-1/2} \left[\frac{(\cdot)}{(\cdot)} \right]$$

而方程(4)所对应的一阶摄动方程的特解可取为

$$\bar{w}_1^{(p)} = \frac{1}{8} (1 + \partial_1) \left\{ \frac{\partial}{\partial_1} \left[\frac{\partial}{\partial_1} \left(\frac{\partial(\bar{w}_0^{(1)})}{\partial_1} - \bar{w}_0^{(2)} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial_1} \left[\frac{\partial}{\partial_1} \left(\frac{\partial(\bar{w}_0^{(1)})}{\partial_1} - 4\bar{w}_0^{(2)} \right) \right] \right\} \quad (7)$$

其中 $(\nabla^2 + \mu^2)\bar{w}_m^{(1)} = 0, (\nabla^2 - \mu^2)\bar{w}_m^{(2)} = 0, \bar{w}_m^{(h)} = \bar{w}_m^{(1)} + \bar{w}_m^{(2)}$. $\bar{w}_0^{(1)} e^{-i\theta}$ 表示板中开孔附近传播的弯曲散射波, $\bar{w}_0^{(2)} e^{-i\theta}$ 表示平板弯曲波动时开孔附近的衰减波. 这两部分综合起来共同构成了(式(4)零阶近似方程的)各向异性平板中开孔附近的弯曲散射波. 研究电磁波(高频短波)时,人们关心的主要是远场散射的渐近展开. 而在弹性波散射问题的研究中,人们感兴趣的是低频长波时障碍物附近区域的波场渐近解^[5],即近场解. 在研究平板弯曲波散射问题时,我们关心的是开孔附近区域的波场渐近解,从而确定平板开孔的动应力集中系数.

同理,还可得平板弯曲波动方程在开孔附近有效的其它各阶修正解^[15,16]. 这样,正交各向异性平板波动方程开孔附近的渐近形式解为

$$\bar{w} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_{mn} H_n^{(1)}(r_1) e^{in\theta} + B_{mn} K_n(r_1) e^{in\theta}] + \bar{w}_m^{(\neq)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{孔的} \\ a \end{array} \right\} \quad \text{开}$$

(10)

这样,开孔附近的总波场应由入射场与散射场叠加而成

$$\bar{w} = \bar{w}^{(i)} + \bar{w}^{(s)} \quad (11)$$

3 开孔的边值条件

在平面上采用极坐标系,开孔边界即单位圆上的边值条件如下

$$M|_{r=1} = f_1, \quad V|_{r=1} = \left[Q + \frac{1}{a} \frac{\partial M}{\partial \theta} \right]_{r=1} = f_2 \quad (12)$$

式中 M, M 分别为平面上的径向弯矩及扭矩; Q, V 分别为横向剪力及等效剪力; $a|^{(n)}(\theta)$ 为保角变换下的 Lamé 系数; f_1, f_2 为平板孔边上给定的广义内力函数.

4 开孔附近弯曲波的散射及动应力集中

利用如下求导公式,可将表达式中的各量转化到平面上.

$$\frac{\partial [H_n^{(1)}(r_1)e^{in\theta}]}{\partial r_1} = \frac{1}{4}(1+\mu) H_{n-1}^{(1)}(r_1)e^{i(n-1)\theta} - \frac{1}{4}(1-\mu) H_{n+1}^{(1)}(r_1)e^{i(n+1)\theta}$$

$$\frac{\partial [H_n^{(1)}(r_1)e^{in\theta}]}{\partial \theta} = \frac{1}{4}(1-\mu) H_{n-1}^{(1)}(r_1)e^{i(n-1)\theta} - \frac{1}{4}(1+\mu) H_{n+1}^{(1)}(r_1)e^{i(n+1)\theta}$$

在映射平面 $z = e^i$ 上,经推导代换可得各向异性平板中广义内力的复变量表达式

$$M = -\frac{D_1 h}{2a^2} (1 - \nu_2) \left\{ \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left[\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial} \left(1 + \frac{\nu_2}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left[\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial} + 2(1 + \nu_2 + 2\nu_{12}) \frac{1}{n} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right] \right) \right] + 2(1 - \nu_2) \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \right\}$$

$$\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left\{ \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left[\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial} + 3 \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left\{ \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left[\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial} + 3 \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left\{ \frac{1.4}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left[\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial} \right] \right\} \right\} \right] \right\} - \frac{3}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left\{ \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left[\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial} + \frac{3}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left\{ \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left[\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial} \right] \right\} \right\} - \frac{D_1}{a^3} \left[\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left\{ \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left[\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial} \right] \right\} + \right]$$

$$\begin{aligned}
& \frac{D_1 h}{a^3} \left\{ \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right\} \\
& + \frac{i D_1 h}{2 a^3} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} H_n^{(1)}(r_1) \left\{ \frac{(1 + \nu_{12} - 2\nu_{21})}{l} \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{D_1}{a^3} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \right] \operatorname{Re} \left[\frac{2}{l} \frac{\partial}{\partial x} \right] \right. \right. \\
& \left. \left. \left\{ (1 + \nu_{12} - 2\nu_{21}) \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{D_1}{a^3} \operatorname{Re} \left[\frac{2}{l} \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{(3 - \nu_{12} - 2\nu_{21})}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left\{ \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 2 \frac{i D_1 h}{a^3} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \right] \operatorname{Im} \left[\frac{2}{l} \frac{\partial}{\partial x} \right] (3 - \nu_{12} - 2\nu_{21}) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left\{ \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{D_1 h}{a^3} L_2(w) = \frac{D_1 h}{a^3} L_2[w^{(i)} + \overline{w^{(s)}}] \right. \right. \right. \tag{13}
\end{aligned}$$

式中 L_1, L_2 为相应的偏微分算子。
 根据开孔边界条件(12), 可得如下表达式

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i_{nm} X_{mn}^i = i_m \quad (i = 1, 2; m = 0, 1, 2 \dots) \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}
m_n^{11} &= L_1[H_n^{(1)}(r_1) e^{in\theta}], & m_n^{12} &= L_1[K_n(r_1) e^{in\theta}], \\
m_n^{21} &= L_2[H_n^{(1)}(r_1) e^{in\theta}], & m_n^{22} &= L_2[K_n(r_1) e^{in\theta}]
\end{aligned}$$

若 $m=0$, 则有

$$\begin{aligned}
m^1 = m_0^1 &= -\frac{1}{2} \left\{ (1 + \nu_{12} - 2\nu_{21}) + (1 - \nu_{12} - 2\nu_{21}) \operatorname{Re} \left[\frac{2}{l} \frac{\partial}{\partial x} \right] e^{i l (\theta) + \overline{(\theta)}/2} + \frac{a^2 f_1}{D_1 h} \right. \\
m^2 = m_0^2 &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{(1 - \nu_{12} - 2\nu_{21}) i}{l} \operatorname{Re} \left[\frac{3 l}{l} \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 - \frac{4(1 - \nu_{12} - 2\nu_{21})}{l} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \right] \right. \\
& \left. \left. \left. \right] e^{i l (\theta) + \overline{(\theta)}/2} + \frac{a^3 f_2}{D_1 h} \right. \right.
\end{aligned}$$

若 $m \geq 1$ ，则有

$$w_m^1 = -L_1(\overline{w_m^{(p)}}), \quad w_m^2 = -L_2(\overline{w_m^{(p)}})$$

另外

$$X_{mn}^1 = A_{mn}, \quad X_{mn}^2 = B_{mn}$$

用 e^{-is} 乘以式(14)的两端,并在区间 $(-\infty, \infty)$ 上积分,可得无穷代数方程组如下

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} ij_{mns} X_{mn}^j = i_{ms} (i = 1, 2; m = 0, 1, 2, \dots; n = s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{15}$$

式中

$$ij_{mns} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ij_{mn} e^{-is} ds, \quad i_{ms} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} i_m \overline{e^{-is}} ds$$

式(15)即为确定弹性波模式系数 A_{mn}, B_{mn} 的无穷代数方程组。

平板开孔附近弹性波的衍射所造成的动应力集中是问题研究的热点,即需要确定开孔附近动应力集中系数的分布.由开孔动应力集中系数的定义:动应力(弯矩)集中系数是开孔周边上的环向动弯矩与入射波在入射方向上的弯矩幅值之比,即有如下表达式

$$M^* = \frac{M}{M_0} \tag{16}$$

式中 M^* 为无量纲弯矩,表示动应力集中系数; M_0 为入射弯矩的幅值, $M_0 = \frac{D_1 h}{a^2} w_0^2$.

由式(16)可得自由开孔边界条件的动应力(弯矩)集中系数为

$$M^* = -\text{Re} \left\{ \frac{(1-\nu)}{M_0^2} \left[\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial \overline{w}}{\partial} + \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial \overline{w}}{\partial} \right) + \frac{2(1+\nu+2\nu_1 2\nu)}{(\cdot)(\cdot)} \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \partial} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \text{Re} \sum_{m=0}^{\infty} m \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} [(1+R_{12} 2) [H_{n-2}^{(1)}(r_1) e^{i(n-2)\cdot} - 2 H_n^{(1)}(r_1) e^{in\cdot} + H_{n+2}^{(1)}(r_1) e^{i(n+2)\cdot}] - 2^{1/2} (1+12) [H_{n-2}^{(1)}(r_1) e^{i(n-2)\cdot} + 2 H_n^{(1)}(r_1) e^{in\cdot} + H_{n+2}^{(1)}(r_1) e^{i(n+2)\cdot}] + B_{mn} [(1+12 2) [K_{n-2}(r_1) e^{i(n-2)\cdot} + 2 K_n(r_1) e^{in\cdot} + K_{n+2}(r_1) e^{i(n+2)\cdot}] - 2^{1/2} (1+12) [K_{n-2}(r_1) e^{i(n-2)\cdot} + 2 K_n(r_1) e^{in\cdot} + K_n(r_1) \cdot e^{i(n+2)\cdot}] + \left\{ \frac{(1-\nu)}{M_0} \left[\frac{1}{(\cdot)(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial^{(p)}}{\partial} + \frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{1}{(\cdot)} \frac{\partial^{(p)}}{\partial} \right) \right] \right\} \right. \right. \\ \left. \left. e^{-i\cdot} \right. \right. \tag{17}$$

式(17)即为确定正交各向异性平板开孔附近动应力集中系数的一般表达式。

5 数值算例

设有一稳态弯曲波沿 x 轴正方向传播. 平板含椭圆孔(或圆孔)其短轴置于 x 轴,孔边的

边值条件为自由边界条件. 平板含椭圆孔(或圆孔)时的映射函数可取如下形式

$$z = \omega(\zeta) = \frac{r_0}{a} \left[\zeta + \frac{m}{\zeta} \right] \quad (18)$$

式中 $r_0 = (a + b)/2$, $m = (a - b)/(a + b)$.

将式(18)代入(17)中,取 $\nu_{12} = 0.30$,当 $a/b = 1$ 时,可得平板圆孔附近的动应力集中系数(如图 1~3 所示);当 $a/b = 0.75$ 时,可得椭圆孔附近的动应力集中系数(如图 4~6 所示).

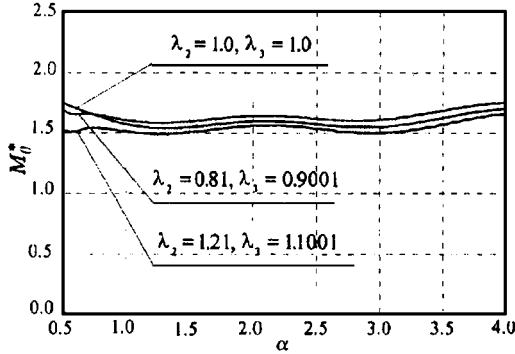


图 1 圆孔动弯矩集中系数 ($\nu_{12} = 0.30$)

Fig. 1 Dynamic moment factors ($\nu_{12} = 0.30$)

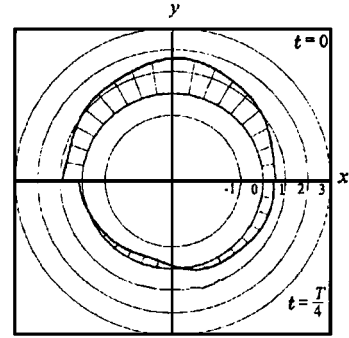


图 2 $\nu_{12} = 0.30$ 时, $\lambda_2 = 0.50, \lambda_3 = 1.0, \lambda_4 = 1.0001$ 时, 圆孔沿孔边动弯矩分布示意图

Fig. 2 Dynamic moment factors, $\nu_{12} = 0.30$, $\lambda_2 = 0.50, \lambda_3 = 1.0, \lambda_4 = 1.0001$

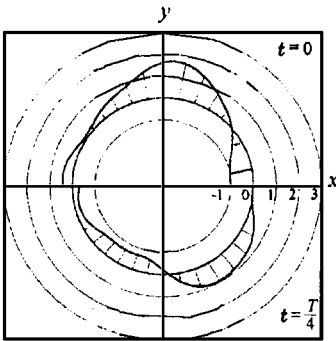


图 3 $\nu_{12} = 0.30$ 时, $\lambda_2 = 2.0, \lambda_3 = 1.21, \lambda_4 = 1.11$ 时, 椭圆孔沿孔边动弯矩分布示意图

Fig. 3 Dynamic moment factors, $\nu_{12} = 0.30$, $\lambda_2 = 2.0, \lambda_3 = 1.21, \lambda_4 = 1.11$

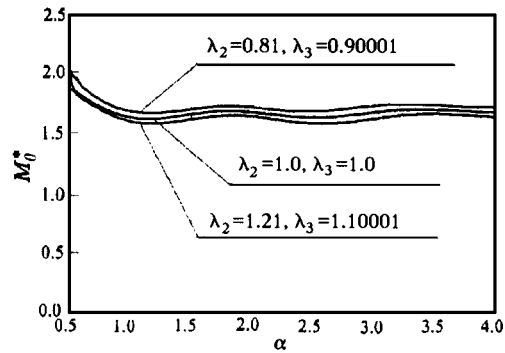


图 4 椭圆孔动弯矩集中系数 ($\nu_{12} = 0.30$)

Fig. 4 Dynamic moment factors ($\nu_{12} = 0.30$)

6 结 语

通过对计算结果分析可以看到: 在入射波频率较低的情况下,动应力集中系数的计算结果和文献[3]中的结果是相同的,并且随无量纲参数 λ_2, λ_3 的变化也是相同的,即随着无量纲参数 λ_2 的增加或 λ_3 的减少,应力集中系数减少,说明本文分析方法是有效的.

本文基于各向异性平板弯曲波动理论,采用摄动方法使平板弯曲波动方程由 4 阶降为 2 阶,得到了平板弯曲波动问题开孔附近散射波的渐近解. 采用复变函数方法及保角映射技术去满足开孔边界给定的条件,实现了对正交各向异性平板开孔弯曲波散射及动应力集中系数的分析研

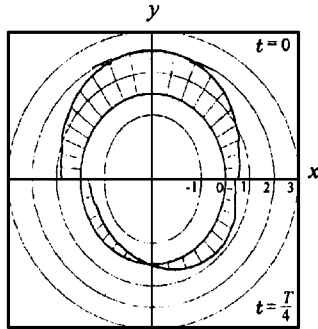


图5 $\nu_1=0.50, \nu_2=1.0, \nu_3=1.0001$ 时,
椭圆孔沿孔边动弯矩分布示意图
Fig.5 Dynamic moment factors,
 $\nu_1=0.50, \nu_2=1.0, \nu_3=1.0001$

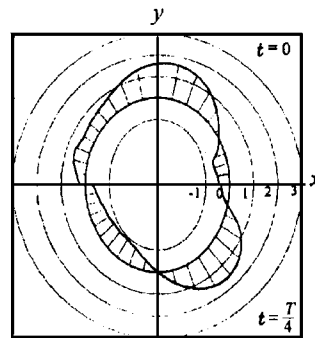


图6 $\nu_1=2.0, \nu_2=1.21, \nu_3=1.1001$ 时,
椭圆孔沿孔边动弯矩分布示意图
Fig.6 Dynamic moment factors,
 $\nu_1=2.0, \nu_2=1.21, \nu_3=1.1001$

究. 在分析问题时, 只要给出如下无量纲量: 材料的 Poisson 比 ν_{12} ; 各向异性系数 ν_2, ν_3 ; 无量纲波数 $= ka$; 便可实现对正交各向异性平板弯曲波动问题的分析.

参 考 文 献

- 1 Muskhilishvili GI 著, 赵惠元译. 数学弹性力学的几个基本问题. 北京: 科学出版社, 1958
- 2 Savin GN 著, 卢鼎霍译. 孔附近的应力集中. 北京: 科学出版社, 1958
- 3 Ielnnitskii SG 著, 胡海昌译. 各向异性板. 北京: 科学出版社, 1963
- 4 余同希, 苏先樾, 王晓东. 弹塑性波的研究现状和趋势. 力学进展, 1992, 22(3): 347~357
- 5 鲍亦兴, 毛昭宙著, 刘殿魁, 苏先樾译. 弹性波的衍射与动应力集中. 北京: 科学出版社, 1993
- 6 王铎, 马兴瑞, 刘殿魁著. 弹性动力学最新进展. 北京: 科学出版社, 1995
- 7 Pao YH. Dynamical stress concentrations in an elastic plate. *J Appl Mech*, 1962, 29(2): 299~305
- 8 Pao YH, Chao CC. Diffractions of flexural waves by a cavity in an elastic plate. *AIAA J*, 1964, 2(11): 2004~2010
- 9 Pao YH. Elastic wave in solids. *J Appl Mech*, 1983, 50(4): 1152~1164
- 10 Klyukin II et al. Scattering of flexural waves by antivibrators on a plate. *Soviet Physics-Acoustics*, 1964, 10: 49~53
- 11 张双寅等编著. 复合材料结构的力学性能. 北京: 北京理工大学出版社, 1992
- 12 Liu DK, Gai BZ, Tao GY. Application of method of complex functions to dynamic stress concentrations. *Wave Motion*, 1982, 4: 293~304
- 13 胡超, 刘殿魁. 无限大板开孔弹性波的散射及动应力集中. 力学学报, 1995, 27(增刊): 125~134
- 14 Liu DK(刘殿魁), Hu C(胡超). Scattering of flexural waves and dynamic stress concentrations in Mindlin's thick plates. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 12(2): 169~185
- 15 钱伟长著. 奇异摄动理论及其在力学中的应用. 北京: 科学出版社, 1981
- 16 Nayfeh AH. Introduction to Perturbation Techniques. New York: A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, 1981

DIFFRACTION OF FLEXURAL WAVES AND DYNAMIC STRESS CONCENTRATIONS IN ORTHOTROPIC PLATES WITH AN ARBITRARY CUTOUT

Ma Xingrui Hu Chao Wang Benli Niu Yuqing

(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract In this paper, based on the governing equation for flexural waves of orthotropic plates, diffraction of elastic waves by cutouts and dynamic stress concentrations in the thin plate has been studied. An analytic method to solve dynamic stress concentrations in the plate with an arbitrary cutout is established. An asymptotic expansion solution that satisfies the boundary conditions on the edge of cutouts is obtained. Therefore the solution of the problem can be normalized by means of this method. Numerical results for dynamic moment factors of plates with circular and elliptic cutouts are presented.

Key words orthotropic plate, perturbation method, arbitrary cutout, diffraction of flexural waves, dynamic stress concentration